



www.dirasats.com

هذا الغلاف لا يعبر عن حقوق الملكية او فحوى الكتاب, فهو مجرد واجهة للموقع المحمل منه



شكرا لك على ثقتك بنا وعلى اختيار موقعنا

www.dirasats.com



من اجل تواصل معنا المرجو زيارة الموقع ستجد جميع المعلومات

www.dirasats.com



CONTRÔLE D'ANALYSE NUMÉRIQUE 1
SESSION NORMALE / SAMEDI 01 JUIN 2019
DURÉE 01H30 | 2018-2019

Mardi 16 juin 2020

Question du cours : (08 points)

1. L'équation $x^4 - 4x - 16 = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $] -3, 3[$.

$$f(x) = x^4 - 4x - 16$$

(1) f est continue sur $[-3, 3]$

$$(2) f(-3) = (-3)^4 - 4(-3) - 16 = 77 \text{ et } f(3) = (3)^4 - 4(3) - 16 = 53$$

On va tracer le tableau de variations de f :

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1) = 4(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		0	+	
f	$+\infty \searrow$		-19	$\nearrow +\infty$	

D'après le tableau de variations de f , l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions

$$\alpha \in] -\infty, 1[\text{ et } \beta \in]1, +\infty[$$

$$\text{or } f(-3) = 77 > 0 \text{ donc } \alpha \in] -3, 1[$$

$$\text{or } f(3) = 53 > 0 \text{ donc } \beta \in]1, 3[$$

Réponse : F : car il existe deux solutions $\alpha \in] -3, 1[$ et $\beta \in]1, 3[$.

Remarque : même si $f(a)f(b) \geq 0$ n'implique pas que $f(x) = 0$ n'admet pas de solution

TVI : SI (1) et (2) ALORS $f(x) = 0$ admet une solution.

2. La méthode de la sécante est une méthode dérivée de celle de Newton, donnée par la suite :

$$x_{n+1} = f(x_n) - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

$$\text{Réponse : F : car : } x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$\text{Newton } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Donc la sécante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{x_n(f(x_n) - f(x_{n-1})) - f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

3. Une fonction F est dite strictement contractante sur un intervalle $[a, b]$, s'il existe $k \in [0, 1]$ tel que $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ on a : $|F(x_1) - F(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$.

Réponse : F : car : s'il existe $k \in]0, 1[$

4. Toute matrice symétrique définie positive est inversible.

RAPPEL : matrice SDP = S et ses mineurs fondamentaux > 0

en particulier, le dernier mineur fondamental = $\det(A) > 0$ donc $\det(A) \neq 0$, donc la matrice A est inversible.

Réponse : V : car matrice SDP = S et ses mineurs fondamentaux > 0 , en particulier, son dernier mineur = $\det(A) > 0$, donc inversible.

5. Considérons le système $Ax=B$ avec $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}$, la méthode de Gauss-Seidel

associée à A converge si $a>0, ac<b^2$ et $d>0$.

La méthode de Gauss-Seidel converge si :

soit A est à dsd : $|a|>|b|+0$, $|c|>|b|+0$ et $|d|>0$

OU soit A est SDF :

(a) A est symétrique OK

(b) MF d'ordre 1 est : $a>0$

(c) MF d'ordre 2 est : $ac-b^2>0$

(d) MF d'ordre 3 est : $d(ac-b^2)>0$

Réponse : F : car : La méthode de G-S converge si : $a>0, ac-b^2 > 0$ et $d>0$.

Exercice : (05 points)

On se propose de déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation :

$$f(x) = x - e^{-2x} \quad (1)$$

1- (1 pt) Montrer que (1) admet une seule racine α comprise entre 0 et 1.

(a) La fonction f est continue sur \mathbb{R} en particulier sur $[0,1]$.

(b) $f(0) = -1$ et $f(1) = 1 - e^{-2} (\approx 0.8 > 0) = 1 - \frac{1}{e^2} = \frac{e^2-1}{e^2} > 0$

(c) f est dérivable et on a : $f'(x) = 1 + 2e^{-2x} > 0$ donc strictement croissante sur \mathbb{R} , en particulier sur $]0,1[$.

Finalement, d'après le TVI, (1) admet une seule racine α comprise entre 0 et 1.

2- A l'aide de la méthode de Newton, déterminer une valeur approchée de α après 3 itérations avec un point initial $x_0 = 0.00$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{x_n - e^{-2x_n}}{1 + 2e^{-2x_n}} \\ &= \frac{x_n + 2x_n e^{-2x_n} - x_n + e^{-2x_n}}{1 + 2e^{-2x_n}} = \frac{(2x_n + 1)e^{-2x_n}}{1 + 2e^{-2x_n}} \\ x_1 &= \frac{(2x_0 + 1)e^{-2x_0}}{1 + 2e^{-2x_0}} = \frac{(2 \times 0 + 1)e^{-2 \times 0}}{1 + 2e^{-2 \times 0}} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \approx 0.33 \\ x_2 &= \frac{(2x_1 + 1)e^{-2x_1}}{1 + 2e^{-2x_1}} \approx 0.42 \\ x_3 &= \frac{(2x_2 + 1)e^{-2x_2}}{1 + 2e^{-2x_2}} \approx 0.42 \end{aligned}$$

Conclusion : $\alpha \approx 0.42$

4- (1 pt) On se propose de résoudre (1) par la méthode du point fixe :

$$x = g(x) = \frac{\beta x + e^{-2x}}{1 + \beta}, \text{ avec } \beta > 0 \quad (2)$$

a- Vérifier que (2) est équivalente à (1).

$$x - e^{-2x} = 0???$$

(2) On a $x = \frac{\beta x + e^{-2x}}{1 + \beta} \Leftrightarrow (1 + \beta)x = \beta x + e^{-2x}$

$$\Leftrightarrow x + \beta x = \beta x + e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \quad (1)$$

b- Donner une condition suffisante sur β qui assure la convergence de la méthode du point fixe sur $[0,1]$ vers α .

La méthode du point fixe converge si la fonction g est strictement contractante sur $[0,1]$.

Comme $g'(x) = \frac{1}{1+\beta} [\beta - 2e^{-2x}]$ alors $g'(x) = \frac{\beta - 2e^{-2x}}{1+\beta}$.

Pour que $|g'(x)|$ soit < 1 , $\forall x \in [0, 1]$, alors il faut :

$$\frac{|\beta - 2e^{-2x}|}{1+\beta} < 1$$

Comme $0 \leq x \leq 1$ alors $-1 < \frac{\beta-2}{1+\beta} \leq \frac{\beta-2e^{-2x}}{1+\beta} \leq \frac{\beta-2e^{-2}}{1+\beta} < ?1$

(A) On a $\frac{\beta-2e^{-2}}{1+\beta} < 1$ car :

$$\frac{\beta-2e^{-2}}{1+\beta} < 1 \Leftrightarrow \beta - 2e^{-2} < 1 + \beta$$

$$\Leftrightarrow -2e^{-2} < 1 \quad \text{cette relation est vraie toujours}$$

$$(B) -1 < \frac{\beta-2}{1+\beta} \Leftrightarrow -1 - \beta < \beta - 2$$

$$\Leftrightarrow 1 < 2\beta$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \beta$$

Conclusion : $-1 < g'(x) < 1$ si $\frac{1}{2} < \beta$.

c- Pour $\beta=1$ et en utilisant (2), déterminer une valeur approchée de α après 3 itérations avec un point initial $x_0 = 0.00$.

$$\text{On a } x = g(x) = \frac{x+e^{-2x}}{2}$$

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{x_n + e^{-2x_n}}{2}$$

$$x_1 = \frac{x_0 + e^{-2x_0}}{2} = 0.50$$

$$x_2 = \frac{x_1 + e^{-2x_1}}{2} \approx 0.43$$

$$x_3 = \frac{x_2 + e^{-2x_2}}{2} \approx 0.43$$

$$\alpha \approx 0.43$$

Exercice 2 : (07 points)

Soit A la matrice définie par : $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \\ -8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

1- Déterminer la factorisation LU de A en utilisant le procédé d'élimination de Gauss.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{4} & 1 & 0 \\ \frac{-8}{4} & \frac{6}{-8} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \\ -8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{4}{4}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{-8}{4}L_1 \end{cases} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{6}{-8}L_2 \end{cases}$$

$$\text{Finalement : } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & \frac{3}{-4} & 1 \end{bmatrix} \text{ et } U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{15}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{Pour vérifier : } LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & \frac{3}{-4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{15}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \\ -8 & 2 & 1 \end{bmatrix} = A$$

OK

2- Soit a un réel donné, utiliser la décomposition LU, de la question précédente pour calculer $\det(A), \det(A^{-1})$ et résoudre le système $AX=b$ où $b=(12a+2, 20a-6, 2)^T$.

$$(a) \det(A) = \det(L) \times \det(U) = 1 \times 1 \times 1 \times (4) \times (-8) \times \frac{15}{4} = -120$$

$$(b) \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{-120}$$

$$(c) Ax = b \text{ avec } b = \begin{pmatrix} 12a+2 \\ 20a-6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow LUX = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

$$Ly = b \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 12a+2 \\ y_1 + y_2 = 20a-6 \\ -2y_1 - \frac{3}{4}y_2 + y_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 12a+2 \\ y_2 = 8a-8 \\ y_3 = 30a \end{cases}$$

$$Ux = y \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 12a+2 \\ -8x_2 + x_3 = 8a-8 \\ \frac{15}{4}x_3 = 30a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 8a \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 8a \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 4 : (04 Points)

On considère sur l'intervalle $[0,1]$, le problème de Cauchy suivant,

$$(E) \begin{cases} y'(x) = -y(x) + e^x + e^{-x} \\ y(0) = 1/2 \end{cases} \quad y'(x) = f(x, y(x))$$

1. (1 pt) Montrer que le problème (E) admet une solution unique.

On pose $f(x, y) = -y + e^x + e^{-x}$

on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -1$ est une fonction continue et bornée sur $[0,1]$. Donc le problème (E) admet une solution unique.

2. (1 pt) Déterminer la solution de (E).

$y' = -y$ (Equation homogène)

la fonction nulle est une solution, cherchons les autres solutions.

$$y' = -y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -1 \Leftrightarrow \ln|y| = -x + C \Leftrightarrow y = Ke^{-x} \text{ avec } K \in \mathbb{R}^*$$

Conclusion, les solutions de $y' = y$ sont : $y(x) = Ke^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Pour résoudre l'équation complète $y'(x) = -y(x) + e^x + e^{-x}$, on utilise méthode de variation de la constante K :

c'est à dire, on considère la fonction : $y = K(x)e^{-x}$ (mon objectif est de calculer $K=?$)

$$\text{On a : } y' = K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x}$$

comme y est une solution de (E), alors $K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x} = -K(x)e^{-x} + e^x + e^{-x}$

$$\Leftrightarrow K'(x)e^{-x} = e^x + e^{-x} \times e^x$$

$$\Leftrightarrow K'(x) = e^{2x} + 1$$

$$\Leftrightarrow K(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + x + cte$$

$$\text{Donc } y = K(x)e^{-x} = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + x + c\right)e^{-x} = \frac{1}{2}e^x + xe^{-x} + ce^{-x} \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

$$\text{OR } y(0) = \frac{1}{2} \text{ ALORS } \frac{1}{2} + 0 + c = \frac{1}{2} \text{ donc } c = 0$$

$$\text{Finalement, } y = \frac{1}{2}e^x + xe^{-x}$$

3. (1 pt) En utilisant la méthode d'Euler, donner avec 2 décimales exactes, une approximation de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$ et $y(0.4)$.

$$Y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad f(x, y) = -y + e^x + e^{-x}$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0.1$$

$$x_2 = 0.2$$

$$x_3 = 0.3$$

$$x_4 = 0.4$$

$$\text{donc } h = x_{i+1} - x_i = 0.1$$

$$y_0 = y(0) = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = y_0 + 0.1(-y_0 + e^{x_0} + e^{-x_0}) \approx 0.65$$

$$y_2 \approx 0.79$$

$$y_3 \approx 0.92$$

$$y_4 \approx 1.04$$

4. (1 pt) En déduire par la méthode des trapèzes, une valeur approchée de l'intégrale,
 $I = \int_0^{0.4} \left(\frac{e^x}{2} + xe^{-x}\right) dx$

$$I = \frac{h}{2} [y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4]$$

$$= \frac{0.1}{2} [0.5 + 2 \times 0.65 + 2 \times 0.79 + 2 \times 0.92 + 1.04] \approx 0.31$$

Exercice 4

Le tableau suivant résume les mesures de la tension aux bornes d'une diode

$$t(s) \quad 0 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$U(V) \quad -8 \quad 4 \quad 0 \quad 2$$

En utilisant l'interpolation de Lagrange, estimer la tension de cette diode à $t=4.2s$.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(0-3)(0-4)(0-5)} = -\frac{1}{60}(x-3)(x-4)(x-5) =$$

$$-\frac{1}{60}x^3 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{47}{60}x + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-4)(x-5)}{(3-0)(3-4)(3-5)} = \frac{1}{6}x(x-4)(x-5) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{10}{3}x$$

$$L_2 = \text{On va pas calculer ce polynôme!!!!}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(5-0)(5-3)(5-4)} = \frac{1}{10}x(x-3)(x-4) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{7}{10}x^2 + \frac{6}{5}x$$

$$P(x) = -8L_0(x) + 4L_1(x) + 0L_2(x) + 2L_3(x)$$

$$= -8\left(-\frac{1}{60}x^3 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{47}{60}x + 1\right) + 4\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{10}{3}x\right) + 2\left(\frac{1}{10}x^3 - \frac{7}{10}x^2 + \frac{6}{5}x\right)$$

$$= x^3 - 9x^2 + 22x - 8$$

$$P(4.2) = (4.2)^3 - 9 \times (4.2)^2 + 22 \times (4.2) - 8 = -0.272$$