ملخص قوانين الجبر (٣ث)

* مبدأ العد :-

اذا كان ن عدد طرق اجراء عملية ما يساوى (ن) طريقة وعدد طرق اجراء عملية آخرى يساوى (م) طريقة فإن

(١) عدد طرق إجراء العملية الاولى **و** الثانية = م × ن طريقة

(٢) عدد طرق إجراء العملية الاولى **أو** الثانية = م + ن طريقة

ويمكن تعميم هذه القواعد لأكثر من عمليتين

* عند اختيار أشياء عددها (ر) من بين أشياء عددها (ن) فان عدد الطرق الممكنة اذا كان :-

(١) الاختيار بدون احلال

مع مراعاة الترتيب = $^{ن}ل_{ر}$

مع عدم مراعاة الترتيب = $^{ن}ق_{ر}$

(٢) الاختيار مع الاحلال

مع مراعاة الترتيب = $(ن)^{ر}$

مع عدم مراعاة الترتيب = $^{ن+ر-١}ق_{ر}$

* ملاحظة :

يستخدم القانون $^{ن+ر-١}ق_{ر}$ لايجاد عدد طرق توزيع (ر) من الاشياء **المتماثلة** على (ن) من الاماكن **بدون شرط أو قيد** مثلاً

عدد طرق وضع ٤ كرات متماثلة فى ٥ سلال = $^{٥+٤-١}ق_{٤}$ = ٧٠ طريقة

عدد طرق توزيع ثلاث كتب على اربعة أرفف = $^{٤+٣-١}ق_{٣}$ = ٢٠ طريقة

2025 Scanned by CamScanner

* الترتيب في صف واحد :-

(١) عدد طرق ترتيب (ن) من الأشياء في (ن) من الأماكن في صف واحد = ن! طريقة

مثلاً عدد طرق جلوس ٥ أشخاص على ٥ مقاعد في صف واحد = ٥!

(٢) عدد طرق ترتيب (ر) من الأشياء في (ن) من الأماكن في صف واحد = $^{ن}ل_{ر}$ طريقة حيث ن ≥ ر (دون شرط)

(٣) عدد طرق ترتيب (ر) من الأشياء في (ن) من الأماكن **بحيث تكون متجاورة** في صف واحد = (ن - ر + ١)! طريقة

مثلاً عدد طرق وقوف ٤ سيارات في ساحة انتظار بها ١٠ أماكن بحيث تكون متجاورة = (١٠ - ٤ + ١)! = ٧! = ١٦٨ طريقة

* الترتيب في دائرة واحدة :-

(١) عدد طرق ترتيب (ن) من الأشياء في (ن) من الأماكن في دائرة واحدة = (ن - ١)! طريقة

مثلاً عدد طرق جلوس ٥ أشخاص على ٥ مقاعد في شكل دائرة = (٥ - ١)! = ٤! = ٢٤ طريقة

(٢) عدد طرق ترتيب (ر) من الأشياء في (ن) من الأماكن في دائرة واحدة = $^{ن-١}ل_{ر-١}$ طريقة (دون شرط)

(٣) عدد طرق ترتيب (ر) من الأشياء في (ن) من الأماكن في دائرة واحدة **بحيث تكون متجاورة** = ن! (مشروط)

مثلاً عدد طرق وقوف ٤ سيارات في ١٠ أماكن على هيئة دائرة بحيث تكون متجاورة = ١٠! ٤! = ٢٤٠ طريقة

Scanned by CamScanner

* **تطبيق هندسي على مبدأ العد :-**

إذا كان لدينا مضلع عدد أضلاعه (ن) ضلع (عدد رؤوسه ن)
أو لدينا (ن) من النقط التي ليست على استقامة واحدة فإن

(١) عدد جميع القطع المستقيمة التي تصل بين رأسين من رؤوس المضلع = $^{ن}ق_{٢}$

(٢) عدد اقطار هذا المضلع = $^{ن}ق_{٢}$ − ن

(٣) عدد المثلثات التي رؤوسها ثلاث رؤوس من رؤوس هذا المضلع = $^{ن}ق_{٣}$ وقس على ذلك

التباديل ($^{n}P_{r}$)

* التبديل هو ترتيب لعدة اشياء مختلفة بأخذها كلها أو بعض منها في كل مرة وهو عدد صحيح موجب

* $^{ن}ل_{ر}$: هو عدد الترتيبات التي يمكن تكوينها باختيار (ر) من الاشياء المختلفة من بين (ن) من الاشياء

قوانين التباديل :-

(١) $^{ن}ل_{ر}$ = ن(ن−١)(ن−٢) ------ × (ن−ر+١)
حيث ر ∈ ص+ ، ن ∈ ص+ ، ن ≥ ر

* نتيجة :-

① $^{ن}ل_{ن}$ = ! ن = ن(ن−١)(ن−٢) ------ ×٣×٢×١

② ! ن = ن ! ن−١ = ن(ن−١) ! ن−٢ (التبسيط)

Scanned by CamScanner

(٢) $^{ن}ل_{ر} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن-ر}$ حيث ر ، ن ∈ ص$^{+}$ ، ن ≥ ر

(٣) $^{ن}ل_{ن} = ١$ ، $^{ن}ل_{١} = ن$

(٤) العامل الاوسط في مفكوك $^{ن}ل_{ر} = \frac{٢ن-ر+١}{٢}$

* ملاحظات هامة :-

(١) $\lfloor ٠ = ١$ ، $\lfloor ١ = ١$

(٢) $\lfloor ن = {}^{ن}ل_{ن} = {}^{ن}ل_{ن-١}$ مثلاً $\lfloor ٥ = {}^{٥}ل_{٥} = {}^{٥}ل_{٤}$

(٣) اذا كان $^{ن}ل_{ن} = {}^{ن}ل_{ر}$ فان إما ن = ر أو ر = ن-١

أي أنه اذا كان $^{ن}ل_{ر} = \lfloor ن$ فان ر = ن أو ر = ن-١

(٤) اذا كان $^{ن}ل_{ر} = ١$ فان ر = ٠ عندما ن > ١
ر = ١ عندما ن = ١

(٥) اذا كان $^{ن}ل_{ر} > ١$ فإن ر > ٠ ، ن ≥ ر
ولابد أن يتحقق الشرطان معاً

(٦) في اي تبديل يكون . ⇐ الدليل ⇐ العلم

(٧) اذا كان $^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ل_{ر}$ فان ٠ ≤ ر ≤ ن ، ن ≠ ٠

مثال :-
اوجد قيمة ن اذا كان $^{٧}ل_{ن-٣}$ له قيمة ⑤ $^{٨}ل_{ن-٣} = {}^{٨}ل_{٣-ن}$

Scanned by CamScanner

(١) ∵ $ل^{٧}_{٣-ن}$ له قيمة ⟸ ∴ $٠ \leq ن-٣ \leq ٧$

$٣ \leq ن \leq ١٠$ ، $ن \in ص^{+}$

∴ $ن \in \{٣، ٤، ٥، ....، ٩، ١٠\}$

(٢) ∵ $ل^{٨}_{ن-٣} = ل^{٨}_{٣-ن}$ ⟸ ∴ $٠ \leq ن-٣ \leq ٨$

∴ $٣ \leq ن \leq ١١$

∴ $ن \in \{٣، ٤، ٥، ....، ١٠، ١١\}$

التوافيق (nCr)

* التوفيق هو كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الاشياء باخذها كلها أو باخذ بعض منها بغض النظر عن ترتيبها

* $ق^{ن}_{ر}$: هو عدد المجموعات الممكنة والتي يمكن تكوينها باخذ (ر) من الاشياء من بين (ن) من الاشياء

* قوانين التوافيق :-

(١) $ق^{ن}_{ر} = \frac{ل^{ن}_{ر}}{ر!}$ لكل $ر \in ص^{+}$ ، $ن \in ص^{+}$ ، $ن \geq ر$

(٢) $ل^{ن}_{ر} = ر! \, ق^{ن}_{ر}$ يستخدم اذا وجدت $ل^{ن}_{ر}$ ، $ق^{ن}_{ر}$ في طرفي المعادلة

مثلا اذا كانت $ل^{ن}_{ر} = ٧٢٠$ ، $ق^{ن}_{ر} = ١٢٠$ اوجد قيمة ن ، ر

الحل

∵ $ل^{ن}_{ر} = ر! \, ق^{ن}_{ر}$ ∴ $٧٢٠ = ١٢٠ ر!$ ∴ $ر! = ٦ \leftarrow ر = ٣$

، $ل^{ن}_{٣} = ٧٢٠ = ١٠ \times ٩ \times ٨$ ⟸ ∴ $ن = ١٠$

Scanned by CamScanner

(٣) $^{ن}ق_{ر} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \, \lfloor ن-ر}$ حيث ر ، ن ∈ ط ، ن ≥ ر

(٤) $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$ (قانون التبسيط) ويستخدم

في حالة $ر > \frac{ن}{٢}$ أو في حالة العلم والدليل بهما نفس الرمز

مثلاً : اذا كانت $^{ن}ق_{ن-٢} = ٥٥$ أوجد قيمة ن

الحل

∵ $^{ن}ق_{٢} = {}^{ن}ق_{ن-٢+٢}$ ∴ $^{ن}ق_{٢} = ٥٥$ ∴ $\frac{^{ن}ل_{٢}}{\lfloor ٢} = ٥٥$

∴ $^{ن}ل_{٢} = ١١٠ = ١١ \times ١٠$ ⟵ ∴ ن = ٢

(٥) اذا كان $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$ فان ر = هـ ، ن = ر + هـ

(٦) $^{ن}ق_{٠} = ١$ ، $^{ن}ق_{ن} = ١$ ، $^{ن}ق_{١} = ن$

أي أنه اذا كانت $^{ن}ق_{ر} = ١$ فان ر = ٠ أو ر = ن

(٧) $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر} = \frac{\text{العلم} + ١ - \text{الدليل الأكبر}}{\text{الدليل الأكبر}}$

اي أن النسبة بين توفيقتين متتاليتين لنفس العلم $= \frac{\text{العلم} + ١ - \text{الدليل الأكبر}}{\text{الدليل الأكبر}}$

مثلا اذا كان $^{٨}ق_{ر} : {}^{٨}ق_{ر-١} = ٣ : ٥$ أوجد قيمة ر

∵ $\frac{^{٨}ق_{ر}}{^{٨}ق_{ر-١}} = \frac{٣}{٥}$ ∴ $\frac{٨-ر}{ر} = \frac{٣}{٥}$ ∴ ٤٠ − ٥ر = ٣ر

∴ ر = ٥

Scanned by CamScanner

(٨) قانون الجمع :- $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$

* تذكر هذا جيداً :-

(١) اذا كان $^{ن}ل_{ر}$ أو $^{ن}ق_{ر}$ لهم قيمة فان

$٠ \leq ر \leq ن$ اى أن $٠ \leq$ الدليل $\leq$ العلم

(٢) اذا كان $^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ل_{هـ}$ فان هناك عدة حلول :-

(i) $٠ \leq ر \leq ن$ بوجه عام ، $ر = هـ$

(ii) $ر = ن$ ، $هـ = ن - ١$

(iii) $ر = ن - ١$ ، $هـ = ن$

مثال :- اذا كان $^{٣٠}ل_{س} = {}^{٣٠}ل_{س+٢ص}$ أوجد قيم س ، ص

الحل

$\because {}^{٣٠}ل_{س} = {}^{٣٠}ل_{س+٢ص}$ ، $س = س + ٢ص$ ، $٠ \leq س \leq ٣٠$

منها عندما $٠ \leq س \leq ٣٠$ فان $ص = ٠$ ①

(ii) $س = ٣٠$ ، $س + ٢ص = ٢٩$ $\therefore ص = \frac{-١}{٢}$

منها عندما $س = ٣٠$ فان $ص = \frac{-١}{٢}$ ②

(iii) $س = ٢٩$ ، $س + ٢ص = ٣٠$ منها $ص = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ عند $س = ٢٩$ فان $ص = \frac{١}{٢}$ ③

من ①، ②، ③ ينتج أن

عندما $٠ \leq س \leq ٣٠$ فان $ص = ٠$

$س = ٣٠$ فان $ص \in \{٠ ، -\frac{١}{٢}\}$

$س = ٢٩$ فان $ص \in \{٠ ، \frac{١}{٢}\}$

Scanned by CamScanner

نظرية ذات الحدين

* مفكوك ذات الحدين :-

اذا كان س، أ ∈ ح ، ن ∈ ص+ فان :-

$$(س + أ)^{ن} = ق_{0} أ^{0} س^{ن} + ق_{1} أ^{1} س^{ن-1} + ق_{2} أ^{2} س^{ن-2} + \dots$$

$$\dots + ق_{ن} أ^{ن} س^{0}$$ (حسب قوى س المتنازلية)

$$\therefore (س + أ)^{ن} = س^{ن} + ق_{1} أ س^{ن-1} + ق_{2} أ^{2} س^{ن-2} + \dots + أ^{ن}$$

$$(س - أ)^{ن} = س^{ن} - ق_{1} أ س^{ن-1} + ق_{2} أ^{2} س^{ن-2} - \dots + (-أ)^{ن}$$

* ملاحظات :-

(١) عدد حدود المفكوك يزيد عن الاس بمقدار واحد

(٢) مجموع قوى (س) وقوى (أ) في اى حد = أس المفكوك

(٣) لايجاد مجموع معاملات ذات الحدين نضع المتغير = ١ داخل القوس

مثلاً مجموع معاملات حدود مفكوك $(٢س - ٣)^{١٠٠} = (٢ - ٣)^{١٠٠} = ١$

" " " " $(٥س - ٣ص)^{٥} = (٥ - ٣)^{٥} = ٣٢$

حالات خاصة :-

(١) $(١ + س)^{ن} = ١ + ق_{1} س + ق_{2} س^{2} + ق_{3} س^{3} + \dots + س^{ن}$

(٢) $(١ - س)^{ن} = ١ - ق_{1} س + ق_{2} س^{2} - ق_{3} س^{3} + \dots + (-س)^{ن}$

(٣) $ق_{0} + ق_{1} + ق_{2} + ق_{3} + \dots + ق_{ن} = ٢^{ن}$

Scanned by CamScanner

الحد العام فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$:-

$$ح_{ر+1} = ق_{ن}^{ر} \, (أ)^{ر} \, (س)^{ن-ر}$$

$$= ق_{ن}^{ر} \times (\text{الحد الثانى باشارته})^{ر} \times (\text{الحد الاول باشارته})^{ن-ر}$$

قواعد هامة :-

(١) $ح_{ر}$ من النهاية فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$ يساوى $ح_{ر}$ من البداية فى مفكوك $(أ + س)^{ن}$

(٢) $(س + أ)^{ن} + (س - أ)^{ن} = ٢[ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + \cdots]$

يساوى ضعف مجموع الحدود الفردية الرتبة فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$

(٣) $(س + أ)^{ن} - (س - أ)^{ن} = ٢[ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + \cdots]$

يساوى ضعف مجموع الحدود الزوجية الرتبة فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$

* الحد الاوسط والحدان الاوسطان فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$:-

(١) اذا كانت $ن$ عدداً زوجياً فانه عدد حدود المفكوك يكون فردياً وعلى ذلك يوجد حد أوسط رتبته $\frac{ن}{٢} + ١$

(٢) اذا كانت $ن$ عدداً فردياً فانه عدد حدود المفكوك يكون زوجياً وبالتالى يوجد حدان أوسطان فى هذا المفكوك رتبتهما $\frac{ن+١}{٢}$ والذى يليه $\frac{ن+٣}{٢}$

Scanned by CamScanner

* الحد المشتمل على $س^{ك}$ فى مفكوك ذات الحدين $(س+أ)^{ن}$

لايجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$ فى مفكوك ذات الحدين $(س+أ)^{ن}$

(i) نوجد الحد العام لهذا المفكوك وهو $ح_{ر+1} = ق_{ر}\, أ^{ر}\, س^{ن-ر}$

(ii) نساوى أس الس بـ ك لنحصل على (ر) التى تجعل الحد مشتمل على $س^{ك}$

(iii) للحصول على الحد الخالى من س نضع أس الس = صفر ثم نوجد قيمة ر التى تجعل الحد خالى من س

(iii) اذا كانت ر ∉ ط فإن المفكوك لايشتمل على $س^{ك}$

* النسبة بين حدين متتاليين فى مفكوك $(س+أ)^{ن}$:-

$$\frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{أ}{س} = \frac{ن+1 - \text{رتبة الحد الاصغر}}{\text{رتبة الحد الاصغر}} \times \frac{\text{الحد الثانى}}{\text{الحد الاول}}$$

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر+1}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{\text{معامل الحد الثانى}}{\text{معامل الحد الاول}}$$

$$= \frac{ن+1 - \text{رتبة الحد الاصغر}}{\text{رتبة الحد الاصغر}} \times \frac{\text{معامل الحد الثانى}}{\text{معامل الحد الاول}}$$

مثلاً فى مفكوك $(2س+3ص)^{10}$ أوجد النسبة معاملى $ح_7$ ، $ح_6$

$$\frac{\text{معامل } ح_7}{\text{معامل } ح_6} = \frac{11-6}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$$

مثلا $$\frac{ح_7}{ح_8} = \frac{7}{11-7} \times \frac{2س}{3ص} = \frac{7س}{6ص}$$

Scanned by CamScanner

* أكبر معامل في مفكوك ذات الحدين :-

(١) في مفكوك $(١ \pm س)^{ن}$:-

(i) إذا كانت ن عدد زوجي فإن أكبر معامل في المفكوك يساوي **القيمة المطلقة لمعامل الحد الأوسط**

(ii) إذا كانت ن عدد فردي معاملي الحدين الأوسطين يكونان متساويان وتكون القيمة المطلقة لأي منهما هي أكبر معامل (لأن معاملي الحدين الأوسطين يكونان متساويان عددياً ومختلفين في الإشارة في $(١ - س)^{ن}$)

(٢) في مفكوك $(أ س \pm ب)^{ن}$:-

أكبر قيمة لأكبر معامل في المفكوك هو معامل $ح_{ر+١}$

وتتعين ر من العلاقة $\frac{ن+١-ر}{ر} \times |\frac{ب}{أ}| \geq ١$

مثلاً أوجد أكبر معامل في مفكوك (١) $(٢س + ٣ص)^{٨}$

(٢) $(١ - \frac{١}{س})^{٩}$

الحل

(١) بوضع $\frac{٩-ر}{ر} \times |\frac{٣}{٢}| \geq ١$ ∴ $٢٧ - ٣ر \geq ٢ر$ ⟸ ∴ $ر \leq ٥,٤$

∴ $ر = ٥$

∴ أكبر معامل هو معامل $ح_{٦}$ = $ق^{٨}_{٥} (٣)^{٥} (٢)^{٣}$ = ١٠٨٨٦٤

(٢) بوضع $\frac{١٠-ر}{ر} \times |\frac{-١}{١}| \geq ١$ ∴ $\frac{١٠-ر}{ر} \geq ١$

∴ $ر \leq ٥$ ⟸ $ر = ٥$ أو $ر = ٤$

يوجد حدان متتاليان لهما نفس القيمة العددية للمعامل

أكبر معامل = معامل $ح_{٦}$ = معامل $ح_{٥}$ = $ق^{٩}_{٤} (-١)^{٤} (١)^{٥}$ = ١٢٦

Scanned by CamScanner

الاعداد المركبة

الصورة الجبرية للعدد المركب هى ع = س + ت ص
حيث س ، ص ∈ ح ، ت² = -١

* ملاحظات هامة :-

(١) اذا كان ع = س + ت ص فان مرافق هذا العدد هو $\bar{ع}$ = س - ت ص

(٢) ع + $\bar{ع}$ = ٢س (٣) ع × $\bar{ع}$ = س² + ص²

(٤) $\overline{ع_١ + ع_٢}$ = $\bar{ع_١}$ + $\bar{ع_٢}$

(٥) اذا كان ع = صفر فان س = ٠ ، ص = ٠

(٦) يكون العدد المركب فى ابسط صورة اذا كان مقامه عدد صحيح موجب

(٧) المعادلة التكعيبية لها ثلاث جذور أحدهم حقيقى والآخران مركبان ومترافقان
مثلاً اذا كان ٣ ، ٢ - ت جذرين من جذور معادلة تكعيبية فان الجذر الثالث هو ٢ + ت

(٨) بالنسبة لمستوى آرجاند :-
اذا كان ع = س + ت ص فان
(i) $\bar{ع}$ = س - ت ص وهو مرافق العدد ع وهو صورة العدد المركب ع بالانعكاس فى محور س وتمثله النقطة (س ، -ص)
(ii) -ع هو المعكوس الجمعى للعدد المركب ع وهو انعكاس للعدد المركب فى نقطة الاصل وتمثله النقطة (-س ، -ص)
(iii) |ع| = |$\bar{ع}$| = |-ع| = |-$\bar{ع}$|

Scanned by CamScanner

(٩) سعة العدد المركب :- هى الزاوية القطبية عند نقطة الاصل والتى يصنعها المتجه الممثل للعدد المركب مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

وهى تأخذ عدداً غير منتهى من القيم أى أن

سعة العدد المركب = $\theta + 2\pi n$ ، $n \in ص$

وهى لا تتغير اذا ضرب العدد المركب فى عدد موجب حقيقى

(١٠) السعة الاساسية للعدد المركب $\in]-\pi ، \pi]$

* الصورة المثلثية للعدد المركب :-

اذا كان $ع = س + ت ص$ فان :

$ل = \sqrt{س^2 + ص^2}$ مقياس العدد المركب

$\theta = ظا^{-1}(\frac{ص}{س})$ سعة العدد المركب

وتكون اساسية عندما $\theta \in]-\pi ، \pi]$

وتكون الصورة المثلثية للعدد المركب هى

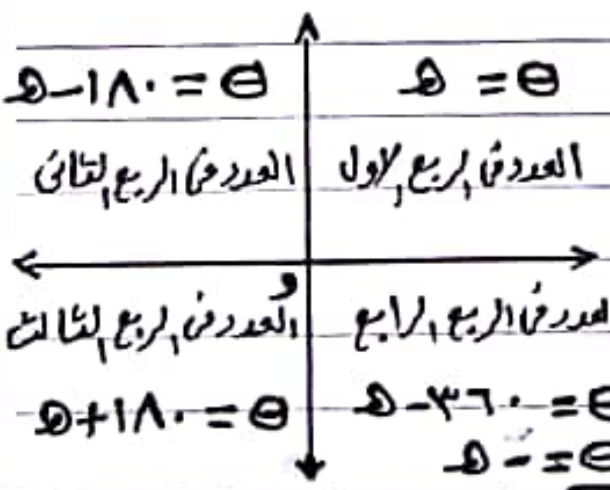
$ع = ل(جتا\theta + ت جا\theta)$

* اذا كان العدد المركب ع مقياسة ل وسعته هـ ويراد تحويل العدد المركب ع الى الصورة المثلثية فان

(١) اذا كان ع على الصورة

$ع = (جتا هـ + ت جا هـ)$

نستخدم الشكل المقابل للحصول على سعة العدد المركب ومنها الحصول على سعته الاساسية



Scanned by CamScanner

مثلا ع = -٣ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)

∴ ع = ٣ (جتا ٦٠ - ت جا ٦٠) في الربع الرابع

∴ θ = ٣٦٠ - ٦٠ = ٣٠٠

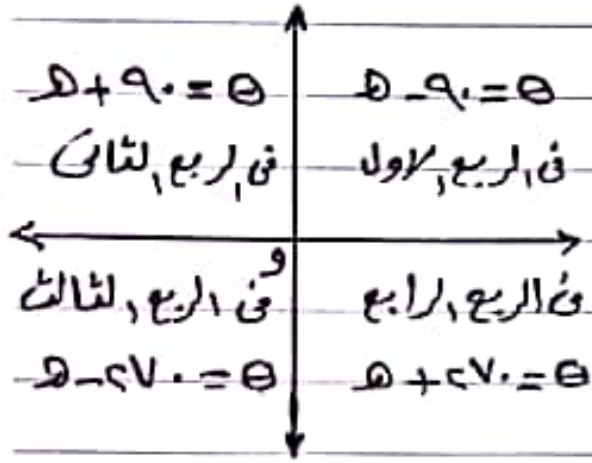
∴ الصورة الاساسية = ٣٠٠ - ٣٦٠ = -٦٠°

∴ ع = ٣ (جتا (-٦٠°) + ت جا (-٦٠)) وقس على ذلك

(٢) اذا كان العدد على الصورة

ع = (جا هـ ± ت جتا هـ)

تستخدم الشكل المقابل



مثلا ع = ٦ (-جا $\frac{٤\pi}{٣}$ + ت جتا $\frac{٤\pi}{٣}$)

∴ ع = ٦ (-جا ٢٤٠° + ت جتا ٢٤٠°) في الربع الثاني

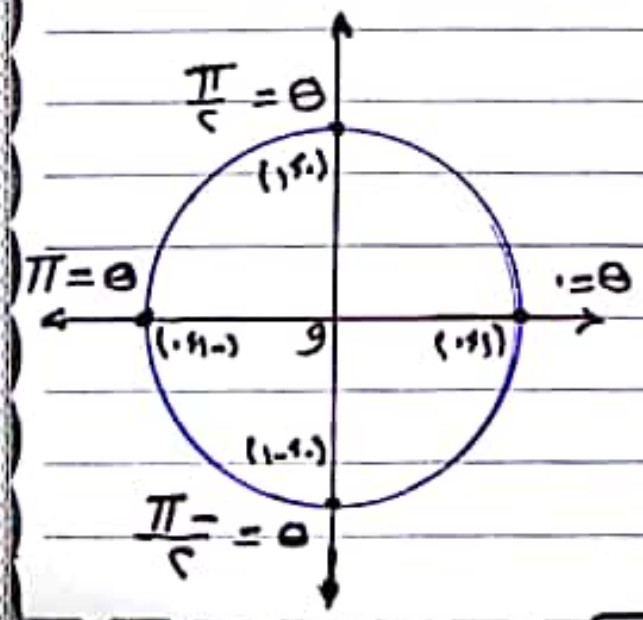
∴ θ = ٩٠ + ٢٤٠ = ٣٣٠°

θ = ٣٣٠ - ٣٦٠ = -٣٠°

∴ ع = ٦ (جتا -٣٠° + ت جا -٣٠) = ٦ (جتا $\frac{-\pi}{٦}$) + ت جا $\frac{-\pi}{٦}$)

وقس على ذلك

* استخدام دائرة الوحدة



١ = (جتا ٠ + ت جا ٠)

ت = (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$)

-١ = (جتا π + ت جا π)

-ت = (جتا ($\frac{-\pi}{٢}$) + ت جا ($\frac{-\pi}{٢}$))

Scanned by CamScanner

* العمليات على الاعداد المركبة فى الصورة المثلثية :-

اذا كان $ع_1 = ل_1 (جتا\theta_1 + ت جا\theta_1)$

$ع_2 = ل_2 (جتا\theta_2 + ت جا\theta_2)$ فان :

(١) $ع_1 ع_2 = ل_1 ل_2 (جتا(\theta_1+\theta_2) + ت جا(\theta_1+\theta_2))$

(٢) $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ل_1}{ل_2} (جتا(\theta_1-\theta_2) + ت جا(\theta_1-\theta_2))$

* ملحوظة :- لاجراء اى عملية على الاعداد المركبة لابد أن تكون هذه الاعداد فى الصورة المثلثية الاساسية

(٣) نتيجة :-

اذا كان $ع = ل (جتا\theta + ت جا\theta)$ فان

$ع^ن = (ل)^ن (جتا(ن\theta) + ت جا(ن\theta))$ ، $ن \in ص^+$

* معلومات اثرائية :-

مفكوك تايلور لبعض الدوال

$$جا س = \sum_{ن=1}^{\infty} \frac{(-1)^ن}{(2ن+1)!} س^{2ن+1} = \frac{س}{1!} - \frac{س^3}{3!} + \frac{س^5}{5!} - \cdots$$

$$جتا س = \sum_{ن=1}^{\infty} \frac{(-1)^ن}{(2ن)!} س^{2ن} = 1 - \frac{س^2}{2!} + \frac{س^4}{4!} - \cdots$$

$$هـ^س = 1 + \frac{س}{1!} + \frac{س^2}{2!} + \frac{س^3}{3!} + \cdots$$

Scanned by CamScanner

* الصورة الاسية للعدد المركب :-

اذا كان $ع = ل(جتا\theta + ت جا\theta)$ فان الصورة

الاسية للعدد المركب هي $ع = هـ^{ت\theta}$ حيث θ مقاسة بالتقدير الدائري

* اذا كان $ع_1 = ل_1 هـ^{ت\theta_1}$ ، $ع_2 = ل_2 هـ^{ت\theta_2}$ فان

(1) $ع_1 ع_2 = ل_1 ل_2 هـ^{ت(\theta_1+\theta_2)}$

(2) $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ل_1}{ل_2} هـ^{ت(\theta_1-\theta_2)}$

(3) $ع^{ن} = (ل)^{ن} هـ^{ت ن\theta}$ حيث $ن \in ص^+$

* نظرية ديموافر :-

لاي عدد مركب $ع = ل(جتا\theta + ت جا\theta)$ فان

(1) $ع^{ن} = (ل)^{ن}(جتا ن\theta + ت جا ن\theta)$ $ن \in ص^+$

(2) اذا كانت $ك \in ص^+$ فان :

$$ع^{\frac{1}{ك}} = \sqrt[ك]{ل}\,(جتا\theta + ت جا\theta)^{\frac{1}{ك}}$$

$$\therefore ع = \sqrt[ك]{ل}\left(جتا\left(\frac{\theta + 2\pi ر}{ك}\right) + ت جا\left(\frac{\theta + 2\pi ر}{ك}\right)\right)$$

حيث $ر = 0, 1, 2, 3, \ldots, (ك-1)$

Scanned by CamScanner

* ملحوظة هامة :-

اذا كان ن عدد جذور عدد مركب ما يساوي ن جذراً فان الفرق بين اى سعتى جذرين متتاليين = $\frac{٣٦٠}{ن}$ بمعنى

اذا كانت سعة الجذر الاول = $\theta_١$

فان سعة الجذر الثانى $\theta_٢ = \theta_١ + \frac{٣٦٠}{ن}$

" " الثالث $\theta_٣ = \theta_٢ + \frac{٣٦٠}{ن}$ وهكذا

مثلاً :-

اوجد مجموعة حل المعادلة $ع^٤ = ٨(١ - \sqrt{٣}\, ت)$ على الصورة المثلثية

الحل

$\because ع^٤ = ١٦(\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت)$ $\therefore ع^٤ = ١٦(جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)$

$\therefore ع^٤ = ١٦(جتا(-٦٠°) + ت جا(-٦٠°))$

$\therefore ع = ٢(جتا \frac{-٦٠ + ٢ر\pi}{٤} + ت جا \frac{-٦٠ + ٢ر\pi}{٤})$

حيث ر = ٠، ١، ٢، ٣

عند ر = ٠ فان ع = ٢(جتا(-١٥) + ت جا(-١٥))

عند ر = ١ فان ع = ٢(جتا($\frac{-\pi}{١٢}$) + ت جا($\frac{-\pi}{١٢}$))

$\because \frac{٣٦٠}{٤} = ٩٠ = \frac{\pi}{٢}$

$\therefore$ الجذر الثانى = ٢(جتا($\frac{٥\pi}{١٢}$) + ت جا($\frac{٥\pi}{١٢}$))

الجذر الثالث = ٢(جتا($\frac{١١\pi}{١٢}$) + ت جا($\frac{١١\pi}{١٢}$))

الجذر الرابع = ٢(جتا $\frac{٧\pi}{١٢}$ + ت جا($\frac{١٧\pi}{١٢}$))

= ٢(جتا($\frac{-٧\pi}{١٢}$) + ت جا($\frac{-٧\pi}{١٢}$))

Scanned by CamScanner

* الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :-

* الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هي :-

1 ، $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت ، $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

* خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

(١) الجذران المركبان كلاً منهما مرافق للآخر

(٢) مربع احد الجذرين المركبين يساوي الجذر المركب الآخر

لذلك نرمز للجذرين المركبين بالرمزين ω ، ω^2

(٣) $\omega^3 = 1$ ، $\omega^{3ن} = 1$ ، $\omega^{3ن+1} = \omega$ ، $\omega^{3ن+2} = \omega^2$

(٤) $1 + \omega + \omega^2 =$ صفر

ومجموع أي جذرين = سالب الجذر الثالث

(٥) $\omega - \omega^2 = \omega^2 - \omega = \pm \sqrt{3}$ ت

(٦) اذا كان $ع = \omega^{س}$ فان $|ع| = 1$

Scanned by CamScanner

المصفوفات

* المعكوس الضربي للمصفوفة (٢×٢) :-
يكون للمصفوفة أ معكوساً ضربياً $أ^{-1}$ اذا وفقط اذا كان محدد المصفوفة أ لا يساوي الصفر

اذا كانت أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$ فان $أ^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} د & -ب \\ -ج & أ \end{pmatrix}$

أما اذا كان Δ = صفر فان المصفوفة أ تسمى بالمصفوفة المنفردة (الشاذة) ولا يكون لها معكوساً ضربياً

* المصفوفة الملحقة :-

اولاً :- اذا كانت المصفوفة أ على النظم (٢×٢) حيث

أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$ فان المصفوفة الملحقة $أ^{ملح}$ تكون

على الصورة $أ^{ملح} = \begin{pmatrix} د & -ب \\ -ج & أ \end{pmatrix}$

* ملحوظة هامة جداً $أ \, أ^{ملح} = أ^{ملح} \, أ = |أ| \, I$

ثانياً :- اذا كانت المصفوفة أ على النظم (٣×٣) حيث

أ = $\begin{pmatrix} أ_{11} & أ_{21} & أ_{31} \\ أ_{12} & أ_{22} & أ_{32} \\ أ_{13} & أ_{23} & أ_{33} \end{pmatrix}$ فان المصفوفة المرافقة للمصفوفة أ يرمز لها بالرمز م

Scanned by CamScanner

حيث م مصفوفة العوامل المرافقة وهى

$$م = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} أ_{22} & أ_{23} \\ أ_{32} & أ_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} أ_{12} & أ_{13} \\ أ_{32} & أ_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} أ_{12} & أ_{13} \\ أ_{22} & أ_{23} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} أ_{21} & أ_{23} \\ أ_{31} & أ_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{13} \\ أ_{31} & أ_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{13} \\ أ_{21} & أ_{23} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} أ_{21} & أ_{22} \\ أ_{31} & أ_{32} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{12} \\ أ_{31} & أ_{32} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{12} \\ أ_{21} & أ_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

وفى هذه الحالة $أ^{مل}$ = مدور مصفوفة العوامل المرافقة

* ملاحظات هامة :-

لأى مصفوفة أ مربعة النظم وغير منفردة فإن

(١) $أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} أ^{مل}$ حيث $|أ| \neq$ صفر

(٢) $I^{مل} = I$

(٣) $أ\, أ^{مل} = أ^{مل} أ = |أ|\, I$

* خواص المعكوس الضربى :-

(١) $(أ ب)^{-1} = ب^{-1} أ^{-1}$ (٢) $(أ^{-1})^{-1} = أ$

(٣) $(أ^{-1})^{مل} = (أ^{مل})^{-1}$ (٤) $(أ^{-1})^{ن} = (أ^{ن})^{-1}$

(٥) $I^{-1} = I$ (٦) اذا كانت $أ = ك I$ فإن $أ^{-1} = \frac{1}{ك} I$

حيث $ك \neq 0$

Scanned by CamScanner

* حل انظمة المعادلات الخطية :-

(١) نرتب المعادلات بحيث تكون المجاهيل في طرف والثوابت في الطرف الاخر

(٢) نكون مصفوفة المعاملات ولتكن أ

(٣) نوجد محدد المصفوفة أ فاذا كان

|أ| = صفر ← المعادلات ليس لها حل في ح

|أ| ≠ صفر ← نظام المعادلات له حل

(٤) نكون مصفوفة الثوابت (النواتج) ولتكن ج

(٥) مصفوفة المجاهيل س = أ$^{-1}$ ج

اى أن مصفوفة المجاهيل = المعكوس الضربي لمصفوفة المعاملات × مصفوفة الثوابت

* مرتبة المصفوفة :-

اذا كانت المصفوفة أ مصفوفة غير صفرية فان

(١) اذا كانت المصفوفة أ مربعة النظم وكان محدد المصفوفة |أ| ≠ ٠ فان :-

مرتبة المصفوفة أ = رتبة المحدد

اما اذا كان |أ| = ٠ فان :-

مرتبة المصفوفة أ تساوى رتبة اى محدد أصغر يمكن تكوينه من المصفوفة أ وقيمته لا تساوى صفراً

(٢) مرتبة المصفوفة أ دائماً ≥ ١ أى أن ر(أ) ≥ ١

(٣) اذا كانت المصفوفة أ على النظم م × ن (غير مربعة) فان

١ ≤ ر(أ) ≤ م عندما م < ن

١ ≤ ر(أ) ≤ ن عندما ن < م

Scanned by CamScanner

(٤) اذا كانت جميع قيم المحددات للمصفوفة = صفر فان مرتبه المصفوفة (أ) تكون أقل من رتبة اصغر محدد فيها بمقدار ١ (اى أن مرتبتها = ١)

* ملاحظات هامة :-

(١) اذا كانت أ مصفوفة صفرية فان ر(أ) = صفر
(٢) " " " " صف أو عمود فان ر(أ) = ١
(٣) " " " " وحدة على النظم ن × ن فان ر(أ) = ن

* المصفوفة الموسعة :-

اذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية وكانت أ مصفوفة المعاملات و ج مصفوفة الثوابت فان المصفوفة الموسعة أ* = (أ : ج)
اى أن المصفوفه الموسعة أ* هى مصفوفة المعاملات مضافاً اليها عمود النواتج

* ملاحظة هامة :-

لايجاد مرتبة المصفوفة الموسعة لابد من ادخال عمود النواتج فى المحددات الصغرى للمصفوفة الموسعة عند ايجاد مرتبتها

* امكانية حل أنظمة المعادلات الخطية :-

لاى نظام من المعادلات الخطية المكون من عدد (ن) من المعادلات فى (ن) من المجاهيل يمكن كتابة معادلته المصفوفية على الصورة :
أ س = ج حيث أ مصفوفة المعاملات

Scanned by CamScanner

س/ مصفوفة المجاهيل ، ج مصفوفة النواتج (الثوابت) فان

(١) اذا كانت ج ≠ المصفوفة الصفرية فان هذا النظام يسمى ويمثل نظام معادلات خطية غير متجانسة وعلى ذلك يكون :

(i) لهذا النظام حل وحيد اذا كان ر(أ) = ر(أ*) = ن

(ii) يكون له عدد لانهائي من الحلول اذا كان
ر(أ) = ر(أ*) < ن

(iii) النظام ليس له حل على الاطلاق عندما
ر(أ) ≠ ر(أ*)

(٢) اذا كانت مصفوفة الثوابت ج = المصفوفة الصفرية فان هذا النظام يسمى ويمثل نظام معادلات خطية متجانس وفي هذه الحالة لابد أن تكون ر(أ) = ر(أ*) دائماً وعلى ذلك يكون :

(i) النظام له حل وحيد اذا كانت ر(أ) = ن
اى أن ر(أ) = ر(أ*) = ن وتكون قيمة كل متغير تساوى صفراً ويسمى هذا الحل في (٠،٠،٠) بالحل الصفري أو الحل البديهي

(ii) النظام له عدد لانهائي من الحلول بالاضافة الى الحل الصفري اذا كان ر(أ) < ن
اى أن ر(أ) = ر(أ*) < ن

Scanned by CamScanner