

Examen Final

Lectures' Questions (8 pts)

1/ The Compton effect describes the scattering of an X-ray photon when it strikes an electron. To conserve momentum, the electron must recoil in the process. Calculate the magnitude of this recoil momentum and its direction relative to that of the incident photon.

2/ It can be shown that the magnitude of the average kinetic energy of an electron in a hydrogen atom is equal to the magnitude of the binding energy. Use this fact and the Heisenberg uncertainty principle to obtain an approximate lower bound to the radius of a hydrogen atom in its lowest energy state. (We suppose that the radius of the atom is approximately equal to the uncertainty in the electron position in any direction.)

Exercise 1 (6 pts)

The maximum energy of photoelectrons emitted from potassium is 2.1 eV when illuminated by light of wavelength 3×10^{-7} m and 0.5 eV when the light wavelength is 5×10^{-7} m.

1/ Use these results to obtain the value of Planck's constant.

2/ What is the minimum energy needed to free an electron from potassium?

Exercise 2 (6 pts)

Consider the one-dimensional time-dependent Schrödinger equation in the case where the potential is not a function of time:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x, t)$$

1/ We put $\Psi(x, t) = u(x)T(t)$. Derive the one-dimensional time-independent Schrödinger equation satisfied by $u(x)$.

2/ Show that if $V(x) = 0$, then the wave function Ψ can be written as a plane-wave:

$$\Psi(x, t) = A \exp[i(kx - \omega t)]$$

where A is an arbitrary constant and k and ω are to be determined.

Examen Final

- Corrigé en français -

• Lectures' Questions:

1/ L'impulsion de recul de l'électron doit être égale et de signe opposé à l'impulsion du photon. La projection sur les axes OX et OY donne alors:

$$p_x = \frac{2\pi h}{\lambda} - \frac{2\pi h}{\lambda'} \cos \theta$$

$$p_y = - \frac{2\pi h}{\lambda'} \sin \theta$$

d'après la formule de Compton. Par suite, le module de l'impulsion de recul est:

$$p = 2\pi h \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda'}\right)^2 - \frac{2}{\lambda\lambda'} \cos \theta}$$

La direction de recul fait un angle φ avec l'axe horizontal OX , avec:

$$\tan(\varphi) = \frac{\lambda \sin \theta}{\lambda \cos \theta - \lambda'}$$

Tandis que λ' peut être exprimé en terme de λ selon la formule de Compton.

Le rayon de l'atome (r_0) est égale, en première approximation, à l'incertitude dans la position de l'électron dans n'importe quelle direction, qui est aussi liée à l'incertitude dans l'impulsion suivant le principe de Heisenberg. En utilisant le fait que $E_n = - \frac{2\pi R_y h c}{n^2}$, on peut estimer la valeur moyenne de l'impulsion de l'électron:

$$\langle p \rangle = \sqrt{2m_e E} = \sqrt{4\pi R_y h c m_e} \quad \text{ou}$$

où R_y est la constante de Rydberg. Puisqu'on suppose que l'atome est au repos, la valeur moyenne de l'impulsion de l'électron doit être nulle, et $\langle p \rangle$ correspond alors à l'incertitude dans l'impulsion, et le rayon atomique doit être plus grand que r_0 , où:

$$r_0 = \frac{h}{2 \langle p \rangle} = \sqrt{\frac{h}{16\pi R_y c m_e}} \quad \text{ou}$$

$$\text{A.N.: } r_0 = \sqrt{\frac{1,05 \times 10^{-34}}{16\pi \times 1,10 \times 10^7 \times 3 \times 10^8 \times 9,1 \times 10^{-31}}} \quad \text{ou}$$

$$= 0,26 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$\text{donc } r > 0,26 \times 10^{-10} \text{ m} \quad \text{ou}$$

• Exercice 1:

1/ On utilise la formule de l'effet photoélectrique:

$$E_c = h f - \phi \quad \text{ou}$$

où E_c est l'énergie cinétique de l'électron, h est la constante de Planck, f est la fréquence

la lumière incidente et ϕ est l'énergie d'extraction.
 En utilisant le fait que $f = \frac{c}{\lambda}$, où $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ est la vitesse de la lumière, λ est la longueur d'onde, et que 1 eV est équivalent à $1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$, on aura

$$2\pi \times 10^{15} \hbar - \phi = 3,36 \times 10^{-19} \quad 0,2$$

$$1,2\pi \times 10^{15} \hbar - \phi = 0,8 \times 10^{-19}$$

La résolution de ce système d'équations donne $\hbar = 1,02 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

On peut aussi calculer h à partir de $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

2/ La résolution du système dans la question précédente donne pour l'énergie d'extraction la valeur:

$$\phi = 1,9 \text{ eV.} \quad 0,2$$

• Exercice 2:

1/ On remplace $\Psi(x,t) = u(x) T(t)$ dans

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x,t)$$

après avoir calculé:

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = u(x) \frac{dT(t)}{dt} \quad 0,1$$

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} = \frac{du(x)}{dx} T(t)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d^2 u(x)}{dx^2} T(t)$$

ce qui donne,

$$u(x) \frac{dT(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} T(t) + V(x) u(x) T(t)$$

Pour les valeurs de x et de t qui rendent $\psi(x,t) \neq 0$, on peut diviser par $\psi(x,t) = u(x) T(t)$, et on aura:

$$i\hbar \frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{u(x)} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + V(x)$$

Cette dernière équation est de la forme $f(x) = g(t)$ avec x et t deux variables indépendantes! Elle n'a de solutions que si les deux membres sont égaux à la même constante qu'on dénote par E (à cause de fait qu'elle a une dimension d'énergie).

Par suite, on peut écrire

$$i\hbar \frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = E \quad \text{ou}$$

et

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{u(x)} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + V(x) = E$$

La deuxième équation peut aussi être écrite sous la forme:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + V(x) u(x) = E u(x) \quad \text{ou}$$

qui est exactement l'équation de Schrödinger indépendante du temps.

2/ Si on pose $V(x) = 0$ dans l'équation de Schrödinger indépendante du temps, on aura l'équation

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = E u(x)$$

on peut écrire sous la forme

$$u''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} u(x) = 0$$

Pour $E > 0$, on pose $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ et donc

$$u''(x) + k^2 u(x) = 0 \quad \text{d)}$$

Cette dernière équation est une équation linéaire, son équation caractéristique est $r^2 + k^2 = 0$, ce qui donne la solution générale :

$$u(x) = A_1 \exp(ikx) + B_1 \exp(-ikx)$$

L'équation de $T(t)$ donne :

$$\frac{dT(t)}{dt} = -i \frac{E}{\hbar} T(t) \Rightarrow T(t) = A_2 \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right) \quad \text{d)}$$

On pose $\omega = \frac{E}{\hbar}$ et $A = A_1 A_2$ avec $B_1 = 0$, on aura :

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= u(x) T(t) \\ &= A_1 \exp(ikx) A_2 \exp(-i \omega t) \\ &= A \exp[i(kx - \omega t)] \end{aligned}$$

qui est une onde plane, avec A constante et

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{E}{\hbar} \quad \text{d)}$$

