

MATEMÁTICA

ciência e aplicações

MANUAL DO
PROFESSOR

1

conecte 

GELSON IEZZI
OSVALDO DOLCE
DAVID DEGENSZAJN
ROBERTO PÉRIGO
NILZE DE ALMEIDA

APRESENTAÇÃO

O livro de Matemática é um importante material de apoio às atividades do aluno, tanto em sala de aula quanto em casa, servindo como fonte de informações teóricas, roteiro de exercícios e problemas, estimulador de reflexões e pesquisas, entre outros objetivos. Entretanto, o livro não substitui o professor, principal inspirador das atividades que conduzem à aprendizagem.

Nesse sentido, nossa pretensão foi propor algo que realmente auxilie e complemente o trabalho do professor. Assim, para esclarecer os principais pontos do nosso livro, elaboramos o Manual do Professor que acompanha cada volume desta coleção.

Cada Manual é composto de duas partes.

A primeira parte é geral, isto é, comum aos três volumes, e subdividida em tópicos. Em um primeiro momento, apresentamos os eixos de trabalho, a estrutura do livro e os objetivos que buscamos atingir.

Em seguida, propomos a leitura de parte de um documento da Secretaria de Educação Básica do MEC — *Pressupostos para um Currículo Inovador de Ensino Médio* —, em que se apresentam as bases para um currículo mais integrado, entrelaçando-se trabalho, ciência e cultura.

No terceiro tópico, apresentamos parte de outro documento do Ministério da Educação que aborda especificamente a Matemática e as três grandes competências a serem desenvolvidas nesta etapa da escolaridade:

- representação e comunicação;
- investigação e compreensão;
- contextualização sociocultural.

A seguir, abordamos a avaliação. Apresentamos nosso ponto de vista sobre o assunto, o que avaliamos e os instrumentos de avaliação. Para auxiliar o professor, procuramos mostrar exemplos de várias situações apresentadas no texto, além de propor um momento de estudo, com a leitura de um texto atual sobre avaliação, de Vasco Pedro Moretto.

O quinto e último tópico da parte geral do Manual traz uma ampla e atualizada bibliografia para o professor.

A segunda parte do Manual é específica para cada volume.

Em um primeiro momento, descrevemos os conteúdos e conceitos que serão apresentados, listando seus objetivos específicos.

Há também sugestões de abordagem para os conteúdos, com algumas possibilidades de avaliação. Procuramos destacar os assuntos mais importantes em cada volume.

Em seguida, há sugestões de atividades em grupos, devidamente detalhadas em seus objetivos, desenvolvimento, material e resolução comentada. Muitas dessas atividades podem servir como fontes de avaliação.

Como todos os livros desta coleção apresentam variadas listas de exercícios, problemas e desafios, inevitavelmente os alunos consultarão o professor. Assim, na última parte, encontra-se a resolução de todas as questões e atividades propostas.

Esperamos que este Manual permita uma melhor compreensão da nossa obra e possa otimizar o trabalho cotidiano do professor.

Os autores

SUMÁRIO

Conheça esta coleção	5
Principais eixos	5
Conjuntos	5
Números e Operações	5
Funções	5
Geometria	6
Tratamento da informação e Estatística; contagem e probabilidade	6
Álgebra	6
Estrutura da coleção	6
Resolução de problemas	6
História da Matemática	7
Integração de conteúdos	8
Contextualização e aplicação a outras áreas do conhecimento (seção <i>Aplicações</i>)	8
Uso da calculadora e do computador	9
Exemplos e exercícios resolvidos	9
Desafios	10
Objetivos gerais da coleção	10
Pressupostos para um Currículo Inovador de Ensino Médio	10
Dimensões para um currículo inovador	11
Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – PCN*	12
As competências em Matemática	13
Avaliação	19
O que avaliamos	19
Instrumentos de avaliação	21
Texto para estudo e reflexão	24
Bibliografia	25
Livros para aprofundamento em Matemática	25
Livros sobre História da Matemática	26
Livros sobre ensino-aprendizagem em Matemática	27
Sites	28
Alguns softwares de Matemática	30
Vídeos educacionais	32
Revistas	32
Sugestões de leitura para o professor	33
Sugestões de leitura para os alunos	33
Livros paradidáticos	33

Comentários específicos	34
Objetivos específicos	36
Conjuntos	36
Números e operações	36
Funções	36
Tratamento da informação	37
Geometria	37
Sugestões de abordagem, avaliação e tópicos principais	37
Números e operações	37
Funções	38
Tratamento da informação	40
Geometria	41
Sugestões de atividades em grupo	41
Atividade 1: Tratamento da informação	42
Atividade 2: A função afim e a demografia	42
Atividade 3: Os índices de obesidade, a Matemática, a Biologia e a Educação Física	45
Atividade 4: As funções exponencial e logarítmica nos cálculos de datação radioativa	48
Atividade 5: Sequências e padrões geométricos	49
Atividade 6: Matemática financeira	51
Exercícios complementares à seção <i>Aplicações</i>	53
Capítulo 4: Função afim	53
Capítulo 5: Função quadrática	54
Capítulo 7: Função exponencial	54
Capítulo 8: Função logarítmica	55
Resolução dos exercícios	56

■ Conheça esta coleção

Ao elaborarmos esta coleção para o Ensino Médio procuramos proporcionar ao aluno conhecimentos significativos de teoria e prática da Matemática, visando à preparação para o trabalho, ao desenvolvimento de habilidades e competências, ao exercício da cidadania e à continuação de seus estudos em outros cursos.

Tivemos também o objetivo de contribuir com o trabalho do professor, pautando-nos em nossa prática pedagógica. Vale salientar que acreditamos na autonomia do educador, cuja prática docente não deve ser limitada pelo livro didático, o qual tem o papel de indicar caminhos, respeitando a proposta pedagógica da escola e do professor. No entanto, para que o livro didático seja um auxiliar confiável, é necessário que os conceitos sejam apresentados com precisão, a linguagem e o rigor sejam compatíveis com essa etapa da escolaridade, as propriedades sejam justificadas e aplicadas a exercícios e situações-problema, os conteúdos estejam integrados e os conhecimentos matemáticos possam ser aplicados em situações cotidianas ou usados em outras áreas do saber, construindo, dessa maneira, aprendizagens significativas.

■ Principais eixos

O programa desenvolvido nos três volumes pode ser resumido em grandes tópicos, a saber:

- Números e Operações
- Funções
- Geometria
- Tratamento da informação e Estatística; contagem e probabilidade
- Álgebra

Os conteúdos e os conceitos construídos em cada volume têm sua escolha com base nos seguintes critérios:

- favorecer a autonomia intelectual dos alunos, solidificando e aprofundando conhecimentos já adquiridos;
- possibilitar a integração entre diversos tópicos do programa de Matemática;
- possibilitar a aplicação dos conhecimentos matemáticos a outras áreas do conhecimento;
- favorecer a aquisição de habilidades e competências;
- atender às sugestões dadas pela Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação (SEB/MEC) por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), mais especificamente no documento *Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias no ensino médio*;
- atender às sugestões preconizadas na matriz curricular do Enem;

- levar em conta a prática pedagógica dos professores – autores desta proposta;
- respeitar as diferentes propostas pedagógicas presentes nas escolas brasileiras.

Antes de iniciarmos a explanação sobre os eixos de trabalho, vale destacar que logo no início do volume 1 há um capítulo sobre noções de conjuntos, que tem por objetivo familiarizar os alunos com a linguagem matemática, auxiliando-os na construção dos conceitos que serão apresentados ao longo da coleção.

■ Conjuntos

Este tópico é desenvolvido no volume 1 desta coleção, onde são abordados, de maneira simplificada, os conceitos básicos e as operações com conjuntos.

■ Números e Operações

Embora este eixo seja trabalhado de maneira geral nos três volumes da coleção, dá-se maior ênfase nos volumes 1 e 3. No primeiro deles, é feita uma revisão de conceitos já apresentados no Ensino Fundamental relacionados aos números naturais, números inteiros e números racionais nas formas decimal e fracionária. A seguir, são abordados os números irracionais e os números reais – campo fértil para a exploração dos intervalos reais. No volume 3 são apresentados os números complexos e suas operações nas formas algébrica e polar.

■ Funções

Este eixo é desenvolvido nos três volumes, com ênfase maior nos volumes 1 e 2. No volume 1 são estudados o conceito geral de função, a leitura e a construção de gráficos, a função afim, a função quadrática, a função modular, a função exponencial, a função logarítmica e as sequências. As progressões aritmética e geométrica são apresentadas como funções com domínio no conjunto dos naturais. No volume 2 abordam-se as funções trigonométricas, enfatizando-se o conceito de período de uma função e revisando-se outros conceitos como paridade, conjunto imagem etc. Todo esse estudo é precedido pela apresentação do ciclo trigonométrico. Nos textos de aplicações da Geometria Métrica revisamos a função afim, o conceito de proporcionalidade e a função quadrática. No volume 3 são introduzidas as funções polinomiais, ainda que, em seu estudo, prevaleça uma abordagem predominantemente algébrica.

Com o estudo da Matemática Financeira, nesse último volume, são retomados conceitos ligados à função afim e a progressões aritméticas; à função exponencial e a progressões geométricas; à função logarítmica, com o uso de logaritmos na resolução de equações exponenciais provenientes dos problemas de juros compostos.

■ Geometria

Este eixo é trabalhado nos três volumes. No volume 1 é feita uma revisão de segmentos proporcionais e do teorema de Tales; de semelhança (em particular a semelhança de triângulos) e de relações nos triângulos retângulos, incluindo-se, naturalmente, o teorema de Pitágoras. A seguir são introduzidas as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Alguns elementos da Geometria Analítica são abordados, especialmente no estudo da função afim e quadrática (plano cartesiano, determinação da equação de uma reta, parábola etc.). No volume 2, a resolução de triângulos é estendida aos triângulos acutângulo e obtusângulo. Em seguida, é revisado e aprofundado o estudo de áreas das figuras planas, realizado um estudo intuitivo da Geometria Espacial de Posição, finalizando com a Geometria Métrica dos Sólidos, abordando de forma abrangente áreas e volumes dos principais poliedros e corpos redondos. No volume 3 é feito o estudo completo da Geometria Analítica: ponto, reta, circunferência e cônicas.

■ Tratamento da informação e Estatística; contagem e probabilidade

Este eixo é trabalhado nos três volumes.

No volume 1 estudam-se tópicos ligados à Matemática Comercial e Financeira (aumentos, descontos, variações percentuais, financiamentos, investimentos, aplicações financeiras etc.) que devem fazer parte do repertório de conhecimentos dos alunos que se preparam para exercer a sua cidadania.

No volume 2, em Análise Combinatória, destaca-se o princípio multiplicativo (ou princípio fundamental da contagem) e outros métodos de contagem com base nele. Em seguida, é feito o estudo completo de probabilidades.

Por fim, o desenvolvimento do binômio de Newton é apresentado como um problema combinatório, evitando-se mostrá-lo sob um ponto de vista exclusivamente algébrico.

No volume 3 é apresentado o estudo da Estatística: sua importância social, a construção e interpretação de gráficos e tabelas de frequência, além de um estudo abrangente das medidas de centralidade e dispersão para resumir e caracterizar um conjunto de dados.

■ Álgebra

Este eixo é tratado nos três volumes. No volume 1 a Álgebra está disseminada no estudo de funções, uma vez que equações e inequações são partes integrantes do texto. No volume 2 abordamos as matrizes e os sistemas lineares (incluindo uma passagem rápida pelos determinantes). O estudo do binômio de Newton também contempla argumentos algébricos. No volume 3 estudamos os polinômios e as equações algébricas.

■ Estrutura da coleção

■ Resolução de problemas

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de um problema qualquer. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade suscetível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.

Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas, se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo.

POLYA, G. A arte de resolver problemas. (Prefácio.)
Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

Na introdução de vários capítulos desta coleção são apresentadas situações-problema que têm por objetivo motivar o aluno para a construção dos conceitos que serão trabalhados e que poderão auxiliá-lo na busca de caminhos para resolver os problemas propostos. Frequentemente esses problemas são retomados ao longo do capítulo, sendo apresentada uma solução.

A resolução de problemas aparece em muitas das séries de exercícios, incluindo os *desafios* (dos quais falaremos adiante).

A seguir, apresentamos como exemplo para o leitor a resolução de um problema seguindo as quatro etapas de resolução sugeridas por Polya.

Problema: Uma escada de 25 dm de comprimento encontra-se apoiada em um muro, do qual seu pé dista 7 dm. Se o pé da escada se afastar mais 8 dm do muro, qual será o deslocamento vertical verificado pela extremidade superior da escada? Admita que o muro seja perpendicular ao solo.

1ª etapa: Compreender o problema.

É preciso identificar a incógnita, os dados e a condicionante, traçando, quando for pertinente, uma figura usando notação adequada.

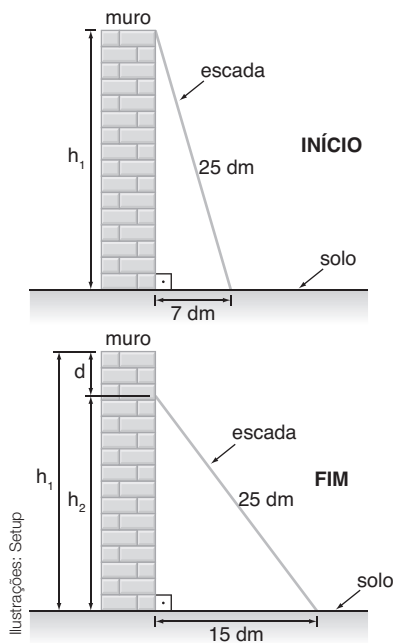
Qual é a incógnita?

O deslocamento vertical registrado pelo extremo superior da escada, isto é, a diferença entre os pontos mais altos atingidos pela escada; indicaremos pela letra d .

Quais são os dados?

- Comprimento da escada: 25 dm.
- Distância inicial do muro ao pé de apoio da escada: 7 dm.
- Distância final do muro ao pé de apoio da escada: 15 dm (7 dm + 8 dm).

Traçado da figura



Ilustrações sem escala ou em escalas diferentes. Cores artificiais.

2ª etapa: Estabelecer um plano.

Segundo Polya: *Consideramos que temos um plano quando, ao menos em linhas gerais, sabemos quais são os cálculos, construções etc. que devemos efetuar para encontrar a solução do problema considerado.*

Necessitamos encontrar uma conexão entre as informações fornecidas no enunciado e a incógnita (d) do problema.

O plano é determinar a altura do ponto mais alto que a escada atinge no muro (h_1) e, em seguida, determinar a altura (h_2) do ponto mais alto que a escada atinge, depois de seu pé ter se afastado. É importante perceber que a hipotenusa dos dois triângulos retângulos é a mesma, pois sua medida corresponde ao comprimento da escada, que não se altera.

Basta fazer, em seguida, a diferença entre h_1 e h_2 para obter o deslocamento vertical (d).

3ª etapa: Executar o plano.

Usando o teorema de Pitágoras para a situação inicial e a final, temos:

Situação inicial:

$$h_1^2 + 7^2 = 25^2$$

$$h_1^2 = 625 - 49$$

$$h_1 = \sqrt{576}$$

$$h_1 = 24 \text{ dm}$$

Situação final:

$$h_2^2 + 15^2 = 25^2$$

$$h_2^2 + 225 = 625$$

$$h_2 = \sqrt{400}$$

$$h_2 = 20 \text{ dm}$$

Deslocamento vertical (d):

$$d = h_1 - h_2$$

$$d = 24 \text{ dm} - 20 \text{ dm}$$

$$d = 4 \text{ dm}$$

4ª etapa: Fazer uma retrospectiva da resolução, revendo-a e analisando-a.

É importante mostrar aos alunos que, ao chegar à solução do problema, não se deve “fechar o livro” e passar ao problema seguinte ou a outro assunto. É fundamental rever todas as etapas envolvidas na resolução, verificar o resultado obtido, a coerência da resposta encontrada, verificar o argumento usado na resolução (no caso, o argumento que torna a resolução possível é o teorema de Pitágoras), além de considerar outras possíveis formas de resolver o problema.

Acreditamos que a descrição acima, sem a pretensão de ser uma “receita mágica”, possa ajudar o professor na construção conjunta com os alunos de uma rotina nas atividades de resolução de problemas, favorecendo gradativamente sua autonomia intelectual. Por fim, é preciso sempre lembrar que a resolução de problemas demanda tempo e o professor deve ficar atento para não suprimir etapas.

■ História da Matemática

Em vários capítulos dos três volumes desta coleção são apresentados textos ou pequenas referências à História da Matemática, os quais têm por objetivo colocar o leitor em contato com a história da criação do conhecimento em Matemática. Essa criação, em geral, está ligada às necessidades da humanidade ao longo da história. Por exemplo, as referências históricas no livro sobre a criação dos logaritmos revelam a necessidade histórica de um instrumento de cálculo, capaz de auxiliar no desenvolvimento da astronomia, comércio e navegação nos séculos XVI e XVII. Com o desenvolvimento tecnológico do século XX (computadores, calculadoras etc.), tal finalidade perdeu sua importância.

É importante que o aluno perceba o caráter acumulativo da Matemática e o fato de que suas fronteiras estão em contínua expansão, como mostra o infográfico sobre geometria fractal, no volume 2. Nele, as referências históricas, bem mais recentes (século XX), revelam o surgimento desse ramo da Matemática associado à necessidade de compreender formas geométricas que a geometria euclidiana não explicava.

■ Integração de conteúdos

Muitas vezes são estabelecidas no livro-texto conexões entre o assunto em desenvolvimento e outros tópicos de Matemática já estudados em outros capítulos ou mesmo em volumes anteriores, favorecendo a não fragmentação dos conteúdos. Um currículo mais integrado tende a motivar os alunos para a aprendizagem em Matemática. Vamos exemplificar alguns casos onde isso ocorre em nossa coleção.

No volume 1, ao definirmos as progressões como um caso particular de função com domínio no conjunto dos números naturais, relacionamos a função afim à progressão aritmética e a função exponencial à progressão geométrica; o conceito de semelhança é usado na definição das razões trigonométricas de um ângulo agudo no triângulo retângulo; o sinal de uma função é usado para resolver inequações de 1º e 2º grau etc.

As atividades de Matemática comercial e financeira relacionam juros compostos às progressões geométricas.

No volume 2, procuramos integrar trigonometria com geometria por meio da resolução de triângulos quaisquer (nesse ponto, são usadas as relações entre as razões trigonométricas de um ângulo e de seu suplementar) e do uso de outras relações trigonométricas na resolução de problemas geométricos.

Além disso, o estudo da Geometria Métrica Espacial é ligado, nos textos de aplicações, às funções polinomiais de 1º e 2º graus.

No volume 3, o estudo da equação da reta é associado à função afim; o estudo da parábola relaciona-se à função quadrática; e o estudo da hipérbole é associado, num caso particular, à função recíproca.

Na parte específica do Manual de cada volume, o professor encontrará propostas de atividades que promovem essa integração. No volume 1, citamos a atividade que relaciona semelhança de triângulos e gráficos estatísticos; no volume 2, destacamos a atividade que integra álgebra e geometria na relação entre produtos notáveis e o volume do paralelepípedo e a atividade sobre fractais geométricos, que relacionam conceitos de sequências numéricas, área e perímetro.

■ Contextualização e aplicação a outras áreas do conhecimento (seção *Aplicações*)

[...]

Contextualizar o conteúdo que quer ser aprendido significa em primeiro lugar assumir que todo conhecimento envolve uma relação entre sujeito e objeto. Na escola básica, o conhecimento é quase sempre reproduzido das situações originais nas quais acontece sua produção. Por esta razão quase sempre o conhecimento escolar se vale de uma transposição didática na qual a linguagem exerce papel decisivo.

O tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo. Se bem trabalhado permite que, ao longo da transposição didática, o conteúdo do ensino provoque aprendizagens significativas que mobilizem o aluno e estabeleçam entre ele e o objeto do conhecimento uma relação de reciprocidade. A contextualização evoca áreas, âmbitos ou dimensões presentes na vida pessoal, social e cultural, e mobiliza competências cognitivas já adquiridas. As dimensões da vida ou os contextos valorizados explicitamente pela LDB são o trabalho e a cidadania. As competências estão indicadas quando a lei prevê um ensino que facilite a ponte entre a teoria e a prática.

[...] é possível generalizar a contextualização como recurso para tornar a aprendizagem significativa ao associá-lo com experiências da vida cotidiana ou conhecimentos adquiridos espontaneamente. É preciso, no entanto, cuidar para que essa generalização não induza à banalização, com o risco de perder o essencial da aprendizagem escolar que é seu caráter sistemático, consciente e deliberado. Em outras palavras: contextualizar os conteúdos escolares não é liberá-los do plano abstrato da transposição didática para aprisioná-los no espontaneísmo e na cotidianidade. [...]

Trechos do parecer nº 15/98 da Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional da Educação.

No início de vários capítulos desta coleção são apresentados problemas ou situações construídas no contexto cotidiano, como forma de motivar o leitor na construção dos conceitos apresentados no capítulo. Em geral, no desenvolvimento do capítulo, tais problemas são retomados.

As séries de exercícios também contemplam uma grande variedade de problemas, nos quais se enfatiza a contextualização com situações reais e cotidianas.

Em diversos capítulos dos três volumes são apresentados textos complementares, na seção *Aplicações*, alguns deles na forma de **infográficos**.

Há artigos que possibilitam aplicar os conhecimentos matemáticos a outros campos, estabelecendo, por exemplo, um elo entre a Matemática e a Física (taxa de variação de função e velocidade média, movimentos uniforme e uniformemente variado; elipse e gravitação); Matemática e Química (função exponencial e decaimento radioativo; logaritmos e pH); Matemática e Biologia (meia-vida de medicamentos); Matemática e Arte (número de ouro; geometria e arte fractal); Matemática e mercado de trabalho (curvas de aprendizagem); Matemática e Economia (função receita, custo e lucro); Matemática e Geografia (medições do índice pluviométrico de uma região); Matemática e Astronomia (no infográfico que mostra o criativo método usado por Eratóstenes na estimativa para a medida do raio da Terra) etc. Em alguns momentos, os textos tratam de temas como a Cidadania, por exemplo, no capítulo de Estatística, que aborda os Censos Demográficos, e nos textos relacionados à Educação Financeira.

Esses textos aprofundam os conceitos que estão sendo formados e auxiliam na construção de outros. Como exemplo, o que liga os jogos de azar à probabilidade – Matemática, futebol e loteria (volume 2); sobre o movimento de uma roda-gigante e as funções trigonométricas (volume 2); sobre compras à vista ou a prazo, no capítulo de Matemática Comercial e Financeira (volume 1).

Na parte específica deste Manual do Professor, há sugestões de atividades em grupos relacionadas a alguns desses textos (e também a assuntos inéditos) para os professores que queiram ampliar e aprofundar a discussão sobre os temas envolvidos. As atividades propostas também podem servir como instrumento diversificado de avaliação.

■ Uso da calculadora e do computador

Procuramos explorar e valorizar, em alguns pontos da coleção, o uso de calculadora (comum ou científica) e do computador.

Com a calculadora comum, por exemplo, pretendemos que o estudante se aproprie do uso da tecla de porcentagem (%) para resolver problemas de Matemática Comercial, tão presentes no dia a dia dos profissionais ligados ao comércio. Alguns desses problemas envolvem cálculo de porcentagens, cálculo do valor final de uma mercadoria após a concessão de um desconto (ou após um aumento de preços) etc.

Com a calculadora científica, por exemplo, procuramos utilizar algumas de suas funções, geralmente não conhecidas pelos estudantes nesta etapa da escolaridade. Dentre as teclas que acionam essas funções, temos:

- as teclas de potenciação (x^y) ou ($^$);

- as teclas de logaritmos decimais (LOG) e neperianos (LN);
- as teclas referentes às funções trigonométricas para obtenção de valores das razões trigonométricas, a partir de um ângulo medido em graus ou radianos (explora-se, neste momento, o ajuste de configuração usando, de forma associada, a tecla (MODE): (DEG) ou (RAD) e, reciprocamente, a partir de um valor conhecido referente a uma razão trigonométrica de um ângulo, como obter a medida do ângulo, explorando, desse modo, a segunda função de uma tecla ((SHIFT) ou (2ndF)).

Com relação ao uso do computador, destacamos três propostas de atividade em grupo, cujo desenvolvimento o professor encontrará na parte específica do Manual.

Duas delas dão suporte ao estudo de Estatística, no volume 3: na primeira atividade é mostrada, passo a passo, a construção de gráficos estatísticos (barras, setores, gráfico de linhas) usando *softwares* de planilhas eletrônicas. Todas as orientações para o professor estão detalhadas na atividade. Na segunda atividade, dando continuidade ao estudo de Estatística, sugerimos uma atividade de cálculo de medidas estatísticas de centralidade e dispersão, que são usadas para caracterizar e resumir um conjunto de dados, através, novamente, do uso de planilhas eletrônicas. Vale lembrar a importância, para um aluno do Ensino Médio, de apropriar-se, gradativamente, dessa ferramenta sob várias perspectivas, entre elas a de preparação para o mercado de trabalho. Além de sua importância no contexto da Estatística, os recursos explorados nessa atividade (ordenação de uma relação de valores, elaboração de fórmulas para obtenção de valores a partir de outros já relacionados etc.) são muito utilizados por vários profissionais.

Por fim, no volume 3, o professor encontrará um roteiro completo e detalhado para a construção e análise de gráficos de funções polinomiais de grau superior a 2, usando um *software* livre de Matemática, o Graphmatica.

Algumas páginas adiante, neste Manual, o professor também encontrará indicações de *sites* relacionados a *softwares*, como o Geogebra, Winplot e Graphmatica, que podem auxiliá-lo no estudo de funções, geometria etc.

■ Exemplos e exercícios resolvidos

Todos os capítulos da coleção apresentam séries de exercícios intercaladas em meio ao texto. Em geral, cada série é precedida de *exemplos* e *exercícios resolvidos*. Colocamos os exercícios em ordem crescente de dificuldade, iniciando, quando julgamos conveniente, por aqueles simples, de reconhecimento ou de aplicação direta, sem, contudo, explorar caminhos artificiais ou excessivamente algébricos e tampouco limitar-se a eles. De modo geral, são exercícios que envolvem relações mais simples.

Intercalados a esses exercícios, propomos problemas no contexto de situações cotidianas, aos quais o aluno possa aplicar e relacionar os conceitos construídos na resolução de problemas.

Os exercícios finais da série geralmente requerem leitura e interpretação mais cuidadosas do enunciado, fazendo com que o aluno busque soluções mais elaboradas para os problemas propostos.

■ Desafios

Todos os capítulos desta coleção são encerrados com um desafio, que pode envolver raciocínio lógico, raciocínio quantitativo, raciocínio indutivo, regularidades em padrões geométricos ou numéricos, visão geométrica plana e espacial etc.

Nossa intenção ao propor esses desafios é proporcionar aos alunos mais uma oportunidade de vivenciar e aperfeiçoar a resolução de problemas, colocando-os em situações mais abertas a atividades investigativas e motivando-os na busca de estratégias e procedimentos diversos de resolução, não necessariamente padronizados ou conhecidos por eles.

Nesta seção, entretanto, não são exigidos conhecimentos matemáticos muito específicos, e os problemas propostos não guardam, geralmente, relação com os conteúdos trabalhados no capítulo.

Esta seção inclui desde questões elaboradas pelos autores até questões da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

Todos os desafios estão resolvidos na parte específica deste Manual.

■ Objetivos gerais da coleção

- Contribuir para a integração do aluno na sociedade em que vive, proporcionando-lhe conhecimentos significativos de teoria e prática da Matemática, indispensáveis ao exercício da cidadania.
- Proporcionar o desenvolvimento de competências e habilidades que lhe possibilitem competir no mercado de trabalho.
- Possibilitar ao aluno o reconhecimento das inter-relações entre os vários campos da Matemática, e desta com as outras áreas do conhecimento.
- Proporcionar ao aluno conhecimentos básicos que lhe permitam continuar seus estudos em cursos de tecnologia ou universitários, além de adquirir uma formação científica geral.

■ Pressupostos para um Currículo Inovador de Ensino Médio

O Programa Ensino Médio Inovador, quando de sua implantação pelos Estados, Distrito Federal e Escolas Federais, pretende estabelecer mudanças significativas nas escolas públicas de ensino médio, não profissionalizante, no país, revertendo os dados relativos a esta etapa da educação básica, capaz de incorporar componentes que garantam maior sustentabilidade das políticas públicas, reconhecendo a importância do estabelecimento de uma nova organização curricular, que possa fomentar as bases para uma nova escola de ensino médio.

Essa nova organização curricular pressupõe uma perspectiva de articulação interdisciplinar, voltada para o desenvolvimento de conhecimentos – saberes, competências, valores e práticas. Considera ainda que o avanço da qualidade na educação brasileira depende fundamentalmente do compromisso político e da competência técnica dos professores, do respeito às diversidades dos estudantes jovens e da garantia da autonomia responsável das instituições escolares na formulação de seu projeto político pedagógico, e de uma proposta consistente de organização curricular.

Dessa forma, novas propostas curriculares podem promover inovações nas práticas educacionais. Entendemos que o desenvolvimento de novas experiências curriculares estimula práticas educacionais significativas e permite que a escola estabeleça outras estratégias na formação do cidadão emancipado e, portanto, intelectualmente autônomo, participativo, solidário, crítico e em condições de exigir espaço digno na sociedade e no mundo do trabalho.

O programa visa contribuir, entre outros aspectos, para o enfrentamento da tensão dialética entre pensamento científico e pensamento técnico; entre trabalho intelectual e trabalho manual na busca de outras relações entre teoria e prática, visando instaurar outros modos de organização e delimitação dos conhecimentos.

Dessa forma, propõe-se estimular novas formas de organização das disciplinas articuladas com atividades integradoras, a partir das inter-relações existentes entre os eixos constituintes do ensino médio, ou seja, o trabalho, a ciência, a tecnologia e a cultura.

Entendendo o trabalho, na concepção de produção de bens e serviços, como um dos princípios educativos no ensino médio, posto ser por meio deste que se pode compreender o processo histórico de produção científica e tecnológica, bem como o desenvolvimento e a apropriação

social desses conhecimentos para a transformação das condições naturais da vida e a ampliação das capacidades, das potencialidades e dos sentidos humanos.

O trabalho é um princípio educativo no currículo do ensino médio também porque o processo social de produção coloca exigências específicas para a educação, visando à participação direta dos membros da sociedade no trabalho socialmente produtivo. Porém, deve-se ter claro que essa perspectiva de formação que possibilita o exercício produtivo não é o mesmo que fazer uma formação estritamente profissionalizante. Ao contrário, essa participação, que deve ser ativa, consciente e crítica exige, antes, a compreensão dos fundamentos da vida produtiva em geral. Somente atendido esse pressuposto é que o trabalho diretamente produtivo pode se constituir no contexto de uma formação específica para o exercício de profissões.

Portanto, o trabalho, do ponto de vista do capital, na dimensão ontológica (mediação primeira da relação entre homem e natureza que viabiliza a produção da existência humana) e histórica (formas específicas com as quais manifesta essa mediação, condicionadas pelas relações sociais de produção), torna-se princípio quando organiza a base unitária do ensino médio, por ser condição para superar um ensino enciclopédico que não permite aos estudantes estabelecer relações concretas entre a ciência que aprende e a realidade em que vive.

A essa concepção de trabalho associa-se a concepção de ciência e tecnologia como: conhecimentos produzidos, sistematizados e legitimados socialmente ao longo da história, como resultado de um processo empreendido pela humanidade na busca da compreensão e transformação dos fenômenos naturais e sociais. Nesse sentido, a ciência conforma conceitos e métodos cuja objetividade permite a transmissão para diferentes gerações, ao mesmo tempo em que podem ser questionados e superados historicamente, no movimento permanente de construção de novos conhecimentos.

Por sua vez, a cultura, que também deve ser inserida nesse contexto, deve ser entendida como as diferentes formas de criação da sociedade, seus valores, suas normas de conduta, suas obras. Portanto, a cultura é tanto a produção ética quanto estética de uma sociedade; é expressão de valores e hábitos; é comunicação e arte. Uma formação que não dissocie a cultura da ciência e do trabalho possibilita aos estudantes compreenderem que os conhecimentos e os valores característicos de um tempo histórico e de um grupo social trazem a marca das razões, dos problemas, das necessidades e das possibilidades que orientaram o desenvolvimento dos meios e das relações de produção em um determinado sentido.

Por esta perspectiva a cultura deve ser compreendida no seu sentido mais amplo, ou seja, como articulação entre o conjunto de representações e comportamentos e o processo dinâmico de socialização constituindo o modo de vida de uma população determinada. Portanto, cultura é um processo de produção de símbolos, de representação de significados e, ao mesmo tempo, prática constituinte e constituída do e pelo tecido social.

[...]

■ Dimensões para um currículo inovador

Entende-se que o currículo é um dos elementos orientadores da Organização do Trabalho Escolar, pressupondo desde o planejamento da gestão da escola até o momento destinado à coordenação dos docentes. O currículo apresenta uma proposta educativa que deve ter as condições adequadas à sua concretização.

Ainda, a organização curricular deve considerar as diretrizes curriculares nacionais e dos respectivos sistemas de ensino e apoiar-se na participação coletiva dos sujeitos envolvidos, bem como nas teorias educacionais.

[...]

A intencionalidade de uma nova organização curricular é erigir uma escola ativa e criadora construída a partir de princípios educativos que unifique, na pedagogia, éthos, logos e técnos, tanto no plano metodológico quanto no epistemológico. Entendendo que o projeto político-pedagógico de cada unidade escolar deve materializar-se, no processo de formação humana coletiva, o entrelaçamento entre trabalho, ciência e cultura, com os seguintes indicativos:

- *Contemplar atividades integradoras de iniciação científica e no campo artístico-cultural;*
- *Incorporar, como princípio educativo, a metodologia da problematização como instrumento de incentivo a pesquisa, a curiosidade pelo inusitado e o desenvolvimento do espírito inventivo, nas práticas didáticas;*
- *Promover a aprendizagem criativa como processo de sistematização dos conhecimentos elaborados, como caminho pedagógico de superação a mera memorização;*
- *Promover a valorização da leitura em todos os campos do saber, desenvolvendo a capacidade de letramento dos alunos;*
- *Fomentar o comportamento ético, como ponto de partida para o reconhecimento dos deveres e direitos da cidadania; praticando um humanismo contemporâneo, pelo reconhecimento, respeito e acolhimento da identidade do outro e pela incorporação da solidariedade;*
- *Articular teoria e prática, vinculando o trabalho intelectual com atividades práticas experimentais;*

- Utilizar novas mídias e tecnologias educacionais, como processo de dinamização dos ambientes de aprendizagem;
- Estimular a capacidade de aprender do aluno, desenvolvendo o autodidatismo e autonomia dos estudantes;
- Promover atividades sociais que estimulem o convívio humano e interativo do mundo dos jovens;
- Promover a integração com o mundo do trabalho por meio de estágios direcionados para os estudantes do ensino médio;
- Organizar os tempos e os espaços com ações efetivas de interdisciplinaridade e contextualização dos conhecimentos;
- Garantir o acompanhamento da vida escolar dos estudantes, desde o diagnóstico preliminar, acompanhamento do desempenho e integração com a família;
- Ofertar atividades complementares e de reforço da aprendizagem, como meio para elevação das bases para que o aluno tenha sucesso em seus estudos;
- Oferta de atividade de estudo com utilização de novas tecnologias de comunicação;
- Avaliação da aprendizagem como processo formativo e permanente de reconhecimento de saberes, competências, habilidades e atitudes.

Fonte: BRASIL. Ensino Médio Inovador. Brasília: MEC (SEB), 2009. p. 16-20. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/ensino_medioinovador.pdf>. Acesso em: 21 jan. 2014.

■ Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – PCN⁺

Em nossa sociedade, o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento.

No ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional.

Nessa etapa da escolaridade, portanto, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de

linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza. Enquanto ciência, sua dimensão histórica e sua estreita relação com a sociedade e a cultura em diferentes épocas ampliam e aprofundam o espaço de conhecimentos não só nesta disciplina, mas nas suas inter-relações com outras áreas do saber.

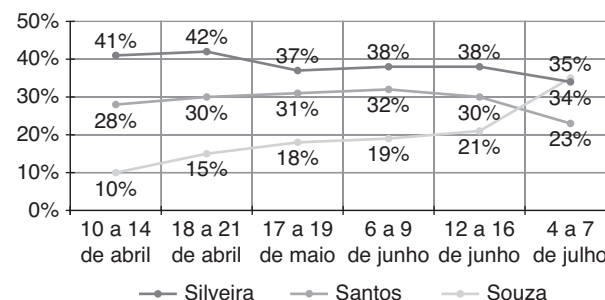
As situações e os desafios que o jovem do ensino médio terá de enfrentar no âmbito escolar, no mundo do trabalho e no exercício da cidadania fazem parte de um processo complexo, no qual as informações são apenas parte de um todo articulado, marcado pela mobilização de conhecimentos e habilidades.

Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.

Para concretizar o que significa, no âmbito do ensino de Matemática, o desenvolvimento de competências e habilidades, vamos analisar dois exemplos de problemas que podem ser apresentados nessa disciplina.

Lendo os jornais de sua cidade, você encontra o gráfico que mostra a intenção de votos para prefeito, com uma margem de erro de 2%, em diferentes momentos da campanha.

Exemplo 1

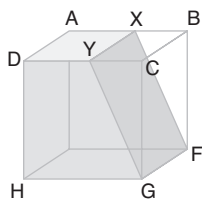


O jornal afirma que o candidato Souza é o vencedor, pois sua candidatura está em franca ascensão. Esta afirmação é confiável? Por quê?

Exemplo 2

A figura a seguir destaca o sólido que restou de um cubo de aresta a , após retirar-se dele o prisma $BCYXFG$, sendo XY paralelo a AD . Se o volume do sólido restante

é $\frac{4}{7}$ do volume do cubo, ache a fração de a que expressa a medida de AX .



O que é preciso saber para enfrentar os desafios propostos nesses problemas?

Poderíamos responder que basta saber ler e possuir alguns conhecimentos simples de Matemática. Mas será que é apenas isso?

De fato, a leitura é um primeiro passo para enfrentar qualquer uma dessas questões. Contudo, saber ler é mais que ter algum domínio da língua portuguesa. Nesse caso, é necessário também dominar códigos e nomenclaturas da linguagem matemática, compreender e interpretar desenhos e gráficos e relacioná-los à linguagem discursiva. Além disso, o aluno precisa analisar e compreender a situação por inteiro, decidir sobre a melhor estratégia para resolvê-la, tomar decisões, argumentar, se expressar e fazer registros. No primeiro exemplo, seria ainda sensato ter em conta que o crescimento nas intenções de voto pode ser contido ou revertido por novos fatos ou novas informações políticas. E, é claro, também precisa de conhecimentos específicos, como relacionar variáveis, analisar taxas de crescimento, calcular porcentagens e comparar quantidades. Algumas das situações frequentemente apresentadas aos alunos, como é o caso do segundo exemplo, uma questão proposta em um exame de vestibular, são tipicamente “disciplinares”, exigem conhecimentos matemáticos específicos. Outras, como no primeiro exemplo, são mais abertas, exigem outras informações além daquelas colocadas no problema, requerem leitura cuidadosa e reflexiva e a necessidade de orquestrar, da melhor forma possível, recursos que envolvem conhecimentos, procedimentos e habilidades de diferentes naturezas. Em resumo, o que se espera é que o aluno seja competente em resolução de problemas, se não de todos, pelo menos daqueles que permitam desenvolver formas de pensar em Matemática.

A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas.

Tanto isso é verdade que sabemos do fracasso dos alunos quando propomos a análise de situações onde

devem ser relacionados dados ou fatos diversos ou quando é necessária a tomada de decisão entre diferentes e possíveis caminhos de resolução. Nesse caso, percebemos que, mesmo quando possuem informações e conceitos, os alunos não os mobilizam, não os combinam eficientemente, desanimam, esperam a explicação do professor, não se permitem tentar, errar, não confiam em suas próprias formas de pensar. Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido.

Isso não significa que os exercícios do tipo “calcule...”, “resolva...” devam ser eliminados, pois eles cumprem a função do aprendizado de técnicas e propriedades, mas de forma alguma são suficientes para preparar os alunos tanto para que possam continuar aprendendo, como para que construam visões de mundo abrangentes ou, ainda, para que se realizem no mundo social ou do trabalho.

Não se trata de separar o ensino de conteúdos específicos das competências, pelo contrário, essas são duas dimensões da aprendizagem que devem ocorrer conjuntamente.

Nessa perspectiva, não só a seleção de temas e conteúdos, como a forma de tratá-los no ensino são decisivas. A maneira como se organizam as atividades e a sala de aula, a escolha de materiais didáticos apropriados e a metodologia de ensino é que poderão permitir o trabalho simultâneo dos conteúdos e competências. Se o professor insistir em cumprir programas extensos, com conteúdos sem significado e fragmentados, transmitindo-os de uma única maneira a alunos que apenas ouvem e repetem, sem dúvida as competências estarão fora de alcance.

■ As competências em Matemática

A área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias elegeu três grandes competências como metas a serem perseguidas durante essa etapa da escolaridade básica e complementar do ensino fundamental para todos os brasileiros:

- representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
- investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
- contextualização das ciências no âmbito sociocultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

No entanto, a escola que tem como objetivo preparar o aluno para um aprendizado permanente e prepará-lo para a vida precisa refletir sobre o significado dessas competências para decidir sobre quais delas trabalhar, em que disciplinas e de que forma. Ou seja, é necessário compreender a proposta, aproximando-a das ações e das possibilidades características dos afazeres escolares. Para isso, apontamos e detalhamos o sentido dessas competências no âmbito da Matemática, explicitando o que se espera do aluno em cada uma delas, com exemplos que procuram auxiliar na compreensão de como, nessa disciplina, é possível desenvolver as competências eleitas na área.

Representação e comunicação	
Na área	Em Matemática
Símbolos, códigos e nomenclaturas de ciência e tecnologia	
Reconhecer e utilizar adequadamente, na forma oral e escrita, símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem científica.	<ul style="list-style-type: none"> ■ Reconhecer e utilizar símbolos, códigos e nomenclaturas da linguagem matemática; por exemplo, ao ler embalagens de produtos, manuais técnicos, textos de jornais ou outras comunicações, compreender o significado de dados apresentados por meio de porcentagens, escritas numéricas, potências de dez, variáveis em fórmulas. ■ Identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas apresentados sob diferentes formas como decimais em frações ou potências de dez, litros em metros cúbicos, quilômetros em metros, ângulos em graus e radianos.
Articulação dos símbolos e códigos de ciência e tecnologia	
Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas.	<ul style="list-style-type: none"> ■ Ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, árvores de possibilidades, fórmulas, equações ou representações geométricas. ■ Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; por exemplo, transformar situações dadas em linguagem discursiva em esquemas, tabelas, gráficos, desenhos, fórmulas ou equações matemáticas e vice-versa, assim como transformar as linguagens mais específicas umas nas outras, como tabelas em gráficos ou equações. ■ Selecionar diferentes formas para representar um dado ou conjunto de dados e informações, reconhecendo as vantagens e limites de cada uma delas; por exemplo, escolher entre uma equação, uma tabela ou um gráfico para representar uma dada variação ao longo do tempo, como a distribuição do consumo de energia elétrica em uma residência ou a classificação de equipes em um campeonato esportivo.
Análise e interpretação de textos e outras comunicações de ciência e tecnologia	
Consultar, analisar e interpretar textos e comunicações de ciência e tecnologia veiculadas em diferentes meios.	<ul style="list-style-type: none"> ■ Ler e interpretar diferentes tipos de textos com informações apresentadas em linguagem matemática, desde livros didáticos até artigos de conteúdo econômico, social ou cultural, manuais técnicos, contratos comerciais, folhetos com propostas de vendas ou com planta de imóveis, indicações em bulas de medicamentos, artigos de jornais e revistas. ■ Acompanhar e analisar os noticiários e artigos relativos à ciência em diferentes meios de comunicação, como jornais, revistas e televisão, identificando o tema em questão e interpretando, com objetividade, seus significados e implicações para, dessa forma, ter independência para adquirir informações e estar a par do que se passa no mundo em que vive.

Elaboração de comunicações	
Elaborar comunicações orais ou escritas para relatar, analisar e sistematizar eventos, fenômenos, experimentos, questões, entrevistas, visitas, correspondências.	<ul style="list-style-type: none"> ■ Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática, elaborando textos, desenhos, gráficos, tabelas, equações, expressões e escritas numéricas – para comunicar-se via internet, jornais ou outros meios, enviando ou solicitando informações, apresentando ideias, solucionando problemas. ■ Produzir textos analíticos para discutir, sintetizar e sistematizar formas de pensar, fazendo uso, sempre que necessário, da linguagem matemática. Redigir resumos, justificar raciocínios, propor situações-problema, sistematizar as ideias principais sobre dado tema matemático com exemplos e comentários próprios. ■ Expressar-se da forma oral para comunicar ideias, aprendizagens e dificuldades de compreensão; por exemplo, explicando a solução dada a um problema, expondo dúvidas sobre um conteúdo ou procedimento, propondo e debatendo questões de interesse.
Discussão e argumentação de temas de interesse de ciência e tecnologia	
Analisar, argumentar e posicionar-se criticamente em relação a temas de ciência e tecnologia.	<ul style="list-style-type: none"> ■ Compreender e emitir juízos próprios sobre informações relativas à ciência e tecnologia, de forma analítica e crítica, posicionando-se com argumentação clara e consistente sempre que necessário, identificar corretamente o âmbito da questão e buscar fontes onde possa obter novas informações e conhecimentos. Por exemplo, ser capaz de analisar e julgar cálculos efetuados sobre dados econômicos ou sociais, propagandas de vendas a prazo, probabilidades de receber determinado prêmio em sorteios ou loterias, ou ainda apresentadas em um dado problema ou diferentes sínteses e conclusões extraídas a partir de um mesmo texto ou conjunto de informações.

Investigação e compreensão	
Na área	Em Matemática
Estratégias para enfrentamento de situações-problema	
Identificar em dada situação-problema as informações ou variáveis relevantes e elaborar possíveis estratégias para resolvê-la.	<ul style="list-style-type: none"> ■ Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções; por exemplo, em situações com uma diversidade de dados apresentados por meio de tabelas, gráficos, especificações técnicas, reconhecer as informações relevantes para uma dada questão que se busca resolver. ■ Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema; por exemplo, para obter uma dada distância, saber optar por medi-la diretamente, utilizar uma planta em escala, usar semelhança de figuras, fazer uso de propriedades trigonométricas ou utilizar um sistema de eixos cartesianos e abordar o problema através da geometria analítica. ■ Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das formas algébrica, numérica, geométrica, combinatória ou estatística. Por exemplo, para calcular distâncias ou efetuar medições em sólidos, utilizar conceitos e procedimentos de geometria e medidas, enquanto para analisar a relação entre espaço e tempo no movimento de um objeto optar pelo recurso algébrico das funções e suas representações gráficas.

Interações, relações e funções; invariantes e transformações	
Identificar fenômenos naturais ou grandezas em dado domínio do conhecimento científico, estabelecer relações, identificar regularidades, invariantes e transformações.	<ul style="list-style-type: none"> ■ Identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades; por exemplo, perceber que todas as funções do segundo grau possuem o mesmo tipo de gráfico, o que implica propriedades de sinal, crescimento e decrescimento. Da mesma forma, ao identificar a regularidade de que é constante a soma dos termos equidistantes de uma progressão aritmética finita, estender essa propriedade a toda situação envolvendo progressões aritméticas e daí deduzir a soma de seus termos. ■ Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema; por exemplo, estabelecer identidades ou relações como aquelas existentes entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, os volumes de um cilindro e de um cone que tenham a mesma base e a mesma altura, a relação entre catetos e hipotenusa em qualquer triângulo retângulo; ou ainda a identidade fundamental da trigonometria. ■ Identificar transformações entre grandezas ou figuras para relacionar variáveis e dados, fazer quantificações, previsões e identificar desvios. As ampliações e reduções de figuras são exemplos que devem ser entendidos como transformações de uma situação inicial em outra final. ■ Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto, como as relações entre representações planas nos desenhos, mapas e telas de computador com os objetos que lhes deram origem. ■ Reconhecer a conservação contida em toda igualdade, congruência ou equivalência para calcular, resolver ou provar novos fatos. Por exemplo, ao resolver uma equação ou sistema linear, compreender que as operações realizadas a cada etapa transformam a situação inicial em outra que lhe é equivalente, com as mesmas soluções.
Medidas, quantificações, grandezas e escalas	
Selecionar e utilizar instrumentos de medição e de cálculo, representar dados e utilizar escalas, fazer estimativas, elaborar hipóteses e interpretar resultados.	<ul style="list-style-type: none"> ■ Identificar e fazer uso de diferentes formas e instrumentos apropriados para efetuar medidas ou cálculos; por exemplo, discriminar o melhor instrumento para medir, comparar ou calcular comprimentos e distâncias, ângulos, volumes ocupados por líquidos, em dada situação específica. Usar adequadamente réguas, esquadros, transferidores, compassos, calculadoras e outros instrumentos ou aparelhos. ■ Identificar diferentes formas de quantificar dados numéricos para decidir se a resolução de um problema requer cálculo exato, aproximado, probabilístico ou análise de médias. Por exemplo, de acordo com uma dada situação, escolher número de algarismos apropriado ou fazer aproximações adequadas, optar pelo uso de fração, porcentagem, potências de dez; escolher melhor unidade para representar uma grandeza. ■ Fazer previsões e estimativas de ordens de grandeza, de quantidades ou intervalos esperados para os resultados de cálculos ou medições e, com isso, saber avaliar erros ou imprecisões nos dados obtidos na solução de uma dada situação-problema. ■ Compreender a necessidade e fazer uso apropriado de escalas; por exemplo, na construção de gráficos ou em representações de plantas e mapas.
Modelos explicativos e representativos	
Reconhecer, utilizar, interpretar e propor modelos para situações-problema, fenômenos ou sistemas naturais ou tecnológicos.	<ul style="list-style-type: none"> ■ Interpretar, fazer uso e elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações; por exemplo, utilizar funções ou gráficos para modelar situações envolvendo cálculo de lucro máximo ou prejuízo mínimo; utilizar ferramentas de estatística e probabilidade para compreender e avaliar as intenções de votos em uma campanha eleitoral ou, ainda, optar entre modelos algébricos ou geométricos para obter determinadas medições de sólidos.

Relações entre conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e interáreas	
Articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias dentro de uma ciência, entre as várias ciências e áreas do conhecimento.	<ul style="list-style-type: none"> ■ Construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos, para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada. ■ Compreender a Matemática como ciência autônoma, que investiga relações, formas e eventos e desenvolve maneiras próprias de descrever e interpretar o mundo. A forma lógica dedutiva que a Geometria utiliza para interpretar as formas geométricas e deduzir propriedades dessas formas é um exemplo de como a Matemática lê e interpreta o mundo à nossa volta. ■ Adquirir uma compreensão do mundo da qual a Matemática é parte integrante, através dos problemas que ela consegue resolver e dos fenômenos que podem ser descritos por meio de seus modelos e representações. ■ Reconhecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, percebendo sua presença nos mais variados campos de estudo e da vida humana, seja nas demais ciências, como a Física, Química e Biologia, seja nas ciências humanas e sociais, como a Geografia ou a Economia, ou ainda nos mais diversos setores da sociedade, como na agricultura, na saúde, nos transportes e na moradia.

Contextualização sociocultural	
Na área	Em Matemática
Ciência e tecnologia na história	
Compreender o conhecimento científico e o tecnológico como resultados de uma construção humana, inseridos em um processo histórico e social.	<ul style="list-style-type: none"> ■ Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas. Por exemplo, o uso da geometria clássica ou da analítica para resolver um mesmo problema pode mostrar duas formas distintas de pensar e representar realidades comparáveis em momentos históricos diferentes. ■ Compreender o desenvolvimento histórico da tecnologia associada a campos diversos da Matemática, reconhecendo sua presença e implicações no mundo cotidiano, nas relações sociais de cada época, nas transformações e na criação de novas necessidades, nas condições de vida. Por exemplo, ao se perceber a origem do uso dos logaritmos ou das razões trigonométricas como resultado do avanço tecnológico do período das grandes navegações do século XVI, pode-se conceber a Matemática como instrumento para a solução de problemas práticos e que se desenvolve para muito além deles, ganhando a dimensão de ideias gerais para novas aplicações fora do contexto que deu origem a elas. ■ Perceber o papel desempenhado pelo conhecimento matemático no desenvolvimento da tecnologia e a complexa relação entre ciência e tecnologia ao longo da história. A exigência de rapidez e complexidade dos cálculos fez com que a Matemática se desenvolvesse e, por outro lado, as pesquisas e avanços teóricos da Matemática e demais ciências permitiram o aperfeiçoamento de máquinas como o computador, que vêm tornando os cálculos cada vez mais rápidos.

Ciência e tecnologia na cultura contemporânea	
Compreender a ciência e a tecnologia como partes integrantes da cultura humana contemporânea.	<ul style="list-style-type: none"> ■ Compreender a Matemática como parte integrante da cultura contemporânea, sendo capaz de identificar sua presença nas manifestações artísticas ou literárias, teatrais ou musicais, nas construções arquitetônicas ou na publicidade. ■ Perceber a dimensão da Matemática e da ciência em espaços específicos de difusão e mostras culturais, como museus científicos ou tecnológicos, planetários, exposições. ■ Compreender formas pelas quais a Matemática influencia nossa interpretação do mundo atual, condicionando formas de pensar e interagir. Por exemplo, comparando os cálculos feitos pelas máquinas com aqueles feitos “com lápis e papel”, e identificando a função, especificidades e valores de cada um desses meios na construção do conhecimento.
Ciência e tecnologia na atualidade	
Reconhecer e avaliar o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, suas relações com as ciências, seu papel na vida humana, sua presença no mundo cotidiano e seus impactos na vida social.	<ul style="list-style-type: none"> ■ Acompanhar criticamente o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, tomando contato com os avanços das novas tecnologias nas diferentes áreas do conhecimento para se posicionar frente às questões de nossa atualidade. Utilizar o conhecimento matemático como apoio para compreender e julgar as aplicações tecnológicas dos diferentes campos científicos. Por exemplo, o uso de satélites e radares nos rastreamentos e localizações, ou dos diferentes tipos de transmissão e detecção de informações, as formas de manipulação genética ou de obtenção e utilização de recursos naturais.
Ciência e tecnologia, ética e cidadania	
Reconhecer e avaliar o caráter ético do conhecimento científico e tecnológico e utilizar esse conhecimento no exercício da cidadania.	<ul style="list-style-type: none"> ■ Compreender a responsabilidade social associada à aquisição e uso do conhecimento matemático, sentindo-se mobilizado para diferentes ações, seja em defesa de seus direitos como consumidor, dos espaços e equipamentos coletivos ou da qualidade de vida. ■ Conhecer recursos, instrumentos e procedimentos econômicos e sociais para posicionar-se, argumentar e julgar sobre questões de interesse da comunidade, como problemas de abastecimento, educação, saúde e lazer, percebendo que podem ser muitas vezes quantificados e descritos através do instrumental da Matemática e dos procedimentos da ciência. ■ Promover situações que contribuam para a melhoria das condições de vida da cidade onde vive ou da preservação responsável do ambiente. Utilizar as ferramentas matemáticas para analisar situações de seu entorno real e propor soluções, por exemplo, analisando as dificuldades de transporte coletivo em seu bairro por meio de levantamento estatístico, manuais técnicos de aparelhos e equipamentos, ou a melhor forma de plantio da lavoura para subsistência de uma comunidade.

Fonte: BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN*). *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC (SEB), 2002. p. 111-119.

Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>.

Acesso em: 21 jan. 2014.

Avaliação

A avaliação é um conjunto de ações organizadas com a finalidade de obter informações sobre o que foi assimilado pelo estudante, de que forma e em quais condições. Para tanto, é preciso elaborar um conjunto de procedimentos investigativos que possibilitem o ajuste e a orientação adequada. A avaliação deve funcionar, por um lado, como um instrumento que possibilite ao avaliador analisar criticamente a sua prática; e, por outro, como instrumento que apresente ao avaliado a possibilidade de saber sobre seus avanços, dificuldades e possibilidades.

CAMPOS, Fernanda C. A. V.; SANTORO, Flávia M.; BORGES, Marcos R. S. A.; SANTOS, Neide. *Cooperação e aprendizagem on-line*. Coleção Educação a Distância. Rio de Janeiro: DP&A, 2003.

É bastante consensual a ideia de que o processo avaliativo tem o papel de indicar a toda a comunidade escolar (alunos, professores, coordenadores, diretores e pais) o andamento do processo de ensino e de aprendizagem e, dessa forma, apontar caminhos que viabilizem aprendizagens cada vez mais significativas e que contribuam para o crescimento dos alunos.

Aos professores, coordenadores e diretores, o processo de avaliação deve fornecer parâmetros para reflexão sobre as práticas pedagógicas da escola, sobre as metodologias usadas nas aulas, bem como sobre os recursos e materiais didáticos utilizados. Os próprios instrumentos de avaliação devem ser continuamente repensados.

Desse modo, é necessário que os professores promovam, sempre que necessário, alterações nos seus planejamentos, redimensionando os objetivos a serem alcançados. Os resultados da avaliação também devem orientar a escola, como um todo, nos processos de recuperação.

Aos alunos, a avaliação tem a função de permitir que eles verifiquem sua evolução e crescimento, seus erros, suas dificuldades, o que aprenderam, como a reflexão deverá ser capaz de mobilizá-los para compreender e corrigir eventuais erros, retomar e recuperar conceitos, promover maior envolvimento nas discussões em sala de aula, bem como no cumprimento de tarefas.

Aos pais, o processo de avaliação deve fornecer subsídios para que eles acompanhem o processo de aprendizagem de seus filhos, verificando se as práticas pedagógicas na escola estão condizentes com o seu plano político e se elas possibilitam, de fato, a consecução dos objetivos da escola, no que diz respeito tanto à sua missão formativa de cidadãos preparados para enfrentar os desafios da vida e do mercado de trabalho, como também de sua missão informativa, de estabelecer com os alunos a ponte para os conhecimentos socialmente construídos.

Para que o processo de avaliação seja capaz de fornecer todos esses subsídios à comunidade escolar, é imprescindível que ele se apoie em uma grande diversidade de instrumentos avaliativos, intencionalmente pensados e preparados pelos professores, com participação da coordenação. Além disso, faz-se necessário que a avaliação seja contínua e possa acompanhar o dia a dia escolar dos alunos, suas dificuldades e conquistas. Desse modo, o processo avaliativo não pode se resumir a provas pontuais, realizadas periodicamente (mês, bimestre ou trimestre), nas quais a nota cria uma perigosa classificação dos alunos, rotulados pelo seu “sucesso” ou “fracasso” que, em última instância, pode culminar em aprovação ou retenção.

■ O que avaliamos

Numa concepção de aprendizagem mais ampla, podemos pensar em três dimensões do saber: o saber conceitual, o saber procedimental e o saber atitudinal, como sugere Antoni Zabala, em seu livro *A prática educativa – Como ensinar* (Artmed, 1988).

Esses três novos conteúdos (o termo “conteúdo” aqui está sendo usado não apenas para referir-se às disciplinas tradicionais, mas abrange, nessa concepção, outras capacidades, como as relações interpessoais e a inserção social) correspondem, respectivamente, a três questões: o que devemos saber, como devemos fazer e como devemos ser (ou conviver socialmente).

Se tivermos em mente essa três dimensões do saber, poderemos fazer com que o processo avaliativo seja mais amplo, justo e benéfico para o aluno.

A dimensão conceitual (o que devemos saber)

Conteúdos conceituais constituem o conjunto de conceitos e definições relacionadas aos saberes. Para aprender esses conteúdos, os alunos deverão desenvolver competências como compreender, refletir, relacionar, analisar, comparar etc. Se o professor promover, exclusivamente, aulas expositivas e se as atividades avaliativas exigirem dos alunos apenas memorização de fórmulas e reprodução de exercícios com base em modelos previamente conhecidos, dificilmente conseguirá atingir essa dimensão conceitual.

Veja este exemplo:

- Um botânico mediu, dia a dia, durante cinco dias, a altura de uma pequena planta e relacionou os resultados obtidos na tabela seguinte:

Altura (em cm)	3,0	3,5	4,5	5,0	7,0
Tempo (em dias)	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0

Para expressar matematicamente a relação existente entre a altura (h), em cm, e o tempo (t), em dias, o botânico usou um modelo linear, isto é, $h(t) = at + b$, em que a e b são constantes reais específicas do experimento.

Comente a escolha desse modelo para essa situação.

A escolha do botânico não foi acertada, pois o crescimento da planta, por dia, não é constante, ou ainda, a taxa média de variação da função *não* é constante, pois temos do 1º para o 2º dia: acréscimo de 0,5 cm; do 2º para o 3º dia: acréscimo de 1,0 cm; e assim por diante. Não se trata de um crescimento linear, de modo que a função que relaciona essas duas grandezas *não* é de 1º grau, e o gráfico, portanto, *não* é uma reta.

Vejamos outro exemplo:

- Na feira que eu costumo frequentar, uma barraca vende caldo de cana em dois copos cilíndricos: o menor, de 300 mL, custa R\$ 2,70, e o maior, de 500 mL, custa R\$ 4,00.

Qual é a opção mais vantajosa para o consumidor?

Uma das formas de resolver essa questão é comparar os preços para uma mesma quantidade de caldo de cana; por exemplo, quanto pagarei, em cada caso, por 100 mL?

Copo menor: Se por 300 mL pago R\$ 2,70, então por 100 mL pago um terço desse valor, ou seja, R\$ 0,90.

Copo maior: Se por 500 mL pago R\$ 4,00, então, por 100 mL pago um quinto desse valor, isto é, R\$ 0,80.

Desse modo, é mais vantajoso para o consumidor escolher o copo grande. Observe que, nesse problema, usamos o conceito de proporcionalidade.

A dimensão procedimental (como devemos fazer)

Conteúdos procedimentais, na concepção de Antoni Zabala, é um conjunto de ações ordenadas e com um fim, quer dizer, dirigidas para a realização de um objetivo. Envolve *aquilo que se aprende a fazer fazendo*.

Por exemplo, fazer uma lista de exercícios em que se pede que se resolvam equações exponenciais é um exercício que mobiliza um conteúdo procedimental. Isso inclui também os chamados *exercícios de fixação*, comuns na Matemática. Cabem, no entanto, duas ressalvas importantes (além da dosagem adequada desse tipo de atividade):

- 1º) É imprescindível que o aluno possua uma correta conceitualização do objeto de estudo ao qual se refere tal mecanização.

Por exemplo, não é raro encontrar alunos que, em um esforço grande para memorizar o desenvolvimento dos produtos notáveis, acabam esquecendo que se trata apenas de efetuar multiplicações para a determinação desse resultado.

Outro exemplo, que se encontra no livro *Fundamentos da didática da Matemática* (de Saddy Ag. Almouloud, Editora UFPR) é o estudo feito pelo matemático francês Bodin (1989) e seu núcleo de pesquisa. Eles perceberam que alunos, ao acertarem a questão (resolva a equação $7x - 3 = 13x + 15$), não foram capazes de responder à seguinte pergunta: “O número 10 é uma solução da equação $7x - 3 = 13x + 15$?”.

O professor deve, portanto, ficar atento ao fato de que instrumentos de avaliação centralizados unicamente na dimensão procedimental podem favorecer automatismos e, desse modo, se transformar em obstáculos para a compreensão dos conceitos.

- 2º) É imprescindível que se criem momentos em que o aluno possa usar tais procedimentos para resolver problemas e situações mais complexos, sempre que possível, contextualizados com vivências do seu dia a dia ou aplicados a outras áreas do conhecimento. Aproveitando o exemplo da equação exponencial, é preciso saber resolvê-la também para enfrentar problemas mais complexos, como o de meia-vida de um isótopo radioativo ou a datação de um material orgânico por carbono-14.

Voltando ao exemplo do caldo de cana vendido na feira, se modificarmos um pouco o enunciado (forneendo a informação de que os copos são cilíndricos, bem como as dimensões – medida do raio e da altura – desses cilindros), estaremos mobilizando também um conteúdo procedimental – o cálculo do volume do cilindro – para resolver o problema.

A dimensão atitudinal

Conteúdos atitudinais são aqueles que se referem à inserção social do aluno e ao exercício da cidadania. [...] *uma avaliação de estudantes deve considerar dois aspectos importantes, a saber:*

- a avaliação quantitativa do desempenho dos alunos [...]
- a avaliação qualitativa, que é um processo de avaliação contínuo relacionado ao processo educativo, como atitude do aluno, sua participação em tarefas propostas, seu interesse, seu espírito crítico, sua autonomia intelectual e seus níveis de cooperação com colegas.

CAMPOS, Fernanda C. A. V.; SANTORO, Flávia M.; BORGES, Marcos R. S. A.; SANTOS, Neide. *Cooperação e aprendizagem on-line*. Coleção Educação a Distância. Rio de Janeiro: DP&A, 2003.

Não é tarefa simples para o professor avaliar o grau de aprendizagem do aluno, na medida em que se misturam componentes cognitivos, afetivos e de conduta. No entanto, se o professor permitir que as aulas sejam o

espaço em que se debatam ideias, em que haja oportunidades para cada aluno expressar sua opinião pessoal, em que se coloquem, de maneira proposital, situações complexas que obriguem o aluno a questionar, refletir, ouvir os colegas etc., ele terá mais possibilidades de analisar os avanços de cada aluno, observando como este se comporta em debates, seminários, atividades em grupo, estudos de campo, comemorações escolares, jogos, entre outras situações.

Quando um professor propõe atividades em grupo, devidamente organizadas, ele mobiliza os alunos a vivenciar valores como respeito, responsabilidade, cooperação e honestidade, praticando um exercício de alteridade.

Cada vez mais o mercado de trabalho procura profissionais que saibam trabalhar em equipe e sejam imbuídos desses valores.

Nesta obra, na parte específica do Manual do Professor de cada volume, são propostas atividades em grupo. As três dimensões do saber são colocadas em jogo nessas atividades: a conceitual, a procedimental e a atitudinal. Bem conduzidas, essas atividades podem fornecer elementos para o professor avaliar os seus alunos de maneira mais justa e ampla. Desse modo, cabe ao professor avaliar a produção e o empenho das equipes, a correta aplicação dos conceitos e das técnicas procedimentais. Mas não é só isso. O professor deve dirigir seu olhar também às atitudes dos alunos. Esse compromisso de formar para a vida não pode ser negligenciado por nós, educadores.

■ Instrumentos de avaliação

A comunicação escrita dos alunos

É importante que o registro que o aluno produz durante todo o ano letivo contemple, entre outros:

- as anotações diárias das aulas no caderno, acompanhadas de observações que ele próprio produz a partir das discussões ocorridas em aula, durante a construção dos conceitos que estão sendo formados;
- exemplos, exercícios resolvidos em sala de aula, exercícios feitos como tarefas de casa;
- fichas de resumo, que podem ser construídas com a participação do professor e que têm a função de ajudar o aluno na seleção e organização dos assuntos mais relevantes;
- outra possibilidade de construção de um material do aluno são os relatórios que ele pode produzir a partir de uma proposta de aula com leitura prévia. Trata-se de antecipar um determinado tema (ou apenas um recorte dele) que será apresentado e discutido na aula seguinte. O professor solicita aos alunos, com a devida antecedência, que façam uma leitura no livro didático, ou pesquisem em alguma

outra fonte, sobre certo tema. Então, para a data combinada, os alunos tentam produzir, com suas palavras, um pequeno relatório sobre o que entenderam em relação à leitura feita, ainda que tal compreensão tenha sido parcial. Acreditamos que esse tipo de estratégia possa contribuir para a autonomia intelectual do aluno, favorecendo habilidades importantes como leitura, interpretação e comunicação matemática escrita.

Se essa atividade ou alguma outra similar (o professor pode pedir um relatório ao final de um determinado capítulo ou assunto) for feita com alguma frequência durante o ano escolar, cada aluno terá construído um portfólio próprio, no qual comunica, por escrito, ideias matemáticas. Esse portfólio permite, ao professor (e também ao aluno), acompanhar a evolução e o crescimento do aluno por meio do modo como este se comunica na linguagem matemática.

Provas

As provas devem ser encaradas como mais uma possibilidade de avaliação e não podem transformar-se em um momento de acerto de contas do professor com a turma em relação a indisciplina, desinteresse pelas aulas ou falta de estudo.

Tampouco as provas devem ser aplicadas sem o conhecimento prévio dos alunos – as chamadas provas-surpresa –, pois, nesse caso, não são oferecidas condições para os alunos se prepararem, estudando em casa, tirando dúvidas etc. Outro ponto importante a se destacar é que as provas – sejam elas na forma de questões de múltipla escolha ou questões dissertativas (abertas) – devem ser coerentes com aquilo que foi trabalhado nas aulas e devem explicitar, ao professor e aos alunos, os objetivos de aprendizagem que se pretendem alcançar.

Autoavaliação

É importante que o professor ouça os alunos sobre o modo pelo qual eles se relacionam com a Matemática, como estudam, como relacionam a Matemática ao seu cotidiano, quais são as dificuldades que enfrentam no processo de aprendizagem, quais avanços conseguem identificar, tanto no aspecto informativo como no formativo, entre outros.

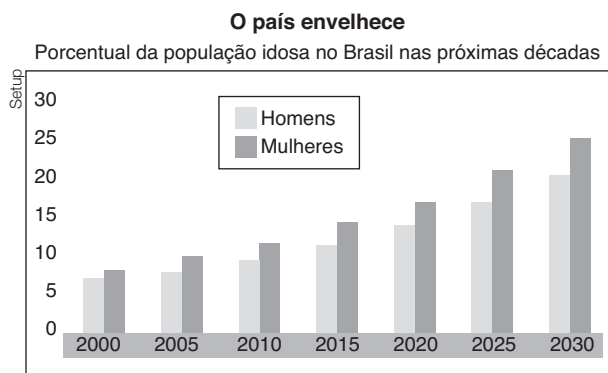
Se os alunos tiverem a oportunidade de manifestar suas necessidades, dificuldades, avanços, anseios, formas de aprender e estudar, maiores serão as possibilidades de o professor (e a escola, em geral) encontrar caminhos para enfrentar os problemas e fazer seus alunos avançarem.

Nesse contexto, se a autoavaliação for bem conduzida, o aluno pode passar a refletir sobre seu próprio processo de aprendizagem.

A comunicação oral dos alunos

O ato de comunicar oralmente ideias matemáticas pode ocorrer em atividades como apresentação de trabalhos e seminários organizados pelos alunos. Vejamos um problema que envolve esse aspecto.

Você precisa relatar uma situação descrita pelo gráfico seguinte a uma pessoa que não dispõe dele no momento.



Fonte: Ipea. Extraído de: *CartaCapital*, 15 abr. 2009.

Naturalmente, o aluno deverá ser capaz de identificar e relatar do que trata o gráfico, quais são as grandezas associadas, que tendência se evidencia, quais as semelhanças e diferenças entre as estimativas para homens e para mulheres etc.

Tratando-se de representações gráficas, atividades similares a essa podem ser realizadas no estudo da Estatística Descritiva e também no estudo introdutório das funções, no que diz respeito a leitura e interpretação de gráficos (em geral, gráficos em que uma das grandezas é o tempo são adequados para o estudo das funções).

Outro assunto que favorece atividades em que os alunos são convidados a expressar-se oralmente é a Geometria, na descrição e comparação de figuras. Veja um exemplo:

- Experimente mostrar aos alunos, no início do estudo dos poliedros, um prisma e uma pirâmide e peça a eles que descrevam verbalmente esses sólidos, estabelecendo semelhanças (entre outras, eles devem apontar que ambos os sólidos são formados por polígonos) e diferenças (entre outras, a pirâmide tem uma só base e o prisma tem duas bases congruentes). Outra possibilidade é levar para a sala de aula (ou projetar imagens de) prismas retos e oblíquos e pedir à turma que descreva, oralmente, a diferença entre eles. Depois de estudados os conceitos, a classificação, os elementos etc., refaça a atividade e veja o quanto a comunicação oral do aluno, na caracterização desses sólidos, avançou.

Em relação aos seminários, uma das possibilidades é que o professor explore os textos da seção *Aplicações*, que constam nos três volumes de nossa coleção, e convide os alunos a preparar seminários, produzir novos materiais e participar de discussões com a turma. Essa atividade deve mobilizar os alunos a fazer outras pesquisas, aprofundando e ampliando os contextos dos assuntos que são abordados.

Outra possibilidade interessante é a proposta de uma aula preparada por um grupo de alunos aos demais alunos da turma. O professor deve selecionar alguns recortes do conteúdo para serem pesquisados e estudados pelos alunos. Os temas escolhidos pelo professor devem ser compatíveis com os conhecimentos dos alunos e, de modo geral, não muito complexos. Na data estabelecida, cada equipe apresenta sua aula ao resto da classe. É fundamental que o professor esteja disponível para esclarecer dúvidas e trocar ideias e sugestões com as equipes no período de preparação dos trabalhos.

Esse tipo de atividade promove a autonomia dos alunos, valoriza a leitura e a pesquisa, a comunicação oral e o trabalho em equipe.

Para exemplificar, no estudo de áreas das figuras planas, o professor pode distribuir as áreas de várias figuras (triângulos, quadriláteros, círculo e suas partes) às equipes e pedir a cada uma delas que prepare uma aula com a dedução das fórmulas, exemplos e exercícios. Essa atividade pode se transformar em um valioso instrumento de avaliação e dinamização das aulas.

Atividade em grupo

Conforme já mencionado anteriormente, as atividades em grupo podem mobilizar as três dimensões dos conteúdos: conceitual, procedimental e atitudinal. Na parte específica do Manual do Professor de cada volume são propostas atividades em grupo. Quando possível, o professor deve propor uma atividade a partir de alguma matéria publicada em jornal, revista, internet etc. Acreditamos que o recurso de usar reportagens veiculadas na mídia pode ser bastante motivador para o aluno.

Veja este exemplo:

- Cálculo do Imposto Predial e Territorial Urbano (IPTU)/2013 – Cidade de São Paulo
Desde 2001, as alíquotas de IPTU são progressivas, para que imóveis mais caros paguem um percentual maior. Observe a tabela a seguir, referente aos imóveis residenciais.

Tabela 1. Valores para o cálculo do IPTU aplicado a imóveis residenciais*.

Faixas de valor venal	Multiplicar por	Dedução
Até R\$ 81 762,00	0,008	R\$ 0,00
Acima de R\$ 81 762,00 até R\$ 163 525,00	0,010	R\$ 163,52
Acima de R\$ 163 525,00 até R\$ 327 050,00	0,012	R\$ 490,57
Acima de R\$ 327 050,00 até R\$ 654 100,00	0,014	R\$ 1 144,67
Acima de R\$ 654 100,00	0,016	R\$ 2 452,87

Fonte: Prefeitura de São Paulo. Disponível em: <www.prefeitura.sp.gov.br>. Acesso em: 21 jan. 2014.

*Para imóveis de padrão A, B ou C, dos tipos 1 ou 2 da Tabela V anexa à Lei 10.235/1986, com valor venal maior que R\$ 97 587,00 e igual ou menor que R\$ 195 175,00, deduzir R\$ 39 035,00 antes da multiplicação (desconto no valor venal).

Exemplo: Apartamento residencial com valor venal de R\$ 180 mil, dentro das especificações mencionadas anteriormente*.

1º) Desconto: $R\$ 180\,000,00 - R\$ 39\,035,00 = R\$ 140\,965,00$;

2º) Multiplicar pelo fator da tabela correspondente à faixa de valor venal do imóvel:
 $0,012 \times R\$ 140\,965,00 = R\$ 1\,691,58$

3º) Dedução final:
 $R\$ 1\,691,58 - R\$ 490,57 = \underbrace{R\$ 1\,201,01}_{\text{valor do IPTU}}$

Várias questões, discussões e inclusive pesquisas podem ser exploradas:

- 1) O que é IPTU?
- 2) Calcular o valor do IPTU para imóveis com valores diversos, preferencialmente cobrindo todas as faixas.
- 3) Se um imóvel tem valor venal de R\$ 163 mil e outro tem valor venal de R\$ 164 mil, eles estão sujeitos a alíquotas diferentes, embora tenham valores muito próximos. Como essa diferença nas alíquotas é corrigida no cálculo final do IPTU?
- 4) Na tabela constam instruções do tipo: “multiplicar por 0,008; ou por 0,010; ou por 0,012 etc.”. Qual é a relação existente entre essa instrução e as alíquotas (porcentagem) do imposto?
- 5) Valor venal e valor de mercado são sinônimos?
- 6) Qual é a lei da função que relaciona o valor do IPTU (y) e o valor venal do imóvel (x)? Que tipo de função é essa? (função definida por várias sentenças)
- 7) Revisão de cálculo de porcentagens etc.

Resolução de problemas

É fundamental que seja trabalhada em aula uma grande diversidade de problemas (inclusive aqueles sem solução ou que admitem mais de uma resposta), mobilizando todas as quatro etapas desse processo, segundo G. Polya, em *A arte de resolver problemas* (1978):

- compreender o problema;
- estabelecer um plano, relacionando os dados;
- executar o plano;
- fazer um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a.

Na avaliação da resolução de problemas, é importante que o professor leve em consideração a evolução dos alunos no processo (para isso é fundamental que essa atividade esteja incorporada à prática do professor; ela não pode ser uma atividade esporádica) e a criatividade na busca de soluções, valorizando (e socializando) as várias possibilidades de resolver um problema, analisando todos os passos da resolução (e não apenas a resposta final), incentivando e encorajando os alunos.

Referências bibliográficas sobre avaliação

- BALLESTER, Margarita et al. *Avaliação como apoio à aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed, 2003. Coleção Inovação Pedagógica.
- HADJI, Charles. *Avaliação desmistificada*. São Paulo: Artmed, 2005.
- LUCKESI, Cipriano C. *Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições*. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2011.
- MACHADO, Nilson J. *Educação: competência e qualidade*. São Paulo: Escrituras, 2009. Coleção Ensaios Transversais.
- MÉNDEZ, Juan M. Á. *Avaliar para conhecer, examinar para excluir*. Porto Alegre: Artmed, 2002. Coleção Inovação Pedagógica.
- MORETTO, Vasco P. *Prova: um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas*. 8. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.
- PAVANELLO, Regina M.; Nogueira, Clélia C. M. *Avaliação em Matemática: algumas considerações*. Estudos em Avaliação Educacional, v. 17, n. 33, jan./abr. 2006.
- PERRENOUD, Philippe. *Avaliação: entre duas lógicas*. Porto Alegre: Artmed, 1999.
- . Sobre a ideia de competência. In: PERRENOUD, Philippe et al. *As competências para ensinar no século XXI: a formação de professores e o desafio da avaliação*. São Paulo: Artmed, 2002.
- PERRENOUD, P. et al. *As competências para ensinar no século XXI: a formação de professores e o desafio da avaliação*. São Paulo: Artmed, 2002.

VALENTE, Wagner R. *Avaliação em Matemática: história e perspectivas atuais*. Campinas: Papirus, 2008.

ZABALA, Antoni. *A prática educativa: como ensinar*. São Paulo: Artmed, 1998.

■ Texto para estudo e reflexão

Avaliar com eficácia e eficiência

Avaliar a aprendizagem tem sido um tema angustiante para professores e estressante para alunos. Nas conversas com professores, orientadores e diretores, o assunto avaliação é sempre lembrado com um suspiro de desânimo e uma frase eloquente: “Esse é o problema! Aí está o nó!”.

Muito se tem escrito e falado sobre a avaliação da aprendizagem. As dúvidas continuam, os pontos de vista se multiplicam e as experiências se diversificam. O sistema escolar gira em torno desse processo e tanto professores como alunos se organizam em função dele. Por isso a verdade apresentada é: professores e pesquisadores precisamos estudar mais, debater com profundidade e conceituar com segurança o papel da avaliação no processo da aprendizagem.

A avaliação da aprendizagem é angustiante para muitos professores por não saber como transformá-la num processo que não seja uma mera cobrança de conteúdos aprendidos “de cor”, de forma mecânica e sem muito significado para o aluno. Angústia por ter que usar um instrumento tão valioso no processo educativo, como recurso de repressão, como meio de garantir que uma aula seja levada a termo com certo grau de interesse. Sentenças como ‘anotem, pois vai cair na prova’, ‘prestem atenção nesse assunto porque semana que vem tem prova’, ‘se não ficarem calados vou fazer uma prova-surpresa’, ‘já que vocês não param de falar, considero matéria dada e vai cair na prova’, e outras que se equivalem, são indicadores da maneira repressiva que tem sido utilizada na avaliação da aprendizagem.

Se para o professor esse processo gera ansiedade, podemos imaginar o que representa para os alunos. ‘Hora do acerto de contas’, ‘A hora da verdade’, ‘A hora de dizer ao professor o que ele quer que eu saiba’, ‘A hora da tortura’, são algumas dentre as muitas representações em voga entre os alunos. Enquanto não há prova ‘marcada’ muitos alunos encontram um alibi para não estudar. E se por acaso o professor anunciar que a matéria dada não irá cair na prova... então para que estudar?, perguntarão os alunos.

Para grande parte dos pais, a prova também não cumpre seu real papel. Se a nota foi razoável ou ótima,

os pais dão-se por satisfeitos, pois pressupõem que a nota traduz a aprendizagem correspondente, o que nem sempre é verdade. E os alunos sabem disso. Se a nota foi de aprovação, o aluno a apresenta como um troféu pelo qual ‘deve receber a recompensa’: saídas autorizadas, aumento de mesada, passeios extras etc. Lembrar que o dever foi cumprido... ah! Isso nem vem ao caso.

Diante de tal diagnóstico, a avaliação precisa ser analisada sob novos parâmetros e tem de assumir outro papel no processo da intervenção pedagógica, em consequência da redefinição dos processos de ensino e de aprendizagem.

A avaliação é parte integrante do ensino e da aprendizagem. O ensinar, um dia, já foi concebido como transmitir conhecimentos prontos e acabados, conjunto de verdades a serem recebidas pelo aluno, gravadas e devolvidas na hora da prova. Nessa visão de ensino, o aprender tem sido visto como gravar informações transcritas para um caderno (cultura cadernal) para devolvê-las da forma mais fiel possível ao professor na hora da prova. Expressões como ‘o que será que o professor quer com essa questão?’, ‘professor, a questão sete não estava no caderno de ninguém, o senhor tem que anular’, ‘professora, dá para explicar o que a senhora quer com a questão 3?’, ‘professor, eu decorei todo o questionário que o senhor deu e na prova o senhor perguntou tudo diferente’ são indicadores de que a preocupação dos alunos é satisfazer os professores, é tentar responder tudo o que o professor quer para, com isso, obter nota.

Nesta visão, que classificamos de tradicional por ainda ser, a nosso ver, a que domina o processo de ensino nos dias de hoje, a avaliação de aprendizagem é encarada como um processo de ‘toma lá dá cá’, em que o aluno deve devolver ao professor o que dele recebeu e de preferência exatamente como recebeu, o que Paulo Freire chamou educação bancária. Nesse caso não cabe criatividade nem interpretação. A relação professor-aluno vista dessa forma é identificada como uma forma de dominação, de autoritarismo do professor e de submissão do aluno, sendo por isso uma relação perniciosa na formação para a cidadania.

A perspectiva construtivista sociointeracionista propõe uma nova relação entre o professor, o aluno e o conhecimento. Ela parte do princípio de que o aluno não é um simples acumulador de informações, ou seja, um mero receptor-repetidor. Ele é o construtor do próprio conhecimento. Essa construção se dá com a mediação do professor, numa ação do aluno que estabelece a relação entre suas concepções prévias e o objeto de conhecimento proposto pela escola. Assim, fica claro que a construção do conhecimento é um processo interior do sujeito da aprendizagem, estimulado

por condições exteriores criadas pelo professor. Por isso dizemos que cabe a este o papel de catalisador do processo da aprendizagem. Catalisar/mediar/facilitar são palavras que indicam o novo papel do docente no processo de interação com o aluno, como vimos em capítulos anteriores.

Prova: um momento privilegiado de estudo

Avaliar aprendizagem tem um sentido amplo. A avaliação é feita de formas diversas, com instrumentos variados, sendo o mais comum deles, em nossa cultura, a prova escrita. Por esse motivo, em lugar de apregoarmos os malefícios da prova e levantarmos a bandeira de uma avaliação sem provas, procuramos seguir o princípio: se tivermos que elaborar provas, que sejam benfeitas, atingindo seu real objetivo, que é verificar se houve aprendizagem significativa de conteúdos relevantes.

É preciso ressaltar, no entanto, que a avaliação da aprendizagem precisa ser coerente com a forma de ensinar. Se a abordagem no ensino foi dentro dos princípios da construção do conhecimento, a avaliação da aprendizagem seguirá a mesma orientação. Nessa linha de pensamento, propomos alguns princípios que sustentam nossa concepção de avaliação da aprendizagem:

- A aprendizagem é um processo interior ao aluno, ao qual temos acesso por meio de indicadores externos.
- Os indicadores (palavras, gestos, figuras, textos) são interpretados pelo professor e nem sempre a interpretação corresponde fielmente ao que o aluno pensa.
- O conhecimento é um conjunto de relações estabelecidas entre os componentes de um universo simbólico.
- O conhecimento construído significativamente é estável e estruturado.
- O conhecimento adquirido mecanicamente é instável e isolado.
- A avaliação da aprendizagem é um momento privilegiado de estudo e não um acerto de contas.

[...]

MORETTO, Vasco P. Prova: um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas. 8. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

Bibliografia

Hoje, para coordenar um curso de Matemática rico e aberto, o professor precisa conhecer a Matemática além do seu programa curricular: deve ter acesso a informações sobre a história da descoberta matemá-

tica, estar sintonizado com tendências da Educação Matemática, conhecer curiosidades e divertimentos lógico-matemáticos, dispor de livros paradidáticos para aprofundamento, conhecer e usar recursos tecnológicos em sala de aula como forma de diversificar estratégias de aprendizagem etc.

Pensando nisso, tomamos a liberdade de sugerir alguns livros, revistas e sites que podem contribuir para a melhor formação dos colegas.

■ **Livros para aprofundamento em Matemática**

- **Coleção Matemática:** aprendendo e ensinando, de vários autores. São Paulo: Atual/Mir, 1995.

Coleção composta por traduções de coleção russa publicada pela editora Mir e complementada por livros de autores nacionais. Cada volume aborda um tema de Matemática em linguagem bem acessível. Até o momento foram publicados os seguintes volumes:

- *Sistemas de numeração*
- *A demonstração em Geometria*
- *Curvas notáveis*
- *Figuras equivalentes e equicompostas*
- *Método da indução matemática*
- *Erros nas demonstrações geométricas*
- *Equações algébricas de grau qualquer*
- *Álgebra booleana*
- *Atividades em Geometria*
- *Construindo gráficos*

- **Fundamentos de Matemática Elementar**, de Gelson Iezzi e Carlos Murakami. São Paulo: Atual, 2013. v. 1. Aborda os conjuntos numéricos, a noção de função e o estudo de algumas das funções elementares.
- **Fundamentos de Matemática Elementar**, de Gelson Iezzi e Carlos Murakami. São Paulo: Atual, 2013. v. 2. Sintetiza o assunto potências e o estudo das funções exponencial e logarítmica.
- **Fundamentos de Matemática Elementar**, de Gelson Iezzi. São Paulo: Atual, 2013. v. 3. Estudo completo das funções circulares, das relações entre elas, das transformações, das equações e inequações trigonométricas, das funções circulares inversas e da trigonometria nos triângulos.
- **Fundamentos de Matemática Elementar**, de Gelson Iezzi e Samuel Hazzan. São Paulo: Atual, 2013. v. 4. Trata do estudo de progressões, de matrizes, de determinantes e de sistemas lineares.
- **Fundamentos de Matemática Elementar**, de Samuel Hazzan. São Paulo: Atual, 2013. v. 5. Estuda problemas de contagem e o binômio de Newton e faz um estudo completo sobre probabilidades.

- *Fundamentos de Matemática Elementar*, de Gelson Iezzi. São Paulo: Atual, 2013. v. 6.
São estudados os números complexos, os polinômios e as equações polinomiais.
 - *Fundamentos de Matemática Elementar*, de Gelson Iezzi. São Paulo: Atual, 2013. v. 7.
Aborda o estudo analítico das retas, das circunferências e das cônicas.
 - *Fundamentos de Matemática Elementar*, de Gelson Iezzi, Carlos Murakami e Nilson José Machado. São Paulo: Atual, 2013. v. 8.
Uma abordagem simplificada de limites, de derivadas e funções de uma variável, das aplicações de derivadas e de uma introdução à noção de integral definida.
 - *Fundamentos de Matemática Elementar*, de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo. São Paulo: Atual, 2013. v. 9.
Trata da geometria plana usualmente trabalhada na escola fundamental. Seu texto é bastante rigoroso e as séries de exercícios chegam a nível bem profundo.
 - *Fundamentos de Matemática Elementar*, de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo. São Paulo: Atual, 2013. v. 10.
Faz um estudo da geometria espacial: paralelismo e perpendicularidade de retas e planos, diedros, triedros, ângulos poliedricos, poliedros, corpos redondos, inscrição e circunscrição de sólidos.
 - *Fundamentos de Matemática Elementar*, de Gelson Iezzi, Samuel Hazzan e David Mauro Degenszajn. São Paulo: Atual, 2013. v. 11.
Estudam-se matemática comercial, matemática financeira e estatística descritiva.
 - *A Matemática no Ensino Médio*, de Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César de Oliveira Morgado. Coleção do professor de Matemática. v. 1-4. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1996.
Nos volumes de 1 a 3 são apresentados, de modo aprofundado, os principais tópicos dos programas da Matemática do Ensino Médio; no volume 4 são apresentadas as soluções de todos os exercícios propostos nos três volumes anteriores.
 - Coleção do professor de Matemática
Trata-se de outra publicação da SBM, de vários autores, que contempla, em cada livro, algum tema da Matemática, por exemplo: análise combinatória e probabilidade, introdução à geometria espacial, trigonometria e números complexos, progressões e matemática financeira, construções geométricas, geometria euclidiana plana, etc.
 - *Matemática Financeira*, de Samuel Hazzan e José Nicolau Pompeo. São Paulo: Saraiva, 2007.
 - *Cálculo*: funções de uma e várias variáveis, de Pedro A. Moretti, Samuel Hazzan e Wilton de O. Bussab. São Paulo: Saraiva, 2003.
 - *Os elementos*, de Euclides. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.
Trata-se da primeira tradução completa para a língua portuguesa do texto grego. A obra da Antiguidade Clássica contém definições, postulados, demonstrações de 465 proposições em forte sequência lógico-dedutiva, referentes à geometria plana e espacial. Há também capítulos destinados à teoria dos números.
 - *Fundamentos da Aritmética*, de Hygino H. Domingues. Florianópolis: UFSC, 2009.
Podemos encontrar na obra a origem da ideia de número, os primeiros sistemas de numeração, o conceito de congruência, a representação decimal dos racionais e irracionais e o corpo dos números complexos. A obra contempla elementos da história da Matemática.
 - *Aleatoriedade*, de Deborah J. Bennet. São Paulo: Martins, 2003.
Apresenta conceitos de probabilidade e estatística, relacionando-os ao mundo real.
- ## ■ Livros sobre História da Matemática
- Coleção Tópicos de História da Matemática – para uso em sala de aula (vários autores). São Paulo: Atual, 1993.
Essa coleção procura dar ao leitor uma visão abrangente da história da descoberta da Matemática. Está dividida em seis volumes:
 - *Números e numerais*
 - *Álgebra*
 - *Geometria*
 - *Trigonometria*
 - *Computação*
 - *Cálculo*
 Em cada volume é abordada a história da criação e desenvolvimento de um grande tema matemático. O volume é dividido em tópicos bastante curtos (de no máximo oito páginas), denominados cápsulas, nos quais é abordado algum assunto ligado ao tema. Assim, por exemplo, no volume sobre Geometria, existe uma cápsula contendo várias demonstrações do teorema de Pitágoras.
 - *História da Matemática*, de Howard Eves. Campinas: Unicamp, 2004.
Uma das mais completas obras na área de história da Matemática. Na introdução de alguns capítulos encontramos um relato do panorama cultural e histórico da época em questão.
 - *A experiência matemática*, de Philip Davis e Reuben Hersh. Lisboa: Gradiva, 1995.

A obra não se resume à história da Matemática: aborda a filosofia, a estética e a pedagogia da Matemática, procurando mostrar a grande diversidade que a experiência com a Matemática apresenta.

- *História da Matemática*, de Carl B. Boyer e Uta C. Merzbach. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

Uma das obras mais consagradas, sendo referência para professores, alunos de graduação e pós-graduação em Matemática. Nesta nova edição, destacamos dois novos capítulos: Legados do Século Vinte e Tendências Recentes, que discorrem, entre outros assuntos, sobre o Último Teorema de Fermat.

- *História em Educação Matemática: propostas e desafios*, de Antônio Miguel e Maria Ângela Miorim. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. Coleção Tendências em Educação Matemática.

A obra aborda a história da Matemática, a história da Educação Matemática e de que maneira elas se relacionam. O próprio conceito de história é discutido na obra.

- *Os números: a história de uma grande invenção*. 11. ed. Rio de Janeiro: Globo, 2005.

Trata da criação dos números e dos sistemas de numeração sob uma abordagem histórica detalhada, passando por várias civilizações.

- *História concisa das matemáticas*, de Dirk J. Struik. 3. ed. Lisboa: Gradiva, 1997.

Na obra, o autor, além de narrar fatos, datas e passagens da vida de matemáticos, procura relacionar o trabalho de cada um deles, relatando descobertas que aconteciam, concomitantemente, em lugares diferentes, privilegiando o caráter cultural da produção do conhecimento em Matemática.

■ Livros sobre ensino-aprendizagem em Matemática

Livros sobre Educação Matemática

- Coleção Explorando o Ensino – Matemática.

Disponível no *site* do MEC (<http://portal.mec.gov.br>). Na página principal, acesse: Publicações → Secretaria de Educação Básica → Ensino Médio. (Acesso em: 9 maio 2013).

Trata-se de uma coletânea de artigos extraídos da *Revista do Professor de Matemática* (RPM), uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) com apoio da Universidade de São Paulo.

Na obra, são apresentadas sugestões de abordagens contextualizadas, o uso de material concreto e uma grande variedade de situações cotidianas em que a Matemática se faz presente. Há artigos envolvendo a história da Matemática, números, Geometria, Ál-

gebra, ensino e crônicas. O professor tem a oportunidade de enriquecer as discussões em sala de aula, envolvendo e mobilizando os alunos nas atividades de resolução de problemas.

São três volumes, envolvendo assuntos geralmente abordados no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

- *A arte de resolver problemas*, de George Polya. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

O livro analisa métodos criativos de resolução de problemas, revela as quatro etapas básicas de uma resolução e sugere estratégias a ser desenvolvidas em sala de aula.

- *Didática da resolução de problemas de Matemática*, de Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 1998.

O livro mostra os objetivos, as etapas e o encaminhamento da resolução de problemas e apresenta os vários tipos de problemas existentes. A obra sugere ainda como propor enunciados e como conduzir os problemas em sala.

- *As seis etapas do processo de aprendizagem em Matemática*, de Zoltan Dienes. São Paulo: EPU, 1986.

- *Da realidade à ação: reflexões sobre Educação e Matemática*, de Ubiratan D'Ambrósio. São Paulo: Summus, 1995.

- *Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua*, de Nilson José Machado. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

Na obra é feita uma análise detalhada sobre a mediação da língua materna (a primeira que aprendemos) no ensino da Matemática, determinando, entre elas, uma relação de impregnação mútua, ao considerar os pontos comuns entre as funções que desempenham e também os pontos complementares nos objetivos que elas perseguem. Em particular, o autor exemplifica essa relação através da estruturação no estudo da geometria.

- *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*, de Ubiratan D'Ambrosio. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. Coleção Tendências em Educação Matemática.

Apresenta e discute a etnomatemática – teoria que concebe o ensino de Matemática levando em conta a realidade sociocultural do aluno, o ambiente em que vive e o conhecimento que traz de casa.

- *Epistemologia e Didática*, de Nilson José Machado. São Paulo: Cortez, 1995.

Nesse trabalho, elabora-se a concepção de inteligência como um espectro de competências e a de conhecimento como uma rede de significados, com suas relações em permanente transformação. A forma de organização do trabalho escolar, as ações docentes em uma perspectiva interdisciplinar, a avaliação e o uso de tecnologias na escola também são discutidos.

- *Fundamentos da didática da Matemática*, de Saddo Ag Almouloud. Curitiba: UFRP, 2007.
Na obra são analisados os fenômenos de ensino e de aprendizagem em Matemática num ambiente didático: um meio social concebido para o ensino.
- *Avaliação e Educação Matemática*, de Regina Luzia Corio de Buriasco. Recife: SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática), 2008.
- *Educação Matemática: da teoria à prática*, de Ubiratan D'Ambrosio. Campinas: Papirus, 1997.
O autor discute inovações na prática docente, propondo reflexões sobre o ensino de Matemática.
- *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo (Org.). São Paulo: Unesp, 1999.
O livro resulta, basicamente, dos trabalhos de reflexão e pesquisa em educação matemática do grupo da Unesp, Rio Claro, SP. Ele está dividido em 5 partes, a saber: Filosofia e Epistemologia na educação matemática; História da Matemática e Educação Matemática; Ensino e Aprendizagem na Educação Matemática; Formação de professores de Matemática e Informática na Educação Matemática.
- *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo e Marcelo de Carvalho Borba (Orgs.). 2. ed. São Paulo: Cortez, 2005.
Esse livro é fruto dos trabalhos de investigação na área da educação matemática desenvolvidos por professores pesquisadores do programa de pós-graduação em Educação Matemática da Unesp, do *campus* de Rio Claro-SP. Divide-se em 16 capítulos, escritos por vários professores, que expõem suas ideias, dúvidas, questionamentos e relatos de experiências na área. São destaques do texto a diversidade de pensamento e da produção matemática em vários contextos socioculturais, a compreensão dessa produção e seu efeito na ação de ensinar.
Em particular, no capítulo "Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas", encontramos um levantamento histórico recente das reformas do ensino da Matemática no mundo e no Brasil e uma reflexão sobre ensinar Matemática através da resolução de problemas.
- *Educação Matemática: uma (nova) introdução*, de Silvia D. A. Machado. 3. ed. São Paulo: Educ, 2008.
Na obra são mencionadas oito noções que, de modo inovador, introduzem o leitor no discurso pedagógico da Matemática.
- *Elementos de didática da Matemática*, de Bruno D'Amore. São Paulo: Livraria da Física, 2010.
A obra analisa várias abordagens da Educação Matemática e as principais propostas do pesquisador para a didática da Matemática.

- *O Ensino da Matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas*, de J. C. Sánchez Huete e J. A. Fernández Bravo. São Paulo: Artmed, 2006.
O livro traz uma reflexão sobre diversos aspectos do ensino e de aprendizagem em Matemática. Alguns capítulos do livro têm relação direta com o sistema educacional espanhol. No entanto, na segunda metade do livro há um tratamento interessante dado à resolução de problemas e à construção do conhecimento em Matemática, incluindo uma explanação sobre os vários pontos de vista para a definição de um problema em Matemática, sob a ótica de diversos educadores e também dos alunos.

■ Sites

- www.mathema.com.br
Nesse *site* você pode encontrar, na seção destinada ao Ensino Médio, textos de reflexão sobre a Matemática no Ensino Médio e suas competências, temas estruturadores do Ensino de Matemática, organização do trabalho escolar e estratégias para favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades.
Há também sugestões de aulas com jogos, uso de recursos tecnológicos, como calculadora e computador, e relatos de vivências pedagógicas.
Em *Mathema recomenda*, há referências bibliográficas de livros, revistas, *sites* etc., acompanhados de comentários das obras. (Acesso em: jan. 2014.)
- www.mat.ibilce.unesp.br/laboratorio
No *site* é possível encontrar ideias de jogos para o ensino da Matemática desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio.
Há uma seção intitulada *Eureka* que é aberta à comunidade geral e discute a resolução de problemas. Complementam o *site* as seções *artigos*, *softwares* e *história da Matemática*. (Acesso em: jan. 2014.)
- www.obmep.org.br
Nesse *site* é possível obter as provas resolvidas das edições anteriores da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Além disso, há um extenso e variado banco de questões, separadas por níveis (nível 1: 6º e 7º anos; nível 2: 8º e 9º anos; e nível 3: Ensino Médio). É uma excelente oportunidade para o professor promover o hábito de resolver problemas na sala de aula. (Acesso em: jan. 2014.)
- www.sbem.com.br
No *site* da Sociedade Brasileira de Educação Matemática existe o calendário atualizado de concursos e eventos da área de pesquisa em educação matemática. Há indicação de eventos regionais, nacionais e até internacionais. Você também tem acesso aos vários grupos de trabalho (GTs) e pesquisa, como o GT3: Educação Matemática no Ensino Médio, GT5: História da Matemática e Cultura e

o GT8: Avaliação em Educação Matemática. Há também espaço para publicações e opção de compra das revistas da série “Educação Matemática em Revista”. (Acesso em: jan. 2014.)

■ www.novaescola.com.br

Nesse *site* são dadas sugestões de aulas e atividades diferenciadas na seção *Planos de aula*. Os planos são divididos por segmentos (Educação Infantil, Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II e Ensino Médio) e por área de conhecimento (Ciências da Natureza e Matemática). Na Matemática de Ensino Médio, os assuntos encontram-se divididos em três blocos: Álgebra, Geometria e Análise de dados. As atividades são desenvolvidas a partir de matérias de revistas, estabelecendo um elo entre a Matemática e as notícias do cotidiano. Além disso, você pode compartilhar sua opinião sobre os planos de aula com outros colegas de profissão através de redes sociais. O *site* contém ainda uma grande variedade de artigos sobre educação: gestão escolar, planejamento e avaliação, formação, políticas públicas, inclusão, criança e adolescente. (Acesso em: jan. 2014.)

■ www.obm.org.br

É o *site* oficial da Olimpíada Brasileira de Matemática, sob responsabilidade do Impa (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), situado no Rio de Janeiro. Estão disponíveis para *download* as provas com gabaritos de vários anos da OBM, nos diversos níveis (nível 1: 6º e 7º anos; nível 2: 8º e 9º anos; nível 3: Ensino Médio e nível universitário) e fases (1ª, 2ª e 3ª). O grau de dificuldade aumenta à medida que se avança a fase. Pode ser uma interessante fonte para o trabalho com resolução de problemas, ainda que muitas questões apresentem um elevado grau de dificuldade. (Acesso em: jan. 2014.)

■ www.matematica.br

O iMática (A Matemática Interativa na Internet) é um *site* mantido por professores e alunos do IME-USP. É composto de quatro seções:

- *História da Matemática* (é possível encontrar bons textos, seja por uma linha do tempo, biografia ou por tópicos);
 - *Problemas-desafios*;
 - *Programas* [é possível encontrar sistemas gratuitos, voltados ao ensino e aprendizagem em Matemática, entre eles o iGeom (geometria dinâmica) e o iGraf (funções)];
 - *Lista* (é possível encontrar centros que oferecem cursos à comunidade interna e externa da USP).
- (Acesso em: jan. 2014.)

■ www2.mat.ufgrs.br/edumatec

O *site* oferece materiais de apoio e subsídios para as atividades de Matemática com uso de tecnologias de informática. Uma iniciação ao uso de *softwares* pode ser feita na seção *Atividades guiadas*. Destacam-se

a variedade e a diversidade de atividades bem elaboradas de álgebra, geometria e funções, além de *softwares* recreativos. No *site* também podemos encontrar artigos sobre o ensino de Matemática. (Acesso em: jan. 2014.)

■ www.apm.pt

É o *site* da Associação de Professores de Matemática de Portugal. Há textos para reflexão, propostas de atividades, publicações etc. (Acesso em: jan. 2014).

■ www.mat.ufmg.br/~lem/

Site do laboratório de Ensino da Matemática da UFMG. Apresenta o seu acervo, propostas de jogos, atividades, *links* e eventos. (Acesso em: jan. 2014).

■ www.ime.unicamp.br/lem

Site do laboratório de Ensino da Matemática da Unicamp. Há indicações de cursos, seminários, eventos e publicações que incentivam o aperfeiçoamento de professores da educação básica. (Acesso em: jan. 2014).

■ www.limc.ufrj.br

Site do laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências da UFRJ. Apresenta diversos materiais para uso em sala de aula, incluindo um *software* de geometria dinâmica (o Tabulae). (Acesso em: jan. 2014.)

■ www.ie.ul.pt

Site da Universidade de Lisboa, do qual destacamos o Instituto de Educação, que promove discussões sobre os processos investigativos em Didática da Matemática. Há artigos interessantes relacionados às três áreas de pesquisa do grupo de investigação. A primeira diz respeito ao professor, suas práticas, formulação das estratégias de ensino e condução dos processos de comunicação na sala de aula. A segunda área trata do ensino e da aprendizagem dos números e da álgebra, e a terceira estuda currículo e avaliação.

É possível encontrar artigos publicados em revistas científicas, teses de mestrado e várias outras publicações interessantes. (Acesso em: jan. 2014.)

■ objetoseducacionais2.mec.gov.br

Site do Banco Internacional de Objetos Educacionais, com cerca de 20 000 objetos (recursos digitais) em vários formatos de arquivo e de acesso público. Esses objetos podem ser acessados isoladamente na seção *modalidade de ensino* ou por meio das seções a seguir: *educação infantil*, *ensino fundamental*, *ensino médio*, *educação profissional* e *educação superior*. (Acesso em: jan. 2014.)

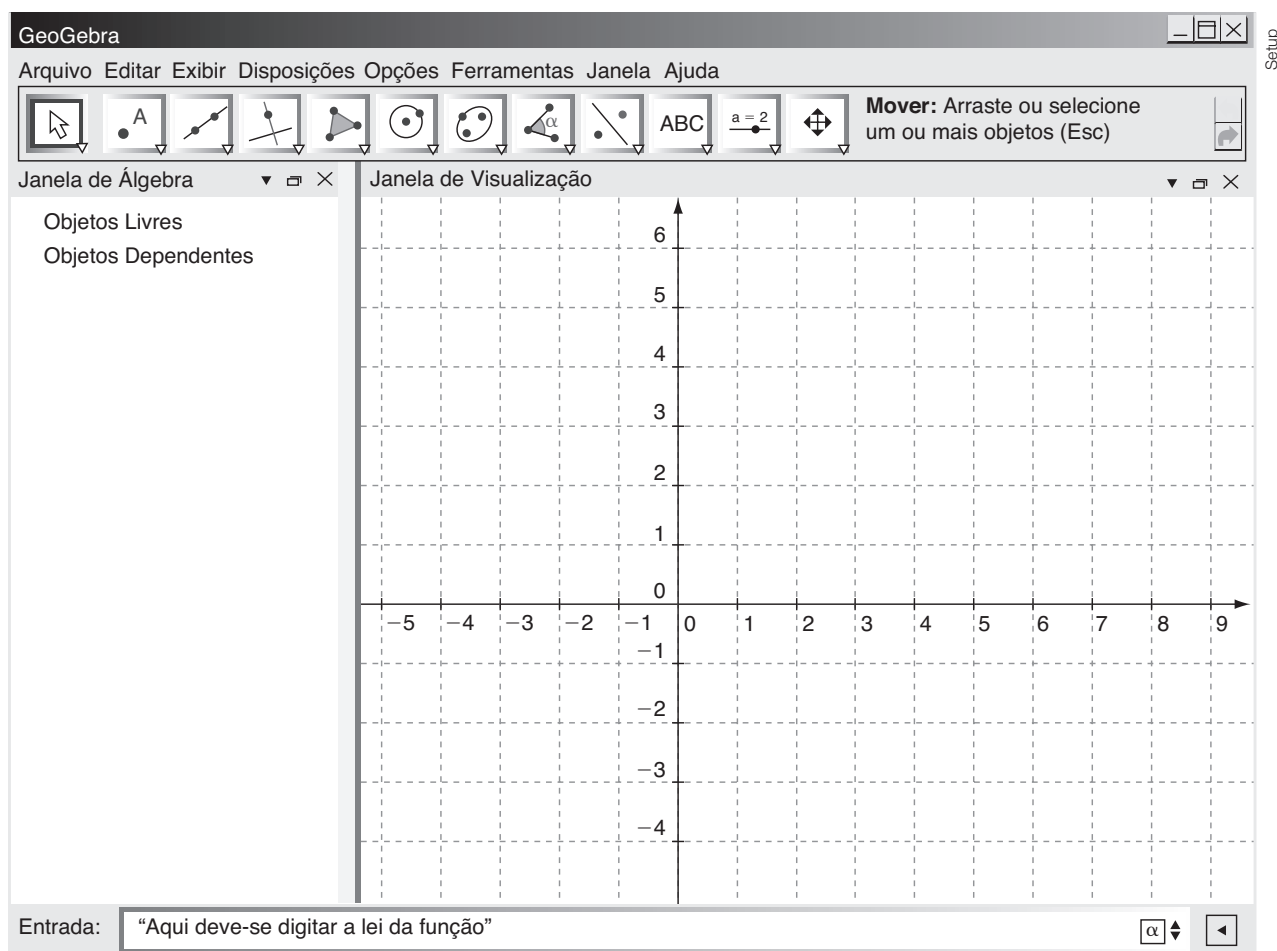
■ Alguns *softwares* de Matemática

Destacamos a seguir três *softwares* gratuitos que podem ajudar o professor a dinamizar e diversificar as suas estratégias em sala de aula.

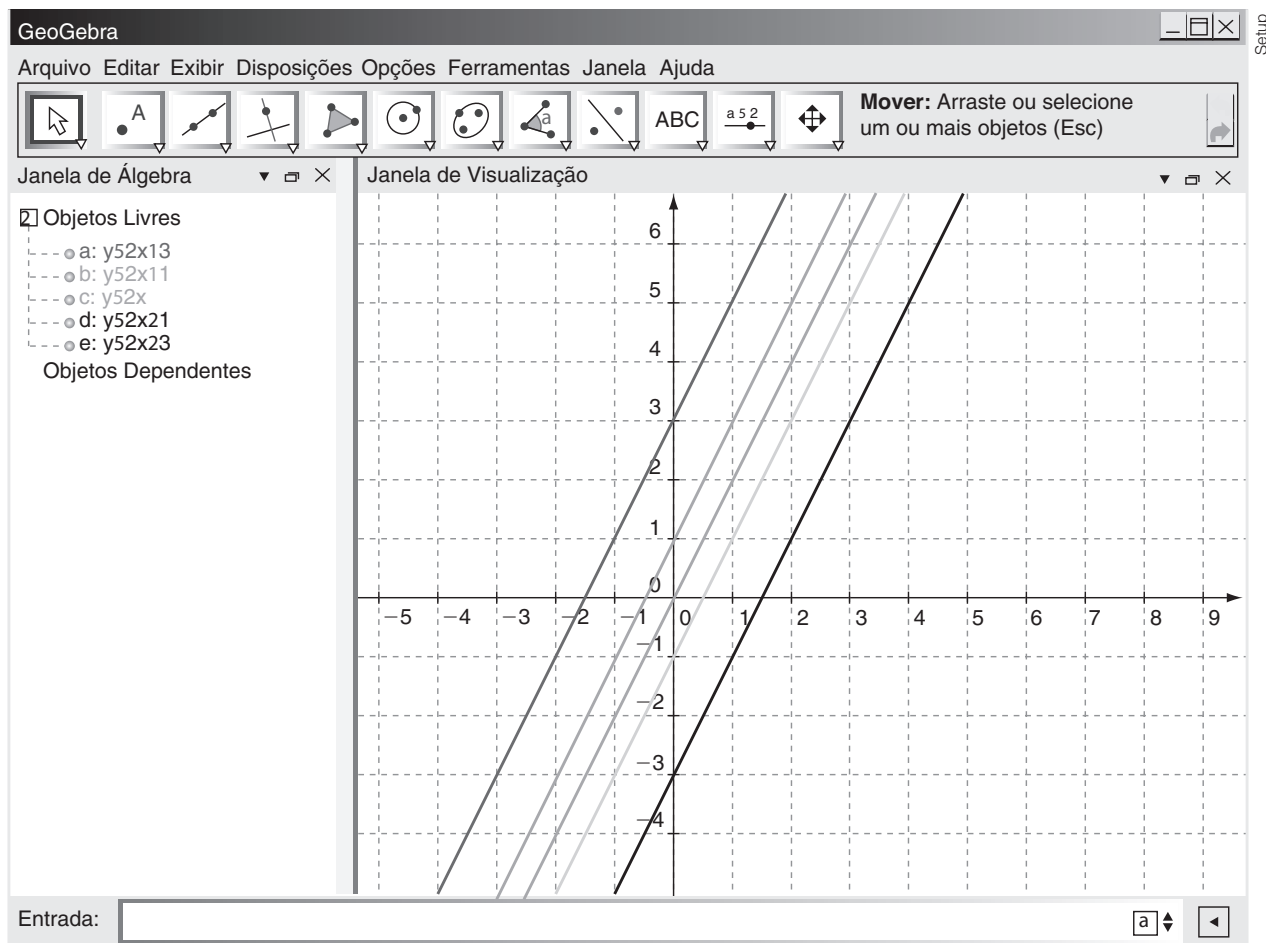
GeoGebra

Este *software* é utilizado no trabalho com funções, geometria plana e analítica. Está disponível para instalação em: <http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/>. (Acesso em: jan. 2014.)

No estudo das funções, por exemplo, o traçado dos gráficos das funções elementares (afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica etc.) pode ser facilmente executado, a partir da janela “entrada”, como mostra a reprodução da tela a seguir. Basta digitar a lei da função (por exemplo, $y = 3x + 1$ na função afim; $y = x^2$, em que a tecla \wedge é usada para potenciação, representando a função $y = x^2$; $y = \text{abs}(x)$, para a função modular $y = |x|$ e assim por diante).



Uma atividade que propomos, por meio do GeoGebra, é a elaboração de gráficos de várias funções a partir de uma delas. Por exemplo, a partir da função $y = 2x$, podemos construir os gráficos das funções $y = 2x + k$, com $k \in \mathbb{R}$. Podemos visualizar os gráficos gerados a partir de alguns valores de k .



Além de visualizar a translação vertical, cria-se espaço para compreensão dos coeficientes (angular e linear) das retas obtidas.

- Ao perceberem que as retas do feixe $y = 2x + k$ são paralelas, fica estabelecido que o coeficiente angular dessas retas mantém-se constante e determina a inclinação comum a todas estas retas.
- Ao perceberem que a reta de equação $y = 2x + k$ intercepta o eixo das ordenadas em $(0, k)$, fica estabelecido o papel do coeficiente linear (k).

Várias outras possibilidades de trabalho com funções podem ser realizadas com o GeoGebra. Citamos alguns exemplos:

- A construção do gráfico da função exponencial e de sua inversa (a função logarítmica) no mesmo plano cartesiano permite reconhecer a simetria existente entre essas funções em relação à reta $y = x$.
- A construção do gráfico da função definida por $y = x^2$ e $y = x^2 + k$, com $k \in \mathbb{R}$; a construção dos gráficos da "família" de parábolas do tipo $y = ax^2$; com $a \neq 0$.
- A construção do gráfico de funções modulares, com translação vertical ($y = |x| + k$, a partir do gráfico de $y = |x|$) e horizontal ($y = |x + k|$, a partir do gráfico de $y = |x|$). Lembre que deve ser usado $\text{abs}(x)$ para indicar o módulo de x .
- A construção do gráfico de funções exponenciais do tipo $y = a^x + k$ ($0 < a \neq 1$ e $k \in \mathbb{R}$).

Na Geometria Analítica, destacam-se possibilidades de trabalho com o plano cartesiano, distâncias, perímetro e área de polígonos, pontos notáveis do triângulo, paralelismo e perpendicularidade.

No livro *Aprendendo Matemática com o GeoGebra*, de Jorge Cássio Costa Nóbrega e Luís Cláudio Lopes de Araújo (Brasília: Exato, 2010), encontramos várias propostas de utilização do GeoGebra, em linguagem simples e direta.

Winplot

É um programa usado para elaborar gráficos de funções, definidas em certo intervalo a partir de suas leis. Seu funcionamento é relativamente simples; há opções de ajuda em todas as partes. Esse *software* está disponível para instalação em: <http://math.exeter.edu/rparris/>. (Acesso em: jan. 2014.)

Sugerimos usá-lo na construção de gráficos de funções usualmente estudadas no Ensino Médio: função afim, quadrática, modular (esse *software* usa $\text{abs}(x)$ para representar o módulo de x), exponencial, logarítmica e as funções trigonométricas (o número real π deve ser digitado como “pi”).

Graphmatica

Similar ao Winplot, este *software* possui uma tabela de pontos (x , y) que é automaticamente preenchida à medida que é colocada a lei da função $y = f(x)$ cujo gráfico se pretende construir. Esse *software* está disponível para instalação em: <<http://www.graphmatica.com/>>. (Acesso em: jan. 2014.)

Além da construção de gráficos das funções elementares, outra possibilidade que o professor pode explorar é a construção do gráfico de funções polinomiais de grau maior que “2” para analisar o número de raízes reais, interseção com os eixos coordenados, intervalos de crescimento e de decréscimo.

Vale lembrar que, nesta etapa da escolaridade, os alunos não conhecem conceitos ligados à derivada de uma função e o uso de recursos digitais se mostra como uma das opções para o professor trabalhar esses conceitos elaborando os gráficos dessas funções. (No Manual do volume 3 há uma proposta de atividade de construção e análise de gráficos de funções polinomiais de grau maior que 2.)

■ Vídeos educacionais

No site <<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:video>> (acesso em: jan. 2014), é possível encontrar uma grande variedade de vídeos que duram em média dez minutos e que podem ser utilizados, a critério do professor, como um bom instrumento pedagógico para a sala de aula.

Destacamos a seguir alguns desses vídeos:

- *De malas prontas*: uma passageira está prestes a embarcar e não consegue colocar todas as roupas na mala. Um funcionário da companhia aérea vai ajudá-la usando o princípio fundamental da contagem.
- *Alice e a lei dos cossenos*: narra o sonho da jovem Alice sobre a demonstração da lei dos cossenos (é apresentada uma demonstração diferente da que aparece nesta coleção).
- *Salvador, o hipocondríaco*: ao ler a bula de um medicamento, a personagem Salvador se depara com conceitos importantes ligados à função exponencial, como o de meia-vida.

Nesse site, desenvolvido pela Unicamp, os temas estão agrupados em três categorias: **análise de dados e probabilidade; geometria e medidas; números e funções.**

Em geral, os vídeos apresentam uma linguagem informal e compatível com a faixa etária dos alunos de Ensino Médio, podendo ser usados em vários contextos:

- como introdução de um assunto (ou atividade) que será apresentado na sequência. Por exemplo, o vídeo *A cartomante* pode servir de motivador para o estudo dos agrupamentos em Análise Combinatória. Já o vídeo *A loira do banheiro* envolve ideias de criptografia e pode ser apresentado antes da atividade *Matrizes e Senhas*, que o professor encontra nos *Comentários específicos* do volume 2.
- como complemento de conteúdos. O vídeo *Lembranças de Sofia*, em que se discute o planejamento de um experimento e a amostragem em Estatística.
- como objeto da História da Matemática. Um exemplo é o do vídeo *Esse tal de Bhaskara*, que apresenta a trajetória histórica dos processos de resolução de equações de 2º grau.
- como instrumento de avaliação, em que o professor encontra nos arquivos (pacote completo) sugestões de atividades que podem ser aplicadas antes ou depois da exibição dos vídeos.

■ Revistas

- *Pátio Revista Pedagógica e Revista Pátio Ensino Médio*
Essas revistas, com periodicidade trimestral e quadrimestral, respectivamente, fazem parte dos periódicos publicados pela Artmed Editora e discutem temas variados e atuais em Educação.
- *Revista Nova Escola*
A revista auxilia o educador na complexa tarefa de ensinar. Há reflexões e artigos sobre temas atuais de educação, bem como propostas e relatos de atividades em sala de aula. Muitas vezes encontramos artigos específicos de Matemática. Sua periodicidade é mensal e faz parte do acervo de publicações da Editora Abril.
- *Revista Carta na Escola*
Atualidades em sala de aula – Editora Confiança.
Nessa revista são apresentadas matérias diversas sobre atualidades, cujo conteúdo deriva de edições da revista *Carta Capital*. Embora não haja uma seção específica para a Matemática em cada exemplar, é possível tirar boas ideias para a sala de aula.
- *Revista do Professor de Matemática* (RPM)
Trata-se de uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática com o apoio da USP (Universidade de São Paulo), que vem sendo distribuída desde 1982. Há artigos sobre História da Matemática, cotidiano e Matemática, conteúdos programáticos, experiências pedagógicas, atividades lúdicas, desafios etc.
- *Revista Educação Matemática em revista*
É uma publicação da Sbem (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) que aborda assuntos de interesse para o professor de Matemática.

■ Sugestões de leitura para o professor

Livros sobre questões curiosas de Matemática, jogos e raciocínio lógico:

- *Enigmas, desafios, paradoxos e outros divertimentos lógicos e matemáticos*, de Dimas Monteiro de Barros. Araçatuba: Novas Conquistas, 2009.

O livro traz uma série de problemas de raciocínio lógico não muito difíceis, acompanhados da resolução comentada. Pode ser uma boa opção para o início de um trabalho sistemático do exercício do raciocínio lógico com os alunos.

- *Mania de Matemática 2: novos enigmas e desafios matemáticos*, de Ian Stewart. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

Nessa obra, há uma grande variedade de desafios, mistérios, paradoxos e quebra-cabeças, construídos em uma linguagem comum e acessível também a leitores não habituados com temas de Matemática.

Do mesmo autor, destacamos também: *Almanaque das curiosidades matemáticas*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

- *A Matemática e a Mona Lisa: a confluência da arte com a ciência*, de Bülent Atalay. São Paulo: Mercury, 2007. Segundo o próprio autor, o livro apresenta a ciência por meio da arte e a arte por meio da ciência. A proporção áurea (e o número φ) é amplamente analisada na obra de Leonardo da Vinci. Pode ser uma opção de aprofundamento do texto apresentado na seção *Aplicações*, volume 1 desta coleção.

- *Alex no país dos números: uma viagem ao mundo maravilhoso da Matemática*, de Alex Bellos. São Paulo: Companhia das Letras, 2010.

Viajando entre diferentes línguas e culturas, o autor investiga as propriedades do jogo Sudoku com seus inventores; conversa com um pesquisador francês especializado no raciocínio quantitativo de tribos indígenas na Amazônia; venera um guru indiano responsável pelo legado mítico criador do zero; visita a escola japonesa em que professores e alunos fazem cálculos imaginando o funcionamento de um ábaco; na companhia de um estatístico, aventura-se em um cassino de Nevada para tentar prever os acasos da fortuna; consulta um famoso numerólogo para saber o nome profissional que deve usar.

■ Sugestões de leitura para os alunos

- *O diabo dos números*, de Hans Magnus Enzensberger. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.

- *Matemática divertida e curiosa*, de Malba Tahan. 7. ed. Rio de Janeiro: Record, 1997.

- *Desafios e enigmas: uma forma descontraída de colocar à prova seu raciocínio*, de Juliano Niederauer e Marla Fernanda C. de Aguiar. São Paulo: Novatec, 2007.

- *20 000 léguas matemáticas: um passeio pelo misterioso mundo dos números*, de A. K. Dewdney. Coleção Ciência e Cultura. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2000.

- *O homem que calculava*, de Malba Tahan. 55. ed. Rio de Janeiro: Record, 2001.

- *Os poliedros de Platão e os dedos da mão*, de Nilson José Machado. São Paulo: Scipione, 2000.

- *Contando a história da Matemática: dando corda na Trigonometria*, de Oscar Guelli. São Paulo: Ática, 2000.

- *O teorema do papagaio*, de Denis Guedj. São Paulo: Companhia das Letras, 2006.

- *Pitágoras e seu teorema em 90 minutos*, de Paul Strathern. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998. (Coleção Cientistas em 90 minutos).

■ Livros paradidáticos

- Coleção *Pra que serve Matemática?* (Luiz Márcio Pereira Imenes e outros). São Paulo: Atual, 1990.

Essa coleção busca responder à clássica pergunta dos alunos em qualquer assunto: “Pra que isto serve?”. Por meio de exemplos do cotidiano, de jogos e de aplicações, os autores procuram responder à pergunta clássica em cada um dos seguintes temas:

- Álgebra
- Ângulos
- Equação do 2º grau
- Estatística
- Frações e números decimais
- Geometria
- Números negativos
- Proporções
- Semelhanças

- Coleção *Vivendo a Matemática* (vários autores). São Paulo: Scipione, 1990.

Essa coleção busca criar o gosto pela Matemática através do conhecimento das ligações entre essa ciência e objetos ou fatos do cotidiano. Até o momento foram publicados os seguintes volumes:

- Brincando com números
- Geometria dos mosaicos
- Descobrimos o teorema de Pitágoras
- Medindo cumprimentos
- Problemas curiosos
- Polígonos, centopeias e outros bichos
- Geometria das dobraduras
- Lógica? É lógico!
- Os poliedros de Platão e os dedos da mão
- Semelhança não é mera coincidência
- Os números na história da civilização
- A numeração indo-arábica
- Par ou ímpar
- Na terra dos nove-fora
- Desenhos da África

Essas coleções podem servir de base para relembrar alguns conceitos estruturantes do Ensino Fundamental.

COMENTÁRIOS ESPECÍFICOS

Iniciamos este volume apresentando noções básicas de teoria dos conjuntos com o objetivo de familiarizar o aluno com a notação e linguagem matemática. Também são vistas as relações de pertinência e inclusão, bem como as operações entre conjuntos. Essas noções são importantes para o desenvolvimento dos demais capítulos.

No capítulo 2 são apresentados e caracterizados os conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais), buscando a consolidação de conceitos já estudados em outros ciclos. Enfatizamos a localização de números na reta real, as propriedades dos números reais e as operações com intervalos reais, uma vez que estas voltarão a aparecer no estudo de funções. Nesses dois primeiros capítulos prevalece uma abordagem mais teórica.

O estudo das funções (capítulos 3 a 10) constitui o principal eixo temático deste volume. Num primeiro momento (início do capítulo 3), trabalhamos o conceito de função com base na relação de dependência entre duas grandezas, deixando de lado, por ora, a definição mais formal de função, apoiada no produto cartesiano e nas relações entre dois conjuntos. Nessa introdução, procuramos apresentar situações cotidianas para ilustrar a relação entre as duas grandezas (tempo e espaço no exemplo 1; número de copos com água de coco e preço no exemplo 2; número de passageiros e preço da passagem no exemplo 3).

A seguir, são apresentados aspectos gerais das funções: lei de correspondência, a notação $y = f(x)$, domínio, imagem, gráficos (leitura, interpretação e construção), além do conceito de taxa média de variação de uma função, com suas aplicações à Física, na definição de velocidade e aceleração médias. Esse conceito será retomado adiante, especialmente na função afim, para apresentar a sua propriedade característica: a taxa média de variação é constante, o que caracteriza o acréscimo (ou decréscimo) linear. Destacamos ainda a aplicação dessa propriedade à Física, no estudo dos movimentos uniforme e uniformemente variado.

A leitura e interpretação de gráficos – habilidade fundamental na formação do aluno – é iniciada a partir de recortes de jornais, revistas e internet, nos quais podemos identificar a relação

de dependência entre as grandezas envolvidas. Nos gráficos, o aluno percebe, de modo informal e intuitivo, propriedades das funções que esses gráficos representam. A partir desse primeiro contato, é feita, ainda no capítulo 3, a formalização de conceitos importantes, tais como: intervalos de crescimento e decrescimento, ponto de máximo (ou de mínimo), eventuais simetrias e sinal.

Os capítulos seguintes (4 a 8) tratam das funções específicas: as funções polinomiais de 1º e 2º grau, a função modular (precedida do estudo de função definida por várias sentenças), a função exponencial e a função logarítmica. De modo geral, na introdução dos capítulos citados, procuramos partir de situações na forma de exemplos ou problemas que guardam relação com assuntos cotidianos, como forma de motivar o aluno na construção dos conceitos que serão trabalhados ao longo do capítulo. Quando o capítulo (ou determinado item) é iniciado sob a forma de uma situação-problema, esta é retomada no decorrer do texto.

O desenvolvimento desses capítulos segue uma estrutura que inclui: definições, exemplos, gráficos e suas propriedades, equações e inequações. Tal estrutura é intencionalmente intercalada com alguns textos sobre aplicações dos conceitos matemáticos que estão sendo construídos, a outras áreas de conhecimento e com uma série de exercícios diversificada, com forte apelo a situações contextualizadas.

Vale lembrar, também, que nesses capítulos aprofundam-se e consolidam-se conhecimentos adquiridos do ciclo anterior, como equações de 1º e 2º grau, que são revisados respectivamente nos capítulos de função afim e quadrática; grandezas direta e inversamente proporcionais e regra de três simples, revisados no estudo da função linear; potências, suas propriedades e operações e notação científica, recordados no capítulo de função exponencial, e assim por diante.

É importante destacar que a função modular é apresentada a partir da ideia de função definida por várias sentenças (a qual pode ser facilmente contextualizada com situações cotidianas, como o pagamento de uma conta de água ou o cálculo do imposto de renda) e que o estudo das propriedades do módulo de um número real, bem como o de equações e inequações modulares básicas, completa o capítulo.

O uso da calculadora aparece, em um primeiro momento, nos capítulos 7 e 8 (função exponencial e função logarítmica), no cálculo de potências, raízes e logaritmos. O cálculo de logaritmos com uso de tabelas de característica e mantissa ficou ultrapassado com o surgimento de calculadoras e computadores. Uma pequena menção sobre o uso de logaritmos como recurso de cálculo é feita no texto. Seu uso volta a ser destacado no capítulo 11, nos problemas de Matemática Comercial e Financeira (veja logo adiante), e também no capítulo 13, na obtenção das raízes trigonométricas de ângulos agudos para a resolução de problemas.

No capítulo 9 (Complemento sobre funções) é feita a classificação de uma função em injetora, sobrejetora e bijetora (ou nenhuma dessas). No momento em que o conceito de função inversa for formalizado para os seus alunos, retome no capítulo de função logarítmica a relação de seu gráfico com o da função exponencial. Também é apresentado o conceito de função composta. Optamos por apresentar esses conceitos apenas neste momento, pois julgamos necessário um tempo maior para amadurecimento dos alunos com o estudo das funções. Outro ponto importante é que, após o estudo de todas as funções dos capítulos anteriores, a exemplificação (em termos de funções injetora, sobrejetora e bijetora) pode tornar-se mais fácil.

No capítulo 10 é apresentado o conceito de sequência numérica como uma função com domínio em \mathbb{N}^* . Desse modo, a relação entre progressão aritmética e geométrica com a função afim e a exponencial, respectivamente, é explicitada no texto. É feito também o estudo da lei de formação, propriedades, termo geral dessas sequências, soma dos n primeiros termos e soma dos infinitos termos de uma P.G. ($-1 < q < 1$), com uma interpretação geométrica particular.

O capítulo 11 é reservado à Matemática Comercial e Financeira. Trata-se de um assunto de grande relevância social, pois põe o leitor em contato com temas de Educação Financeira, importante para a sua formação como cidadão: cálculos simples de porcentagem em situações diversas, tais como aumentos, descontos, variações percentuais etc. Nesse capítulo, consolida-se o conceito de porcentagem, que será usado pelo aluno em todo o Ensino Médio e em outras áreas do conhecimento, como Química, Física, Geografia etc. Várias formas de cálculo de porcentagem podem ser exploradas no capítulo:

aproximado, exato, mental e com auxílio de uma calculadora comum.

Também são abordadas as diferentes modalidades de juros (simples e compostos). Os juros simples são apresentados a partir do cálculo de juros de mora provenientes de contas de consumo. Já os juros compostos são introduzidos a partir de um problema que envolve a atualização, ano a ano, do saldo de uma caderneta de poupança.

O estudo dos juros proporciona também a oportunidade de revisar algumas funções elementares: a função afim e a exponencial (e logarítmica), associadas aos juros simples e composto, respectivamente. Naturalmente, como as progressões são definidas como funções com domínio nos naturais, os conceitos ligados às progressões aritmética e geométrica também são retomados.

Ao longo do capítulo são apresentados textos de aplicações que ilustram, com situações cotidianas, os conceitos que estão sendo construídos e abordam temas centrais de educação financeira: escolha da forma de pagamento (à vista ou a prazo – introduz-se o conceito de valor presente de um conjunto de pagamentos em financiamentos), consumo e poupança.

No capítulo 12 é apresentada inicialmente a ideia geral de semelhança de figuras, incluindo também figuras espaciais básicas, já conhecidas do aluno, como o cubo ou a esfera; o teorema de Tales e o estudo da semelhança de triângulos são apresentados como revisão de conteúdos do Ensino Fundamental e servem de base para a introdução das razões trigonométricas no triângulo retângulo, assunto tratado no capítulo seguinte. Em seguida, usando a semelhança entre triângulos, são retomadas as relações métricas em um triângulo retângulo, o teorema de Pitágoras e suas aplicações.

O capítulo 13 encerra este volume e marca o primeiro contato com a trigonometria: retomamos e aprofundamos o estudo das razões trigonométricas em um triângulo retângulo, procurando explorar vários problemas envolvendo situações cotidianas. A obtenção das razões trigonométricas de ângulos agudos é feita com o uso de uma tabela trigonométrica ou de uma calculadora científica.

Apresentamos também duas relações válidas para ângulos agudos no triângulo retângulo que são generalizadas na circunferência trigonométrica:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ e } \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

■ Objetivos específicos

■ Conjuntos

- Compreender e usar a notação simbólica básica da teoria dos conjuntos.
- Reconhecer e utilizar as operações entre conjuntos, como união, interseção e diferença.

■ Números e operações

- Identificar números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais.
- Identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números racionais.
- Reconhecer e utilizar aproximações racionais para os números irracionais.
- Localizar os números reais (rationais ou não) na reta numerada.
- Generalizar o conceito de módulo de um número inteiro para o universo real.
- Utilizar as propriedades dos números reais.
- Caracterizar e reconhecer os intervalos reais, bem como aplicar as operações de união e interseção com esses intervalos.

■ Funções

- Construir o conceito de função usando a relação de dependência entre duas grandezas e estabelecer, quando possível, a lei que forneça a relação entre elas.
- Utilizar e interpretar a notação $y = f(x)$.
- Estabelecer o domínio de uma função a partir de sua lei.
- Analisar e interpretar o gráfico de uma função para extrair informações significativas a seu respeito.
- Reconhecer exemplos e resolver exercícios em que as funções estejam contextualizadas em situações do cotidiano ou aplicadas a outras áreas do conhecimento.
- Relacionar o estudo da taxa média de variação de uma função aos conceitos de velocidade e aceleração escalares médias.
- Solidificar conhecimentos construídos no Ensino Fundamental II, como o plano cartesiano, a resolução de equações de 1º e 2º graus e de sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas, inequações, o cálculo de potências, grandezas direta e inversamente proporcionais etc.
- Resolver problemas que envolvem a principal característica da função afim: a sua taxa média de

variação ser constante; interpretar e utilizar essa propriedade nas equações horárias de $s(t)$ e $v(t)$ nos movimentos uniforme e uniformemente variado, respectivamente.

- Resolver problemas envolvendo máximos (ou mínimos) da função quadrática, relacionando-os também à Geometria.
- Relacionar o estudo da função afim e quadrática à modelagem de custos, receitas e lucros de empreendimentos.
- Relacionar o estudo das funções à Geometria Analítica por meio dos exercícios que envolvam interseção de duas retas (ou de uma reta e uma parábola), interseção de uma reta (ou parábola) com os eixos coordenados, determinação da equação de uma reta a partir de dois pontos, entre outras situações.
- Construir, ler e analisar gráficos das funções estudadas.
- Resolver equações e inequações de 1º e 2º graus, exponenciais e logarítmicas.
- Resolver equações exponenciais com uso de logaritmos em situações-problema.
- Relacionar o estudo da função exponencial ao conceito de meia-vida aplicado aos medicamentos e à radioatividade.
- Reconhecer a importância histórica dos logaritmos como instrumento de cálculo.
- Reconhecer a importância da função logarítmica na Matemática e em outras áreas do conhecimento, como na descrição de fenômenos naturais como os terremotos e na escala do pH.
- Usar corretamente as propriedades operatórias dos logaritmos.
- Utilizar corretamente a calculadora científica para fazer cálculos de logaritmos e potências.
- Reconhecer a função logarítmica como inversa da função exponencial.
- Generalizar o conceito de módulo (apresentado no capítulo 2) de um número real e reconhecer as principais propriedades.
- Identificar regularidades em padrões geométricos e numéricos e escrever leis de formação em sequências numéricas.
- Reconhecer as progressões aritmética e geométrica como funções com domínio em \mathbb{N}^* , relacionando-as, respectivamente, às funções afim e exponencial.

- Determinar a razão, o termo geral, a soma dos n primeiros termos de uma P.A. e de uma P.G.
- Calcular a soma dos infinitos termos de uma P.G. em que a razão é um número entre -1 e 1 .
- Resolver problemas que envolvam progressões aritméticas e progressões geométricas simultaneamente.

■ Tratamento da informação

Matemática Comercial e Financeira

- Reconhecer a importância da Matemática comercial e financeira na construção da cidadania do aluno.
- Construir conhecimentos de educação financeira, tais como: a importância de poupar, a necessidade de comparar preços e condições em transações comerciais, a importância de organizar um orçamento doméstico para equilibrar as contas etc.
- Aprofundar e consolidar os conceitos de razão, proporção e porcentagem.
- Distinguir juros simples de compostos e resolver problemas que envolvam essas modalidades de juros.
- Fazer uso da calculadora para resolver problemas.
- Relacionar juros simples e compostos às progressões aritmética (função afim) e geométrica (função exponencial), respectivamente.
- Relacionar a expressão do montante dos juros compostos à função exponencial e usar logaritmos para resolver situações-problema de Matemática financeira.
- Utilizar o conceito de valor atual de um conjunto de pagamentos para compreensão do mecanismo dos financiamentos.
- Calcular porcentagens de certo valor usando procedimentos diversos: cálculo exato, aproximado, mental e com auxílio da calculadora simples.
- Resolver problemas comuns no comércio, tais como: cálculo de descontos ou acréscimos, variação percentual etc.

■ Geometria

- Revisar e aprofundar conceitos importantes estudados no ciclo anterior, como segmentos proporcionais, teorema de Tales e triângulos semelhantes.
- Compreender e ampliar o conceito geral de semelhança.
- Identificar a semelhança entre figuras planas, ampliando e reduzindo figuras segundo uma razão e identificando os elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e os que se modificam (medida dos lados, do perímetro e da área).

- Calcular a razão entre as medidas dos lados de figuras planas semelhantes e também entre as áreas de suas superfícies.
- Resolver problemas cotidianos associados a triângulos semelhantes.
- Utilizar a semelhança de triângulos para estabelecer as relações métricas no triângulo retângulo.
- Usar o teorema de Pitágoras, bem como suas aplicações.
- Utilizar a semelhança de triângulos na introdução dos conceitos de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo.
- Deduzir os valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis.
- Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas, reconhecendo sua importância no cálculo de distâncias inacessíveis.
- Usar convenientemente a calculadora científica e a tabela de razões trigonométricas para obter as razões trigonométricas de outros ângulos agudos.

■ Sugestões de abordagem, avaliação e tópicos principais

■ Números e operações

No capítulo 2, é importante que os alunos revejam os conjuntos numéricos, bem como estabeleçam a relação (ou não) de inclusão entre eles. Por exemplo, é importante que o aluno saiba que todo número racional é real, mas a recíproca não é verdadeira.

As operações básicas entre elementos dos conjuntos numéricos podem ser revisadas neste capítulo, pois serão usadas em todo o curso de Ensino Médio.

A completude da reta real, por meio dos irracionais, também é algo que deve ser destacado. Atividades de "preenchimento" da reta numérica, partindo dos inteiros, passando pelos racionais e, finalmente, pelos irracionais, favorecem essa construção. O fato de ser usual aproximar números irracionais por números racionais, por exemplo, $\sqrt{2} = 1,41$, $\pi = 3,14$ etc. deve ser explorado. Algumas propriedades importantes dos números reais podem ser destacadas, como os fatos de que, no universo real, *o quadrado de um número real pode ser menor do que o próprio número* (por exemplo, $0,5^2$ é menor que $0,5$) e *o quadrado de um número é sempre maior que zero*.

O capítulo ainda comporta um estudo dos intervalos reais e suas representações, bem como operações básicas entre eles: união e interseção.

Uma possibilidade interessante de avaliação é aprofundar o texto sobre um importante e curioso número irracional: o **número de ouro**. O professor pode solicitar aos alunos (divididos em equipes) que pesquisem as ocasiões em que o número de ouro aparece em contextos diversos: arte, natureza, música, obras arquitetônicas, sequência de Fibonacci etc. Pode-se também explorar atividades geométricas com régua e compasso, na construção do segmento áureo e do retângulo áureo. Cada equipe pode preparar um seminário focando determinado contexto de ocorrência do número de ouro e, a seguir, relatar aos colegas o que pesquisaram sobre o tema.

■ Funções

O ponto de partida para o estudo das funções deve ser a identificação da variação entre duas grandezas, em situações cotidianas. Um exemplo: no supermercado, o preço do quilograma de presunto é R\$ 12,50. Um cliente que pedir 100 g pagará R\$ 1,25; quem pedir 200 g pagará R\$ 2,50; quem pedir 350 g ($= 0,35$ kg) pagará $0,35 \cdot 12,5 = \text{R\$ } 4,375$; enfim, o preço que o cliente pagará dependerá da massa de presunto pedida. No caso, as duas grandezas que estão se relacionando são: preço pago pelo cliente e massa pedida. Os alunos deverão obter a lei matemática que relaciona tais grandezas: $y = 12,5x$, sendo y o preço, em reais, e x o número de quilogramas comprado.

Outro exemplo, que também é representativo para o aluno, é a variação do perímetro de um quadrado de acordo com a medida de seu lado. É pertinente que os alunos construam tabelas para representar essa variação e, em seguida, obtenham a lei da interdependência entre essas grandezas. Outra possibilidade é analisar a variação entre a área de um quadrado e a medida de seu lado.

O próximo passo é a representação da variação entre duas grandezas em um sistema de coordenadas cartesianas. Para isso, é importante que, antes de fazer o primeiro gráfico, o professor faça uma revisão sobre o plano cartesiano, a localização de pontos, a nomenclatura etc.

A análise de gráficos também pode ser iniciada a partir de gráficos de funções que abordam situações cotidianas. Para isso, o professor pode solicitar aos alunos que procurem, em jornais, revistas e internet, gráficos

de funções e façam uma descrição (escrita e/ou oral) completa da variação entre as grandezas envolvidas. Essa atividade pode ser um instrumento de avaliação: os alunos podem apresentar os gráficos escolhidos em painéis e relatar à classe quais são as duas grandezas que estão se relacionando, quais são as propriedades principais e tendências que podem ser observadas na análise dos gráficos, entre outros aspectos específicos para cada situação.

Depois que o aluno se familiarizou com o conceito de função, ele precisa familiarizar-se com a notação $y = f(x)$ e com conceitos como domínio, imagem, crescimento, sinal, taxa média de variação etc.

No estudo da função afim, é importante consolidar os conceitos de razão e de grandezas diretamente proporcionais, relacionando-os à função linear. Outro ponto de destaque é a propriedade que caracteriza a função afim: *a taxa média de variação é constante*.

Uma atividade interessante, que pode servir de instrumento de avaliação e que envolve essa propriedade, é a *atividade 2: A função afim e a densidade demográfica*, apresentada na parte específica deste Manual, em *Sugestões de atividades em grupo*: além de explorar essa propriedade em um contexto cotidiano, envolve representações gráficas e conceitos de outras disciplinas (densidade demográfica na Geografia, por exemplo).

Revisões pontuais de resolução de equações e inequações de 1º grau e sistemas de duas equações e duas incógnitas são adequadas nesse capítulo.

Com relação às inequações, é importante também que o professor apresente à turma a resolução com base no estudo de sinal da função afim: é uma maneira de evitar que o sinal da função seja visto de forma isolada. Além disso, se o aluno compreender o uso do sinal da função afim para resolver inequações de 1º grau, certamente estará preparado para resolver inequações de 2º grau, no capítulo 5 (Função quadrática).

O texto da seção *Aplicações* que relaciona a função afim às funções receita, custo e lucro de um empreendimento pode ser ponto de partida para atividades de pesquisa e de avaliação.

Por exemplo, na administração de uma barraca de cachorro-quente em uma festa junina da escola, é preciso considerar os custos dos produtos utilizados na sua confecção (pão, salsicha, mostarda etc.) para estabelecer o preço de venda unitário e o ponto de equilíbrio. É uma oportunidade para o aluno pôr em prática os conceitos estudados.

No estudo da função quadrática, é recomendável fazer uma revisão sobre equação de 2º grau (completa e incompleta), número de raízes e construção da parábola, eixo de simetria etc. Vale comentar com os alunos que a parábola é o conjunto de pontos equidistantes de uma reta (diretriz) e de um ponto (foco).

A propriedade das funções quadráticas de terem um ponto de máximo (ou de mínimo) deve ser aprofundada, relacionando-a, se possível, a problemas geométricos ou problemas de determinação de receita máxima, como ilustra o texto complementar da seção *Aplicações* apresentado nesse capítulo.

O estudo do sinal da função quadrática deve servir de base para a resolução das inequações de 2º grau. Vale lembrar a importância de não exagerar no estudo dos diversos tipos de inequações.

Para introduzir uma função definida por mais de uma sentença, o professor pode trazer à classe uma conta de água de uma residência. Em várias cidades, o valor a ser pago pelo cliente depende da faixa de consumo mensal de água (em geral, para consumos reduzidos, o preço do m³ é inferior ao preço do m³ de faixas maiores de consumo). Em seguida, o professor deverá pedir aos alunos que calculem os valores das contas para diferentes consumos e obtenham a lei que relaciona o preço e o número de m³ consumidos. Um exemplo de funções desse tipo está ilustrado na Parte Geral deste Manual, na seção *Avaliação* (a cobrança do IPTU). Outro ponto que pode ser trabalhado com os alunos é a construção do gráfico de funções dadas por mais de uma sentença, valendo-se do que eles já aprenderam nas funções afim e quadrática.

Esse estudo preliminar das funções definidas por várias sentenças pode servir de base para a introdução do conceito de módulo de um número real: se $x \geq 0$, o módulo de x é o próprio x ; se $x < 0$, o módulo de x é igual ao oposto de x . A partir daí, define-se a função modular e constrói-se seu gráfico. Como pontos importantes desse capítulo, destacamos a interpretação geométrica do módulo de um número real, o fato de, para todo x real, o módulo de x ser maior (ou igual a) que zero e a construção de alguns outros tipos de gráficos que envolvem módulo. São assuntos secundários a resolução de equações e inequações modulares, especialmente as que não se restringem aos casos básicos.

Para os capítulos seguintes (7 – *Função exponencial* e 8 – *Função logarítmica*) é recomendável que se faça uma boa revisão dos diversos tipos de potência (expoente

inteiro positivo, negativo, fracionário) usualmente estudados no Ensino Fundamental II, bem como sobre suas propriedades. Não devemos perder a oportunidade de comentar, em seguida, sobre as potências com expoente irracional, lançando à classe perguntas do tipo: *Como podemos calcular potências como $2^{\sqrt{2}}$?* Na socialização das discussões, usando aproximação por números racionais, é interessante fazer uso da calculadora. A atividade 3 (apresentada mais adiante neste Manual) pode servir como um instrumento de avaliação diversificado. Ela trata dos índices de gordura corporal (IMC – Índice de Massa Corporal e IAC – Índice de Adiposidade Corporal): além de utilizar potências e suas propriedades, possibilita a integração com a Educação Física e a Biologia.

Um exemplo cotidiano do uso da função exponencial, que pode servir como início das discussões, é o modo pelo qual um boato pode ser espalhado: *Suponha que um morador de uma cidade tenha ficado sabendo de uma notícia bombástica no dia 1º e, no dia seguinte, contou a dois amigos. Cada um desses dois amigos repassou a notícia a outros dois, no dia 3, e assim por diante. Supondo que ninguém fique sabendo do boato por mais de uma pessoa, como podemos relacionar o número (y) de pessoas que tomam conhecimento da notícia no dia x ? ($x = 1, 2, 3, \dots, 10$).* Estamos aqui supondo que o processo em que cada pessoa conta o boato para outras duas pessoas se estenda por 10 dias. Dessa forma, obtemos a lei $y = 2^{x-1}$. Lembre que não devemos exagerar na resolução de equações e inequações exponenciais, evitando caminhos muito artificiais e carregados de cálculos. O desejável é que o aluno tenha o conhecimento necessário para resolver problemas e situações mais complexas, como a atividade 4, apresentada no item *Sugestões de atividades em grupo*, que aborda a datação por carbono-14. Aliás, o conceito de meia-vida, comum em várias áreas do conhecimento, como a Química e a Física (decaimento radioativo), além da Biologia (meia-vida de medicamentos), deve ser explorado nesse capítulo, na contextualização da função exponencial. O ponto de partida pode ser o texto e o infográfico da seção *Aplicações*, que dá subsídios teóricos para a compreensão desse conceito.

Com relação aos logaritmos, é importante que se faça, em algum momento, um resgate histórico, a partir da seção *Um pouco de História* desse capítulo sobre a importância que os logaritmos tiveram no passado como instrumento de cálculo. É natural que os alunos perguntem o porquê de se estudarem logaritmos hoje em dia, com tantos recursos tecnológicos disponíveis.

O professor só dará uma resposta satisfatória ao aluno se trabalhar na sala de aula com as diversas aplicações da função logarítmica e da exponencial, em contextos variados.

O estudo das funções exponencial e logarítmica traz para o ambiente escolar várias possibilidades para um trabalho interdisciplinar, podendo envolver a Física (relacionar os logaritmos ao estudo da intensidade dos sons), a Química (o cálculo do pH de uma solução aquosa por meio do uso de logaritmos; o decaimento radioativo — a meia-vida — e a função exponencial), a Geografia (o crescimento populacional e a função exponencial) e a Biologia (o crescimento de uma colônia de bactérias, a divisão celular, a meia-vida dos medicamentos e a função exponencial). Muitas dessas possibilidades de trabalho podem ter, como ponto de partida, a leitura dos textos da seção *Aplicações*, que podem incentivar novas pesquisas, fóruns de debate, seminários e trabalhos, proporcionando ao professor diversificação de metodologias nas aulas e também nos instrumentos de avaliação.

É interessante que se trabalhe a relação entre a função exponencial e a logarítmica (inversa uma da outra), mesmo que a formalização do conceito de função inversa seja feita no capítulo 9 (*Complemento sobre funções*). Alertamos novamente sobre a ênfase que se pretende dar a exercícios sobrecarregados de cálculo que envolvem as propriedades dos logaritmos, mudanças de base, equações e inequações.

O capítulo 9, intitulado *Complemento sobre funções*, pode ser considerado secundário e os conceitos nele trabalhados não são indispensáveis na formação básica de nossos estudantes.

No estudo das sequências numéricas e das progressões aritmética (P.A.) e geométrica (P.G.), trabalhamos com habilidades importantes como: observação de regularidades em padrões numéricos, investigação, levantamento e validação de conjecturas e generalizações (no item *Sugestões de atividades em grupo* há outras possibilidades de trabalho). Desse modo, é preciso que os alunos tenham oportunidades de fazer descobertas ligadas ao termo geral das progressões, às propriedades de cada uma delas, como calcular a soma dos n primeiros termos etc. Deve-se estabelecer, logo de início, que as sequências numéricas são exemplos de funções com domínio em \mathbb{N}^* e, portanto, suas representações gráficas são formadas por um conjunto discreto de pontos. Não podemos deixar de destacar a relação entre a função afim e a P.A. e a relação entre a função exponencial e a P.G.

Por fim, uma estratégia interessante para iniciar o estudo da soma dos infinitos termos de uma P.G., com $-1 < q < 1$, é trazer para a sala de aula um barbante de 1 m e realizar o seguinte experimento: cortamos o barbante ao meio, guardamos uma metade e, com a outra, de 0,5 m, repetimos o procedimento, isto é, cortamos ao meio, guardamos uma das metades e, com a outra, de 0,25 m, repetimos o experimento. Supondo que conseguíssemos continuar indefinidamente esse procedimento, qual é a soma das medidas de todos os barbantes guardados? Intuitivamente, o aluno sabe que a resposta do problema é 1 m, que é o comprimento inicial do barbante antes de ser cortado.

■ Tratamento da informação

O capítulo 11 (Matemática Comercial e Financeira) é de grande importância para a formação da cidadania de nossos estudantes, pois temos a oportunidade de iniciar o trabalho com a educação financeira: a importância de poupar e consumir conscientemente; a importância de pesquisar e comparar preços e condições na hora da compra; processos que envolvem aumentos, descontos e variação percentual; a compreensão de como são cobrados juros e multa em uma conta de consumo, conhecimento do que é a caderneta de poupança (ou algum outro investimento) e como seu saldo é atualizado mensalmente (regime de capitalização acumulada), a importância de saber que muitas compras parceladas embutem juros muito altos etc.

Uma estratégia motivadora para o professor ampliar as discussões é levar para a sala de aula encartes de supermercados e comparar os preços de um mesmo produto.

Exemplo: Suponhamos que, no supermercado X, o preço de um produto seja R\$ 32,00 e, no supermercado Y, o mesmo produto custe R\$ 40,00. A diferença, em valores absolutos, é de R\$ 8,00. Mas, em valores relativos, a que porcentagem corresponde essa diferença?

A diferença corresponde a R\$ 8,00; em comparação com o valor desse produto no supermercado (X), representa: $\frac{\text{R\$ } 8,00}{\text{R\$ } 32,00} = 0,25 = 25\%$.

É essencial mostrar aos alunos que, embora seja uma diferença de R\$ 8,00, percentualmente ela é de 25% (uma diferença muito significativa). É uma interessante oportunidade de alertá-los sobre o consumo sem planejamento, o que pode trazer consequências indesejáveis, como o endividamento (uma realidade de muitos brasileiros).

Os alunos precisam construir conhecimentos de Matemática, a partir de situações comuns no dia a dia, como a apresentada anteriormente, para valorizar seu dinheiro, consumindo de maneira consciente, poupando e planejando seu futuro financeiro.

Trazar para a sala de aula contas de consumo, jornais com encartes de supermercados, anúncios de planos de pagamento para aquisição de certo bem, entre outros, pode ser uma experiência rica e motivadora. Se os alunos tiverem em mãos uma conta de luz, por exemplo, poderão calcular quanto deverão pagar se houver atraso no pagamento: a multa e os juros. O cálculo dos juros nesse contexto favorece a compreensão do regime de juros simples. Se forem levados para a sala de aula anúncios sobre as condições da compra financiada de um automóvel, os alunos poderão, apoiados no conceito de valor atual de um conjunto de pagamentos, calcular o preço à vista desse bem e perceber, em geral, a grande diferença no desembolso total.

Os textos da seção *Aplicações* dão o suporte necessário para essa interessante atividade, favorecendo a compreensão do regime de juros compostos.

Sugerimos ainda que o estudo de Matemática financeira seja relacionado ao estudo das funções afim e exponencial/logarítmica na apresentação dos conceitos ligados aos juros simples e compostos, respectivamente.

É uma oportunidade para rever, sob nova abordagem, as funções estudadas.

Para finalizar, sugerimos que sejam propostas atividades que valorizem também o cálculo mental, além de atividades com uso da calculadora, em uma perspectiva de preparação para o mercado de trabalho.

■ Geometria

Nos capítulos 12 e 13 deste volume sugerimos que o professor faça uma revisão aprofundada de tópicos geralmente abordados no Ensino Fundamental II: o teorema de Tales e a semelhança de triângulos, o teorema de Pitágoras e suas aplicações, e as razões trigonométricas em um triângulo retângulo.

Para estudar a semelhança de figuras planas, o professor pode usar recursos como uma foto revelada em tamanhos diversos (ampliadas ou reduzidas), deixando que os alunos identifiquem a proporção entre as medidas de segmentos correspondentes das fotos e percebam que as medidas de ângulos correspondentes não se alteram.

Outra possibilidade é, tirando algumas cópias reduzidas em 50%, levar o aluno a validar, experimentalmente, que quatro dessas cópias compõem a figura

original. Em outras palavras, se $k = \frac{1}{2}$, a razão de semelhança entre as áreas da figura reduzida e da original é $k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Também há a possibilidade de trazer para a sala de aula objetos (ou, caso haja material específico na escola, sólidos geométricos) que tenham formato parecido – por exemplo, uma caixa de sapatos e uma embalagem de creme dental (no caso de haver sólidos geométricos no material da escola, trazer dois paralelepípedos retortetângulos) – para verificar se são semelhantes (será preciso que os alunos avaliem se há proporcionalidade entre as medidas). A discussão pode ser ampliada, deixando-se que os alunos descubram: *e dois círculos, são semelhantes? E duas esferas? E dois cubos?*; e assim por diante. Sugerimos, com isso, que o estudo de semelhança não se reduza aos triângulos.

Por fim, é importante lembrar que os alunos deverão usar as razões trigonométricas no triângulo retângulo para resolver problemas; desse modo, o trabalho nesse capítulo não pode se limitar à determinação da medida de um lado do triângulo retângulo (conhecidas as medidas de outro lado e de um ângulo agudo), bem como não devemos ficar restritos aos ângulos notáveis, mas trabalhar com outros ângulos que exijam o uso da calculadora e da tabela de razões trigonométricas.

■ Sugestões de atividades em grupo

O professor deve, em suas aulas, desenvolver atividades em grupo, desde exercícios trabalhados em sala de aula até atividades propostas para casa, que podem se concretizar sob a forma de pesquisa, seminários, construções de figuras geométricas etc. Nessas atividades, ele tem a oportunidade de promover o exercício da cidadania, que tem um papel importante na formação dos estudantes.

As atividades em grupo proporcionam aos alunos:

- ouvir, discutir e refletir sobre a opinião dos colegas;
- respeitar as diferenças individuais quanto ao tempo de compreensão e assimilação dos conteúdos;
- socializar diferentes pontos de vista e resoluções diversas para um mesmo problema;
- promover situações de ajuda e de ensino-aprendizagem entre os colegas;
- dividir tarefas e responsabilidades;
- promover maior integração social.

Veja as sugestões a seguir para atividade em grupo.

■ Atividade 1: Tratamento da informação

Essa atividade pode ser desenvolvida no estudo das funções.

Objetivos

- Ler e interpretar gráficos de linhas.
- Chamar a atenção dos alunos sobre os cuidados que um cidadão deve tomar na interpretação de informações contidas em um gráfico para a correta leitura da realidade.
- Mostrar aos alunos que uma mudança de escala em um gráfico pode gerar, à primeira vista, interpretações distintas de um mesmo fato.

Número de aulas: 1

Desenvolvimento

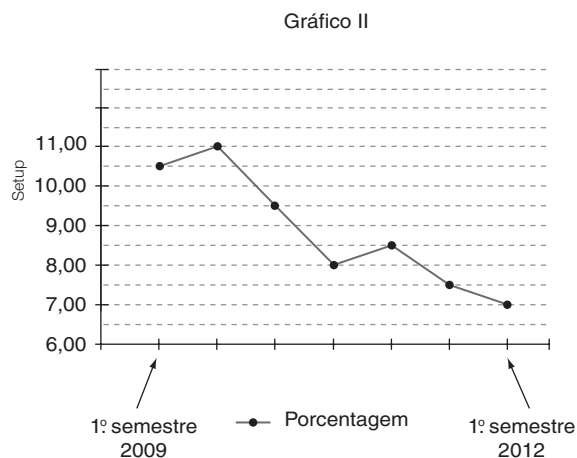
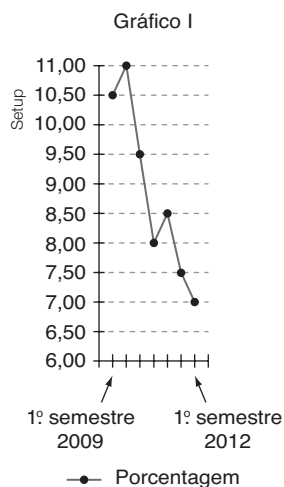
- Divida a classe em duplas, fornecendo, para cada uma, o texto a seguir acompanhado dos gráficos I e II.
- Dê um tempo para que todos leiam, com atenção, a proposta da atividade.

Texto e gráficos para serem fornecidos aos alunos

Em certo país, preparando-se para as novas eleições, o governo estava interessado em divulgar o resultado de suas ações na criação de novos empregos, durante os sete semestres já concluídos de sua gestão.

Para isso, veiculou, em uma propaganda governamental, o gráfico I, que mostra a variação da taxa de desemprego da população economicamente ativa entre o 1º semestre de 2009 e o 1º semestre de 2012.

Quase na mesma data, um artigo publicado em um portal da internet mostrava a evolução da taxa de desemprego da população economicamente ativa, na gestão atual do governo. O artigo continha o gráfico II em seu conteúdo.



Depois da leitura, os alunos deverão expor o que observaram nos dois gráficos. Algumas questões podem orientar essa discussão em sala de aula:

- Os gráficos mostram a mesma informação?
- Existem diferenças entre os gráficos I e II? Indique, em caso afirmativo, a(s) diferença(s) entre eles.
- Em uma primeira leitura do gráfico I, poder-se-ia concluir que houve uma queda brusca na taxa de desemprego, principalmente nos dois primeiros anos da gestão atual do governo. A que se deve essa conclusão?

O objetivo dessas questões é levar os alunos a concluir que uma informação pode ser mais (ou menos) valorizada, dependendo dos interesses de quem a divulga, isto é, a escala utilizada no gráfico I dá, ao leitor, a sensação de uma queda **brusca** na taxa de desemprego. No gráfico II observamos também a mesma queda na taxa de desemprego, porém visualmente menos acentuada.

■ Atividade 2: A função afim e a demografia

Objetivos

- Exercitar a construção e interpretação de gráficos.
- Identificar uma propriedade característica da função afim: o acréscimo linear, ligado ao fato de que, nessa função, a taxa média de variação é constante.
- Ilustrar o conceito de razão por meio da densidade demográfica.
- Criar possibilidades de integração com outra área do conhecimento – a Geografia – ao tratar da evolução da população brasileira ao longo de mais de um século.

Material

- Régua, lápis, borracha, papel sulfite ou milimetrado e calculadora.
- Opcionalmente, havendo possibilidade, é interessante dispor de um retroprojedor ou *data-show* a fim de que o gráfico possa ser mostrado coletivamente, proporcionando socialização e visualização mais adequadas.

Número de aulas: de 3 a 4.

Desenvolvimento

1ª etapa

- Fornecer a todos os alunos a tabela seguinte, que contém dados sobre a densidade demográfica (número de habitantes por km²) no Brasil, no período de 1872 a 2010.

Tabela 1

Ano	Densidade demográfica (hab./km ²)
1872	1,17
1890	1,68
1900	2,05
1920	3,6
1940	4,84
1950	6,1
1960	8,34
1970	11,1
1980	14,23
1991	17,26
2000	19,92
2010	22,43

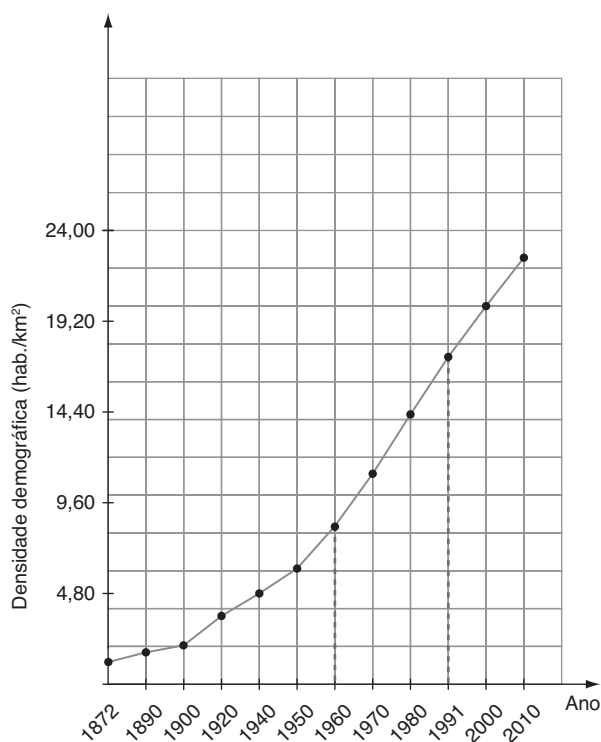
Fonte: Banco de Dados Séries Estatísticas & Séries Históricas do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).
Disponível em: <<http://seriesestatisticas.ibge.gov.br>>.
Acesso em: 5 jun. 2013.

- É interessante comentar com a classe que o primeiro Censo Demográfico Nacional ocorreu em 1872. Com a criação do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 1935, ficou estabelecido que os censos tivessem periodicidade decenal, conforme

consta na tabela 1. A única exceção a essa periodicidade ocorre no censo de 1991 (que deveria ser realizado em 1990).

- Pedir aos alunos que façam o gráfico cartesiano para representar a variação das duas grandezas, cujos valores são dados na tabela 1: ano e densidade demográfica. Os alunos deverão marcar os pontos correspondentes no plano cartesiano, unindo-os por segmentos de reta, construindo, dessa maneira, um gráfico de linhas. Lembrá-los da necessidade de uma escala apropriada na construção do gráfico.

Os alunos deverão obter um gráfico semelhante ao mostrado a seguir.



- Se houver material apropriado, é interessante projetar o gráfico anterior para que os alunos o comparem com o gráfico construído por eles. Caso contrário, o professor deve, durante a construção do gráfico, circular pela classe e esclarecer dúvidas.
- Propor para a classe a seguinte situação-problema: É possível estimar, sem fazer medições com a régua, a densidade demográfica brasileira em 1973? E em 1985? Que suposições são necessárias para a obtenção dessas estimativas?

Se necessário, fornecer, depois de um tempo de reflexão dos alunos, a informação de que, entre 1960 a 1991, os pontos do gráfico estão praticamente alinhados.

Solução: Para resolver esse problema, os alunos deverão reconhecer e admitir que, no período de 1960 a 1991, o aumento da densidade demográfica é praticamente constante, por intervalos iguais de tempo (décadas), isto é, o acréscimo pode ser considerado **linear**.

Tabela 2

1960	1970	1980	1991
8,34	11,1	14,23	17,26

Observe que o acréscimo, por década, é aproximadamente igual a 3 habitantes por km². Pode-se também trabalhar com os valores da tabela 2, arredondados para o número inteiro mais próximo (o que pode ser observado na tabela 3):

Tabela 3

1960	1970	1980	1991
8	11	14	17

Caso o professor deseje ilustrar essa propriedade, pode solicitar aos alunos que calculem a taxa média de variação da densidade demográfica nos períodos a seguir. Nesses casos, poderão ser usados os dados exatos (tabela 2) ou aproximados (tabela 3).

- 1960 a 1991 $\Rightarrow \frac{17 - 8}{31} = 0,29 \frac{\text{hab./km}^2}{\text{ano}}$
- 1960 a 1980 $\Rightarrow \frac{14 - 8}{20} = 0,3 \frac{\text{hab./km}^2}{\text{ano}}$
- 1970 a 1991 $\Rightarrow \frac{17 - 11}{21} = \frac{6}{21} \cong 0,286 \frac{\text{hab./km}^2}{\text{ano}}$
- 1960 a 1970 $\Rightarrow \frac{11 - 8}{10} = \frac{3}{10} = 0,3 \frac{\text{hab./km}^2}{\text{ano}}$
- 1970 a 1980 $\Rightarrow \frac{14 - 11}{10} = \frac{3}{10} = 0,3 \frac{\text{hab./km}^2}{\text{ano}}$
- 1980 a 1991 $\Rightarrow \frac{17 - 14}{11} = \frac{3}{11} = 0,273 \frac{\text{hab./km}^2}{\text{ano}}$

Verifica-se, desse modo, que a taxa média de variação é praticamente constante, o que caracteriza a função afim.

Desse modo, considerando um acréscimo na densidade de $0,3 \frac{\text{hab./km}^2}{\text{ano}}$, é possível resolver a situação-problema proposta anteriormente, ou seja, estimar as densidades demográficas em 1973 e em 1985:

- Estimativa da densidade demográfica para o ano de 1973 (d_{1973}):
 $1970 \rightarrow d_{1970} = 11,1 \text{ habitantes/km}^2$
 $1973 \rightarrow d_{1973} = 11,1 + 3 \cdot 0,3 = 11,1 + 0,9 \Rightarrow$
 $\Rightarrow d_{1973} = 12 \text{ habitantes/km}^2$
- Estimativa da densidade demográfica para o ano de 1985 (d_{1985}):
 $1980 \rightarrow d_{1980} = 14,23 \text{ habitantes/km}^2$
 $1985 \rightarrow d_{1985} = 14,23 + 5 \cdot 0,3 = 15,73 \text{ habitantes/km}^2 (*)$

Poderíamos também ter tomado como referência outro ano para estimar a densidade demográfica em 1985, por exemplo, o ano de 1970:

- $1970 \rightarrow d_{1970} = 11,1 \text{ habitantes/km}^2$
- $1985 \rightarrow d_{1985} = 11,1 + 15 \cdot 0,3 = 15,6 \text{ habitantes/km}^2 (**)$

Se julgar necessário, comente com os seus alunos que a pequena diferença entre os valores (*) e (**) deve-se aos arredondamentos da tabela 3 e às suposições estabelecidas para se determinar o acréscimo anual na densidade demográfica.

2ª etapa

- De posse da tabela 1, pedir aos alunos que, com o auxílio de uma calculadora, estimem a população brasileira nos anos destacados nessa tabela.

Para isso, eles deverão conhecer a área da superfície territorial brasileira, que será admitida constante e igual a 8 514 876 km² (o Acre só foi incorporado definitivamente ao território brasileiro em 1903).

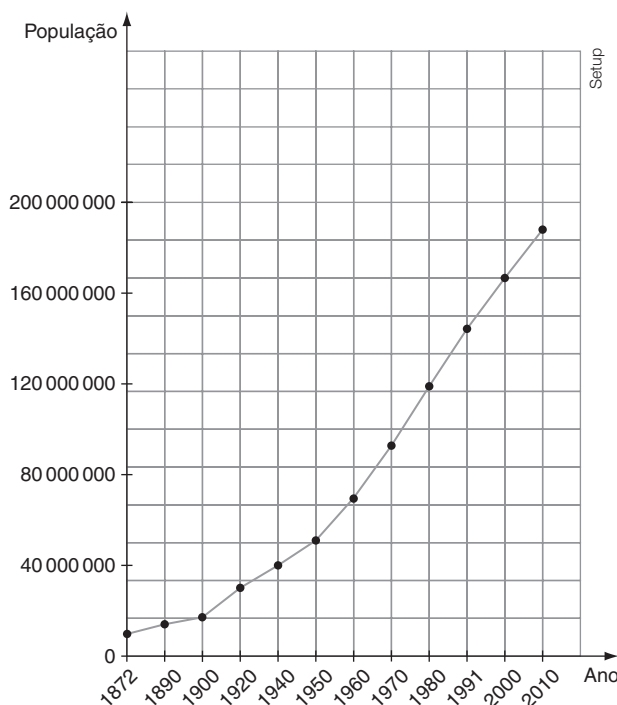
Por meio da razão (densidade demográfica =

$$= \frac{\text{número de habitantes}}{\text{número de quilômetros quadrados}}) \text{ é possível}$$

efetuar uma estimativa, para cada ano, da população brasileira.

- Pedir à turma que, depois de efetuados os cálculos, construam um gráfico para representar a população brasileira nesse período.

Os alunos deverão apresentar um gráfico semelhante ao seguinte:



Há considerações importantes a fazer: por exemplo, a densidade demográfica em 2010 (22,43 habitantes/km²) é praticamente o dobro da densidade demográfica de 1970 (11,1 habitantes/km²).

Como consequência, a população do Censo de 2010 deve ser aproximadamente o **dobro** da população do Censo de 1970. Esse fato está ligado à propriedade a seguir: Se $x = \frac{y}{z}$ e a grandeza z é constante, então as grandezas x e y são diretamente proporcionais.

■ Atividade 3: Os índices de obesidade, a Matemática, a Biologia e a Educação Física

Objetivos

- Usar as definições de potências e suas propriedades na resolução de problemas ligados aos índices de avaliação da obesidade (IMC e IAC).
- Aplicar a resolução de equações e inequações de 1º grau em situações-problema.
- Conscientizar os alunos sobre os danos à saúde causados pela obesidade e sobre a importância de uma alimentação balanceada e saudável.
- Possibilitar a realização de uma atividade interdisciplinar relacionando a Matemática com a Educação Física e a Biologia.

Material

- Além do material escolar básico, será necessário o uso de calculadoras comuns.
- Para as medições nas aulas de Educação Física, deverão ser providenciadas fitas métricas e balanças.

Número de aulas: de 4 a 6.

Desenvolvimento

- 1) Distribuir/ler com os alunos, de preferência acompanhados pelos professores de Educação Física e Biologia, o seguinte texto:

Obesidade

Dados do Ministério da Saúde revelam que quase metade (48,1%) da população brasileira está acima do peso. Além disso, o percentual de obesos é de 15,8%.

Um dos fatores que favorecem o aumento do sobrepeso e da obesidade no Brasil é o consumo de alimentos gordurosos: quase 35% comem carnes gordurosas e 57% bebem leite integral regularmente. Além disso, quase 30% dos brasileiros consomem refrigerantes pelo menos cinco vezes por semana.

Em contrapartida, apenas 20% da população comem cinco ou mais porções de frutas e hortaliças por dia. A obesidade é um fator de risco para a saúde e tem relação direta com altos níveis de gordura e açúcar no sangue, excesso de colesterol e de pré-diabetes. Pessoas obesas têm mais chance de adquirir doenças cardiovasculares.

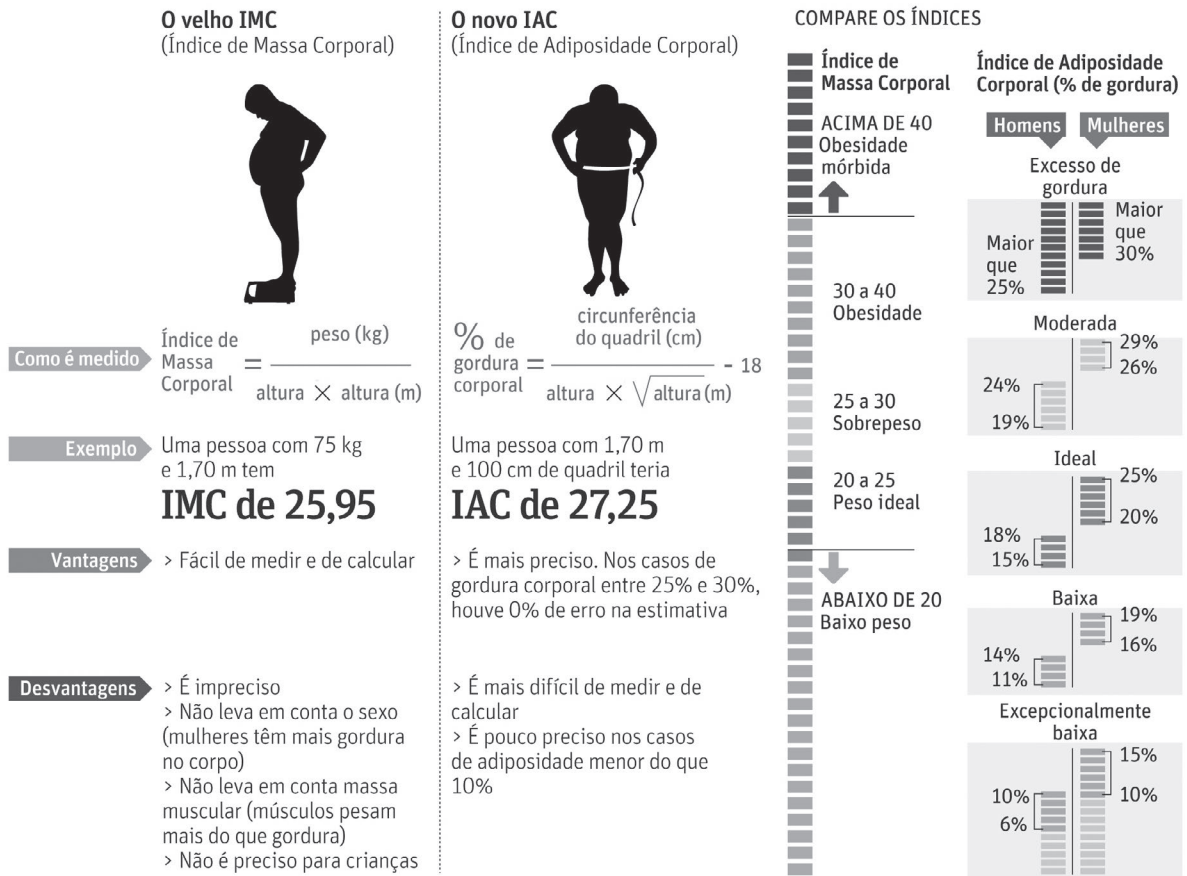
O Ministério da Saúde, por meio de parcerias diversas, tem investido na promoção de hábitos saudáveis: metas de redução do consumo excessivo de sal, planos de combate ao tabagismo, construção de polos com infraestrutura e profissionais qualificados para a orientação de atividades físicas e de lazer e melhoria da qualidade de vida do brasileiro.

O critério mais conhecido para medir os estados de obesidade de uma pessoa é o IMC (Índice de Massa Corporal), que, por ser de fácil determinação, é usado há muito tempo. Mas não há unanimidade quanto ao uso do IMC apenas para caracterizar um estado de obesidade: indivíduos com maior massa muscular podem ter o mesmo IMC de indivíduos obesos.

Para caracterizar de forma mais ampla o estado de obesidade de uma pessoa, associa-se o valor do IMC a outro índice – bem mais recente –, o IAC (Índice de Adiposidade Corporal).

GORDURA EM ESCALA

Novo cálculo parte da altura e da medida do quadril



Fonte: Ministério da Saúde.

- 2) Antes de iniciar as medições, o professor deve discutir com os alunos qual dos índices (IMC ou IAC) é mais fácil de ser determinado a partir da leitura do texto. Os alunos deverão reconhecer que, no cálculo do IAC, pode-se usar uma expressão equivalente, lembrando que $h\sqrt{h} = h \cdot h^{\frac{1}{2}} = h^{\frac{3}{2}}$; $h > 0$. Em alguns itens, poderá ser usada essa outra expressão.
- 3) Na aula de Educação Física, acompanhados também pelo professor de Matemática, os alunos devem fazer as medições necessárias para se determinar seu IMC e seu IAC. Para isso, eles devem ser divididos em grupos escolhidos por eles e os professores devem ficar atentos para evitar constrangimentos com eventuais alunos obesos. Será necessário o uso de balanças e fitas métricas. Cabe ao professor de Educação Física mostrar aos alunos como efetuar a correta medição da circunferência do quadril para que eles possam efetuar as medições dos colegas.
- 4) Cada aluno deverá verificar em que classificação se enquadra, tanto no caso do IMC (baixo peso, peso ideal, sobrepeso, obesidade e obesidade mórbida) como no do IAC (excepcionalmente baixa, baixa, ideal, moderada e excesso de gordura).
- 5) Nas aulas de Biologia, abre-se a oportunidade de aprofundamento nos seguintes tópicos:
 - as fontes de energia para o corpo humano;
 - caracterização e formação dos carboidratos, lipídios e proteínas;
 - estudo do colesterol: HDL (benéfico para o organismo) e LDL (o que se acumula nas paredes das artérias);
 - vantagens de consumir alimentos integrais;
 - alimentação saudável;
 - benefícios da atividade física;
 - algumas doenças associadas à obesidade: hipertensão arterial, risco maior de ocorrência de doenças cardiovasculares etc.

- 6) Na aula de Matemática, os alunos, divididos em grupos de 3 ou 4 componentes, deverão responder às questões seguintes, com a posterior correção e socialização dos procedimentos utilizados. O objetivo agora é explorar os valores obtidos, associados aos cálculos desses índices. Deverão ser usadas, nesta etapa, calculadoras comuns.

- a) Usando os dois índices, determine a categoria em que se enquadraria uma mulher de 75 kg, 1,69 m de altura e 100 cm de quadril.

Solução:

$$\blacksquare \text{ IMC} = \frac{75}{1,69^2} \Rightarrow \text{IMC} \cong 26,26 \rightarrow$$

→ Categoria: sobrepeso.

$$\blacksquare \text{ IAC} = \frac{100}{1,69^{\frac{3}{2}}} - 18 = \frac{100}{\left(\frac{169}{100}\right)^{\frac{3}{2}}} - 18 =$$

$$= \frac{100}{\left[\left(\frac{13}{10}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - 18 = \frac{100}{\left(\frac{13}{10}\right)^3} - 18 =$$

$$= 45,51 - 18 = 27,51\% \rightarrow$$

→ Categoria: gordura moderada.

- b) Usando os dois índices, determinar a categoria em que se enquadra um homem de 80 kg, 1,80 m de altura e 95 cm de quadril. Use a aproximação $\sqrt{5} = 2,2$.

Solução:

$$\blacksquare \text{ IMC} = \frac{80}{1,8^2} \Rightarrow \text{IMC} \cong 24,7 \rightarrow$$

→ Categoria: peso ideal.

$$\blacksquare \text{ IAC} = \frac{95}{1,8^{\frac{3}{2}}} - 18 = \frac{95}{\left(\frac{18}{10}\right)^{\frac{3}{2}}} - 18 =$$

$$= \frac{95}{\left(\frac{9}{5}\right)^{\frac{3}{2}}} - 18 = \frac{95}{\frac{9}{5} \cdot \sqrt{\frac{9}{5}}} - 18 =$$

$$= \frac{95}{\frac{9}{5} \cdot \frac{3}{2,2}} - 18 = 38,7 - 18 =$$

$$= 20,7\% \rightarrow \text{Categoria: gordura moderada.}$$

- c) Uma pessoa mede 1,70 m. Entre que valores poderão variar a sua massa para que, segundo o IMC, ela esteja com o peso ideal?

Solução:

Na classificação peso ideal, devemos ter:

$$20 \leq \frac{x}{1,7^2} \leq 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 57,8 \text{ kg} \leq x \leq 72,25 \text{ kg}$$

A massa dessa pessoa pode variar dentro do intervalo [57,8 kg, 72,25 kg].

- d) Considere um homem de 1,96 m de altura. A partir de quais valores da circunferência de seu quadril ele estará com excesso de gordura?

Solução:

$$\text{IAC} > 25 \Rightarrow \frac{x}{1,96 \cdot \sqrt{1,96}} - 18 > 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1,96 \cdot 1,4} > 43 \Rightarrow x > 117,99 \text{ cm}$$

Assim, se a circunferência medir 118 cm ou mais, ele estará com excesso de gordura.

- e) Um atleta de 1,69 m apresenta IAC de 20%.

Determine:

- a circunferência de seu quadril.

Solução:

$$20 = \frac{x}{1,69 \cdot \sqrt{1,69}} - 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 38 = \frac{x}{1,69 \cdot 1,3} \Rightarrow x \cong 83,5 \text{ cm}$$

- seu IMC, sabendo que ele tem 65 kg.

Solução:

$$\text{IMC} = \frac{65}{1,69^2} \Rightarrow \text{IMC} \cong 22,76$$

- f) Uma mulher mediu o seu IMC e obteve o valor limite das categorias peso ideal e sobrepeso. Sabendo que ela tem 75 kg e tem IAC igual a 28%, determine a medida da circunferência de seu quadril. Use as aproximações: $\sqrt{3} = 1,7$ e $\sqrt[4]{3} = 1,3$.

Solução:

Observe que o valor limite citado é de 25. Temos:

$$\text{IMC} = \frac{75}{h^2} \Rightarrow 25 = \frac{75}{h^2} \Rightarrow h^2 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{3} = 1,70 \text{ m}$$

$$\text{IAC} = \frac{x}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3}} - 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 28 + 18 = \frac{x}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 46 \cdot 1,7 \cdot 1,3 \Rightarrow x = 101,66 \text{ cm}$$

Analise e julgue em verdadeiras (V) ou falsas (F) as situações *g* e *h* a seguir:

- g) Se um homem com 75 kg, 1,70 m e 100 cm de quadril conseguir, através de dieta e exercícios, reduzir em 15% sua circunferência do quadril, ele ficará com IAC ideal.

Solução:

A afirmação é falsa, pois seu novo IAC será:

$$\text{IAC} = \frac{85}{\sqrt{1,7} \cdot 1,7} - 18 =$$

$$= \frac{85}{1,3 \cdot 1,7} - 18 \cong 20,46\%$$

(Categoria: gordura moderada)

- h) Dois amigos têm exatamente o mesmo peso e a altura de um é 10% maior que a altura do outro. O IMC do mais alto é cerca de 17% menor que o IMC do seu amigo.

Solução:

A afirmação é verdadeira:

■ O IMC do mais baixo é: $I_1 = \frac{x}{h^2}$.

■ O IMC do mais alto é:

$$I_2 = \frac{x}{(1,1h)^2} = \frac{x}{1,21h^2} = \frac{1}{1,21} \cdot \frac{x}{h^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = 0,8264I_1 \approx 0,83I_1$$

Assim, o índice de massa corpórea do mais alto é 17% ($1 - 0,17 = 0,83$) menor que o de seu amigo (mais baixo).

■ Atividade 4: As funções exponencial e logarítmica nos cálculos de datação radioativa

Objetivos

- Utilizar os conceitos estudados nos capítulos de função exponencial e função logarítmica para resolver problemas envolvendo outras áreas do conhecimento.
- Aprofundar as discussões apresentadas no capítulo 7 sobre função exponencial e meia-vida de um isótopo radioativo na seção *Aplicações*.
- Conhecer a técnica de datação da idade de um material através do método do carbono-14, usada em Arqueologia e Antropologia.
- Valorizar habilidades como leitura e interpretação.

Material

A atividade poderá ser desenvolvida com o material escolar básico. Opcionalmente, poderá ser usada a calculadora científica para obtenção de valores de alguns logaritmos com várias casas decimais, a fim de melhorar as aproximações e os resultados.

Número de aulas: de 3 a 4.

Desenvolvimento

- Separe a turma em grupos de 3 ou 4 alunos.
- Distribua para cada aluno o texto seguinte, cujo título pode ser: *Datando com o carbono-14*.

A datação por carbono-14 é um método usado pelos cientistas, principalmente arqueólogos, antropólogos e químicos, para determinar a idade, aproximada dos mais diversos artefatos (ossos, manuscritos antigos, tecidos vegetais etc.).

Os especialistas estimam que esse método funciona bem para datações de objetos que tenham entre 100 e 40 000 anos de idade, aproximadamente.

Vamos dar uma ideia de como isso funciona. O carbono-14 é radioativo e se desintegra produzindo nitrogênio-14. Sua meia-vida é de 5 730 anos, isto é, a cada 5 730 anos restará apenas metade dos átomos de carbono-14 (indicaremos por C-14). Os seres vivos

recebem o C-14 através de alimentos e água e mantêm um nível constante deste elemento no corpo enquanto permanecem com vida. Quando morrem, o C-14 que se desintegra não é mais substituído, de modo que o nível de C-14 diminui pela metade a cada 5 730 anos até ser praticamente nulo. Através de uma moderna técnica de medição é possível calcular o nível de C-14 em uma amostra e, através dela, podemos estimar o tempo necessário para que o nível de C-14 existente no corpo antes de sua morte pudesse chegar a esse nível medido.

Essa técnica valeu a Willard Frank Libby (1908-1980) o Prêmio Nobel de Química em 1960.

Texto elaborado com base no endereço eletrônico:

<www.qnesc.sbq.org.br/online/qnesc16>.

Acesso em: 22 jan. 2014.

Com base no texto anterior e na seção *Aplicações*, resolva os seguintes problemas:

- 1º) Em um pedaço de carvão vegetal, encontrado em uma cova, verificou-se que a taxa de decomposição do C-14 é $\frac{1}{8}$ da taxa de amostra viva com o mesmo tamanho desse carvão. Qual é a sua idade?

Solução:

Como vimos no texto apresentado no livro na seção *Aplicações*, podemos usar a lei $n = \frac{n_0}{2^x}$, sendo n_0 o número de átomos radioativos de uma amostra viva de C-14, n o número de átomos de C-14 medido na amostra de carvão recolhida e x o número de meias-vidas transcorridas:

Do enunciado, temos que $n = \frac{1}{8} n_0$

Daí:

$$\frac{1}{8} n_0 = \frac{n_0}{2^x} \Rightarrow 2^{-x} = 2^{-3} \Rightarrow x = 3 \text{ meias-vidas ou}$$

$$3 \cdot 5\,730 = 17\,190 \text{ anos}$$

- 2º) Deseja-se estimar a idade de um material orgânico por datação do C-14. Medições feitas em uma amostra indicam que a quantidade de átomos radioativos de C-14 é 60% da quantidade de átomos radioativos de uma amostra viva do mesmo tamanho desse material. Faça uma estimativa da idade dessa amostra colhida, usando as aproximações $\log 2 = 0,3010$ e $\log 3 = 0,4771$.

Solução:

Devemos ter $n = \frac{3}{5} n_0$

Daí $\frac{3}{5} n_0 = \frac{n_0}{2^x} \Rightarrow 2^x = \frac{5}{3} \Rightarrow \log 2^x = \log \left(\frac{5}{3} \right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \cdot \log 2 = \log 5 - \log 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log \left(\frac{10}{2} \right) - \log 3}{\log 2} = \frac{\log 10 - \log 2 - \log 3}{\log 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 - \log 2 - \log 3}{\log 2}$$

Se usarmos as aproximações, temos:

$$x = \frac{1 - 0,301 - 0,4771}{0,301} \cong 0,7372 \text{ meia-vida}$$

A idade aproximada dessa amostra é, portanto, $0,7372 \cdot 5730 \cong 4224$ anos.

É interessante discutir com a turma as diferenças obtidas de acordo com as aproximações usadas. Se tivéssemos usado as aproximações $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$, teríamos encontrado:

$$x = \frac{1 - 0,3 - 0,48}{0,3} = \frac{0,22}{0,3} \cong 0,7333 \text{ meia-vida}$$

$$0,7333 \cdot 5730 = 4202 \text{ anos}$$

Nesse problema, a diferença de 22 anos não interfere na ordem de grandeza do resultado; no entanto, é preciso ficar atento às possíveis distorções em outros problemas que requerem aproximações.

- 3º) Sabendo que 20% de uma substância radioativa decai em 10 anos, qual é a meia-vida dessa substância? Use a aproximação $\log 2 = 0,301$.

Solução:

Se 20% da substância se desintegrou, significa que, após 10 anos, a sua atividade radioativa é de 80% de uma amostra viva de mesmo tamanho dessa substância; isto é, $n = \frac{4}{5}n_0$. Daí:

$$\frac{4}{5}n_0 = \frac{n_0}{2^x} \quad (x \text{ é o número de meias-vidas})$$

$$2^x = \frac{5}{4} = \log 2^x = \log \left(\frac{5}{4} \right) \Rightarrow x \cdot \log 2 = \log 5 - \log 4$$

$$x \cdot \log 2 = \log \left(\frac{10}{2} \right) - \log 2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \log 2 = 1 - \log 2 - 2 \log 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 - 3 \log 2}{\log 2} = \frac{1 - 3 \cdot 0,301}{0,301} =$$

$$= 0,3222 \text{ meia-vida}$$

Assim, podemos estabelecer a proporção:

$$\begin{cases} 10 \text{ anos} & \text{--- } 0,3222 \text{ meia-vida} \\ x & \text{--- } 1 \text{ meia-vida} \end{cases} \Rightarrow x \cong 31 \text{ anos}$$

- 4º) Os alunos deverão receber o seguinte texto:

Os Manuscritos do Mar Morto

Conta-se que, em 1947, um pastor chamado Mohamad Adh-Dhib descobriu, casualmente, nas estreitas Cavernas de Qumran, próximo ao Mar Morto (na região fronteira entre Israel e Jordânia), um conjunto de rolos e pergaminhos de papiro, que viriam a ser conhecidos como os "Manuscritos do Mar Morto". A coleção de manuscritos é extensa, tendo sido encontrados fragmentos de quase todos os livros da Bíblia Hebraica (correspondentes ao Antigo Testamento). Atualmente, estão guardados no Museu do Livro, em Jerusalém - Israel.

Em 1948, uma vez provada a autenticidade dos pergaminhos, tornou-se fundamental descobrir sua data de confecção, a partir do método do carbono-14. O químico Libby, citado no texto anterior, ficou encarregado de realizar essas medições. Ele constatou que a atividade do carbono-14 nos manuscritos era de aproximadamente $11 \text{ dpm} \cdot \text{g}^{-1}$ (desintegrações por minuto por grama).

Sabendo que a atividade radioativa do C-14 no tecido vivo é de $14 \text{ dpm} \cdot \text{g}^{-1}$, determine a idade aproximada dos Manuscritos do Mar Morto.

Use as aproximações $\ln 11 = 2,3978$, $\ln 14 = 2,6391$ e $\ln 2 = 0,6931$.

Solução:

De $n = \frac{n_0}{2^x}$, podemos considerar $n_0 = 14 \text{ dpm} \cdot \text{g}^{-1}$, $n = 11 \text{ dpm} \cdot \text{g}^{-1}$ e x o número de meias-vidas. Daí:

$$11 = \frac{14}{2^x} \Rightarrow \frac{11}{14} = \frac{1}{2^x} \Rightarrow 2^x = \frac{14}{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 2^x = \ln \left(\frac{14}{11} \right) \Rightarrow x \cdot \ln 2 = \ln 14 - \ln 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\ln 14 - \ln 11}{\ln 2} = \frac{2,6391 - 2,3978}{0,6931} =$$

$$= \frac{0,2413}{0,6931} \Rightarrow x \cong 0,34815 \text{ meia-vida}$$

Como a meia-vida do C-14 é 5730 anos, segue que a idade dos manuscritos é: $0,34815 \cdot 5730 \cong 1995$ anos.

■ Atividade 5: Sequências e padrões geométricos

Essa atividade pode ser utilizada para trabalhar previamente o conceito de sequência que será formalizado no capítulo 10 (Progressões).

Objetivos

- Observar regularidades em padrões geométricos.
- Formular conjecturas, levantar hipóteses e realizar testes.
- Escrever o termo geral de uma sequência.
- Socializar diferentes soluções para um mesmo problema.
- Proporcionar discussões coletivas a partir das respostas obtidas pelos alunos.

Material

- Material escolar básico (papel, lápis e borracha).
- Caso haja a possibilidade e material adequado, o professor pode utilizar um projetor ou *data-show* para visualizar as imagens que serão usadas.

Número de aulas: de 2 a 3.

Desenvolvimento

Divida a classe em grupos e distribua, a cada aluno, as duas imagens que serão utilizadas a seguir.

Imagem que será utilizada na 1ª parte da atividade

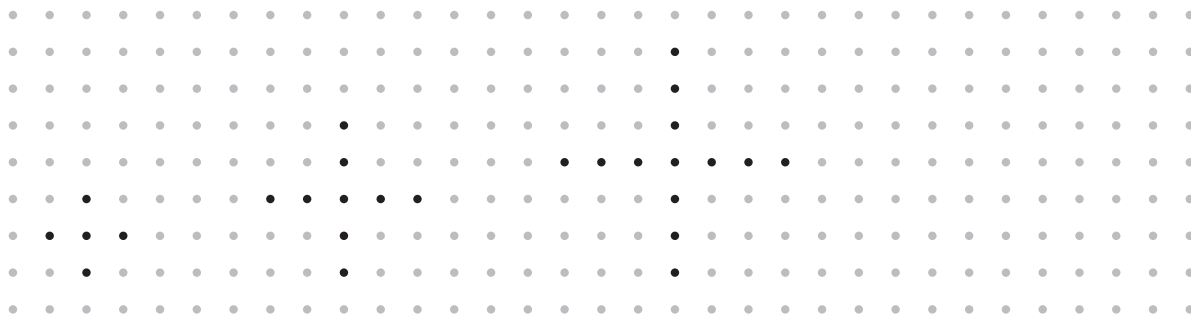
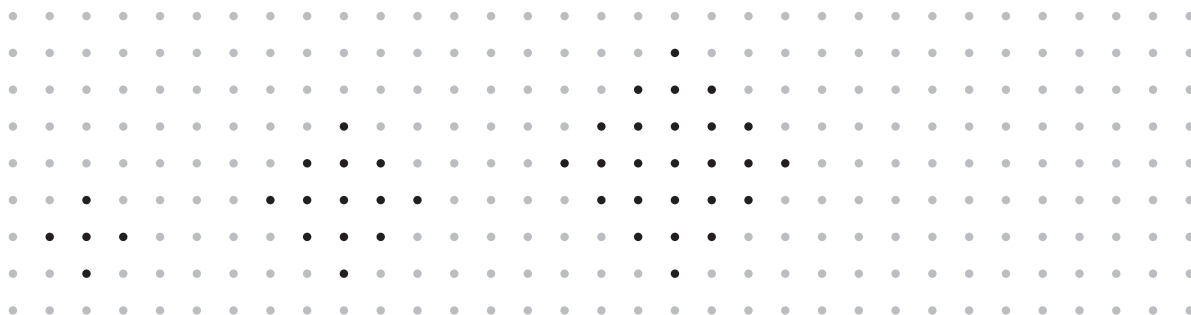


Imagem que será utilizada na 2ª parte da atividade



1ª parte da atividade

Os alunos deverão analisar a sequência de figuras com cuidado, fazendo as observações e anotações que julgarem importantes. Em seguida, deverão responder às seguintes perguntas:

- 1) Qual é o número de pontos destacados naquela que seria a 5ª figura da sequência? E o número de pontos da 10ª? Represente-as em seu caderno.
- 2) Nessa sequência, qual é a posição da figura que apresenta 93 pontos destacados?
- 3) Há alguma figura que apresenta 122 pontos destacados? E 497 pontos destacados?
- 4) Qual é a quantidade de pontos destacados na enésima figura, isto é, qual é o termo geral dessa sequência?

Soluções

Observe que:

$n = 1$ (1ª figura): 5 pontos destacados \Rightarrow

$$\Rightarrow \underbrace{4 \cdot 1}_{\substack{\text{1 ponto em} \\ \text{cada direção} \\ \text{(acima, abaixo,} \\ \text{à direita, à esquerda)}}} + \underbrace{1}_{\text{ponto central}}$$

$n = 2$ (2ª figura): 9 pontos destacados \Rightarrow

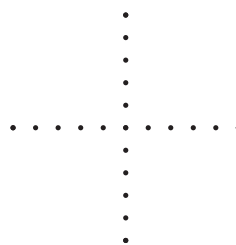
$$\Rightarrow \underbrace{4 \cdot 2}_{\substack{\text{2 pontos em} \\ \text{cada direção}}} + \underbrace{1}_{\text{ponto central}}$$

$n = 3$ (3ª figura): 13 pontos destacados \Rightarrow

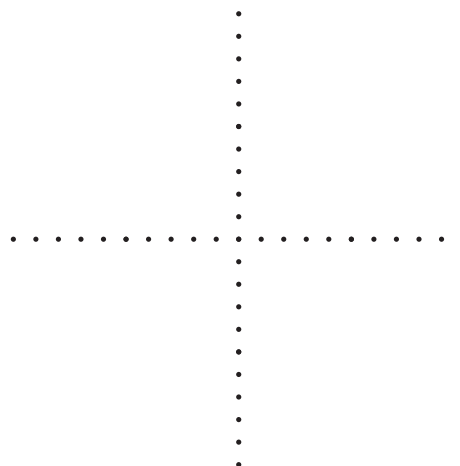
$$\Rightarrow \underbrace{4 \cdot 3}_{\substack{\text{3 pontos em} \\ \text{cada direção} \\ \vdots}} + \underbrace{1}_{\substack{\text{ponto central} \\ \vdots}}$$

O aluno pode resolver esse problema, mesmo não tendo aprendido progressão aritmética.

1) 5ª figura: $4 \cdot 5 + 1 = 21$ pontos



10ª figura: $4 \cdot 10 + 1 = 41$ pontos



- 2) Devemos determinar n tal que:
 $4 \cdot n + 1 = 93 \Rightarrow n = 23$ (23ª figura)
- 3) $122 = 4 \cdot n + 1 \Rightarrow n \notin \mathbb{N}$ (para essa sequência, não existe uma figura com 122 pontos)
 $497 = 4 \cdot n + 1 \Rightarrow n = 124$ (124ª figura)
- 4) $a_n = 4 \cdot n + 1$; $n \in \mathbb{N}^*$ (termo geral da sequência)

2ª parte da atividade

Após uma análise, os alunos deverão responder às questões seguintes:

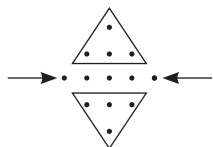
- 1) Qual é o número de pontos destacados da 5ª figura?
E da 10ª figura?
- 2) Qual é o termo geral da sequência de pontos destacados, isto é, qual é o número de pontos destacados na figura que ocupa a n ésima posição?
- 3) Qual é a posição de uma figura que apresenta 313 pontos destacados?

Soluções

1º modo: Sem conhecer os conceitos de progressão aritmética.

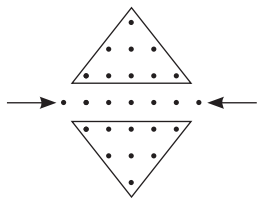
Observe que, considerando a “horizontal com o maior número de pontos”, as figuras são simétricas em relação a essa horizontal.

Por exemplo, se $n = 2$ (2ª figura), temos:



Total de pontos = $5 + 2 \cdot 4 = 13$.

Se $n = 3$ (3ª figura), a quantidade de pontos destacados é:



Total de pontos = $7 + 2 \cdot 9 = 25$.

Na 4ª figura, teríamos um total de pontos correspondente a: $9 + 2 \cdot 16 = 41$.

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 3 + 2 \cdot 1 = (2 \cdot 1 + 1) + 2 \cdot 1^2$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 5 + 2 \cdot 4 = (2 \cdot 2 + 1) + 2 \cdot 2^2$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 7 + 2 \cdot 9 = (2 \cdot 3 + 1) + 2 \cdot 3^2$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 9 + 2 \cdot 16 = (2 \cdot 4 + 1) + 2 \cdot 4^2$$

• • • • •

$$n = a_n = (2 \cdot n + 1) + 2 \cdot n^2 = 2n^2 + 2n + 1$$

2º modo: Utilizando os conceitos de progressão aritmética.

Outra possibilidade é usar a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética e a simetria da figura (nesse caso, o termo “horizontal” corresponde à linha com o maior número de pontos de cada figura).

Para tanto, vamos observar as sequências a seguir:

$$n = 1 \Rightarrow 3 \text{ (pontos na "horizontal")} + 2 \cdot 1$$

$$n = 2 \Rightarrow 5 \text{ (pontos na "horizontal")} + 2 \cdot (1 + 3)$$

$$n = 3 \Rightarrow 7 \text{ (pontos na "horizontal")} + 2 \cdot (1 + 3 + 5)$$

$$n = 4 \Rightarrow 9 \text{ (pontos na "horizontal")} + 2 \cdot (1 + 3 + 5 + 7)$$

Em geral, na n -ésima posição, temos:

$$a_n = 2 \cdot n + 1 \text{ (pontos na "horizontal")} + \underbrace{2 \cdot (1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1)}_{\text{soma dos } n \text{ primeiros naturais ímpares}}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2n + 1 + \frac{2' \cdot [1 + (2n - 1)] \cdot n}{2'} = \\ &= 2n + 1 + 2n^2 = 2n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$

$$1) \ n = 5 \Rightarrow a_5 = 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = 61$$

$$n = 10 \Rightarrow a_{10} = 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 = 221$$

2) $a_n = 2n^2 + 2n + 1; n \in \mathbb{N}^*$

3) $313 = 2n^2 + 2n + 1 \Rightarrow n^2 + n - 156 = 0 \Rightarrow n = 12$
(12^a figura)

Considerações finais

Essa atividade mostra aos alunos o fato de que, na Matemática, um mesmo problema pode ser resolvido de formas distintas, utilizando-se ou não de conhecimentos prévios. É bem provável que, na condução dessa atividade, surjam várias alternativas de resoluções para essas sequências.

■ Atividade 6: Matemática financeira

Objetivos

- Reconhecer a importância da Matemática financeira em situações de nosso cotidiano.
- Aprofundar as discussões levantadas nos textos da seção *Aplicações* do capítulo 11.
- Decidir entre pagamento à vista ou a prazo.
- Identificar eventuais exageros e distorções que podem ocorrer em financiamentos praticados no comércio em geral.
- Compreender o conceito de valor atual de um conjunto de pagamentos a ser realizados em datas futuras.
- Aprofundar o conceito de juros compostos e rever progressão geométrica.

Material

- calculadora (científica, de preferência).
- lápis, borracha, folha de sulfite.
- jornais e revistas que contenham anúncios de venda de produtos, para opção de pagamento à vista e a prazo (complementação de atividade).

Número de aulas: 1 a 2

Desenvolvimento

1ª etapa

Divida a classe em grupos.

Leia e explique à classe o seguinte problema:

Um conjunto de sofás é vendido a prazo em 6 prestações mensais de R\$ 500,00 cada uma, sendo a primeira um mês após a compra. Se o pagamento for feito à vista, o preço cobrado é R\$ 2 850,00. Qual é a melhor alternativa de pagamento para um comprador que pode comprar o sofá à vista, mas que consegue aplicar seu dinheiro a juros compostos, à taxa de 1% a.m.?

Peça a cada grupo que simule a situação da possível compra a prazo destacando, em cada mês, o saldo inicial, os juros recebidos na aplicação, a retirada para pagamento da prestação e o saldo final.

Sugira aos grupos a seguinte tabela, que deverá ser preenchida como segue:

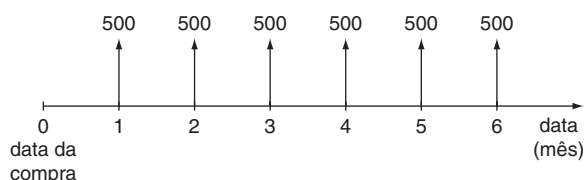
	Saldo inicial para aplicação	Juros recebidos	Retirada	Saldo final da aplicação
Ato da compra	2 850,00			
1 mês depois		$0,01 \cdot 2 850 = 28,50$	500	2 378,50
2 meses depois	2 378,50	$0,01 \cdot 2 378,50 = 23,79$	500	1 902,29
3 meses depois	1 902,29	$0,01 \cdot 1 902,29 = 19,03$	500	1 421,32
4 meses depois	1 421,32	$0,01 \cdot 1 421,32 = 14,21$	500	935,53
5 meses depois	935,53	$0,01 \cdot 935,53 = 9,36$	500	444,89
6 meses depois	444,89	$0,01 \cdot 444,89 = 4,50$	500	-50,61

A partir dos dados da tabela, decidir a opção mais vantajosa.

Naturalmente, os alunos deverão optar pelo pagamento à vista, pois faltou dinheiro na simulação acima. Observa-se que deixar o dinheiro aplicado e fazer retiradas mensais obriga o comprador a desembolsar R\$ 50,61 a mais para pagar a última prestação.

Solicite aos alunos que refaçam a questão proposta na 1ª etapa da atividade, valendo-se do conceito de valor atual de um conjunto de pagamentos.

Para facilitar, monte, na lousa, um esquema em que estão representados os valores das prestações a serem pagas em cada data.



- Faça a correção na lousa ou chame algum aluno disposto a explicar o raciocínio usado.

A resposta correta é:

$$V = \frac{500}{1,01} + \frac{500}{1,01^2} + \dots + \frac{500}{1,01^6}$$

$$V \cong 495,05 + 490,15 + 485,30 + 480,49 + 475,73 + 471,03$$

$$V \cong 2 897,75 \text{ reais}$$

- Qual é a conclusão?

Como o valor atual do pagamento parcelado (R\$ 2 897,75) é maior que o valor à vista (R\$ 2 850,00), deve-se optar pelo pagamento à vista.

2ª etapa

- Cada equipe deverá receber um anúncio de venda de carros como este:

Carro Veloz 1.4 completo

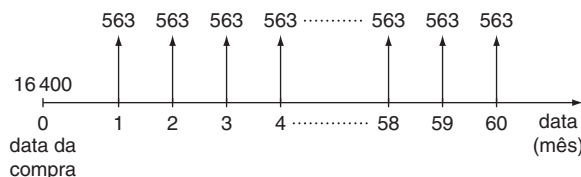
Ar-condicionado, direção hidráulica, travas e vidros elétricos.

Por R\$ ■ ou R\$ 16 400,00 + 60 × de R\$ 563/mês

- O valor à vista do carro foi propositalmente ocultado. Determine-o, sabendo que a concessionária operava com uma taxa de juros de 1,09% a.m. (Admita que a primeira parcela de R\$ 563,00 deva ser paga um mês depois da data da compra.)

Solução:

É preciso encontrar o valor atual dos pagamentos que serão efetuados nesse financiamento.



O valor atual desses pagamentos é: $16\,400 + v'$, sendo:

$$v' = \frac{563}{1,0109} + \frac{563}{1,0109^2} + \dots + \frac{563}{1,0109^{60}}$$

$$v' = 563 \cdot \left(\frac{1}{1,0109} + \frac{1}{1,0109^2} + \dots + \frac{1}{1,0109^{60}} \right) (*)$$

A sequência $\left(\frac{1}{1,0109}; \frac{1}{1,0109^2}; \dots; \frac{1}{1,0109^{60}} \right)$ é

uma P.G., em que $a_1 = \frac{1}{1,0109}$, $q = \frac{1}{1,0109}$ e

$n = 60$ termos.

Devemos determinar:

$$S_{60} = \frac{a_1 \cdot (q^{60} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{1,0109} \cdot \left[\left(\frac{1}{1,0109} \right)^{60} - 1 \right]}{\frac{1}{1,0109} - 1}$$

$$S_{60} \cong \frac{\frac{1}{1,0109} \cdot (0,521805 - 1)}{\frac{1}{1,0109} - 1} = \frac{-0,478105}{-0,0109} =$$

$$= 43,8711$$

Em (*) obtemos: $v' = 563 \cdot 43,8711 = 24\,699,43$

Assim, o valor atual dos pagamentos na compra financiada é: $16\,400 + 24\,699,43 = 41\,099,43$ (aproximadamente R\$ 41 100,00).

É importante destacar a diferença (de quase 10 mil reais) entre o valor total que seria desembolsado na compra a prazo ($563 \cdot 60 + 16\,400 = 50\,180,00$) e o valor à vista: 41 100 reais. Se a entrada dada fosse um valor menor, essa diferença seria maior.

Observação final: Os encartes de jornais trazidos pelos alunos podem proporcionar atividades semelhantes a essa, que, se devidamente organizadas, podem ser usadas como um instrumento diversificado de avaliação.

Exercícios complementares à seção Aplicações

Capítulo 4: Função afim

Função custo, receita e lucro

- Uma empresa tem custo fixo mensal de R\$ 1 800,00 para fabricação de um artigo. O custo variável por unidade é R\$ 9,00, e cada unidade é vendida por R\$ 15,00.
Seja x a quantidade de unidades produzidas e vendidas.

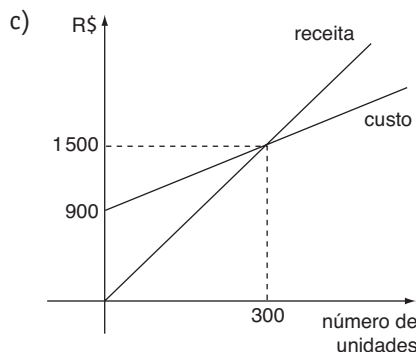
- Obtenha, em função de x , as leis que definem, por mês, o custo total, a receita e o lucro da empresa.
- Encontre os valores do custo total, receita e lucro para $x = 200$ e para $x = 500$.
- Qual é o ponto crítico ou de nivelamento?

Resposta:

- $C(x) = 9x + 1800$; $R(x) = 15x$; e $L(x) = 6x - 1800$
 - $x = 200 \Rightarrow R = 3000,00$; $C = 3600,00$; e $L = -600,00$
 $x = 500 \Rightarrow R = 7500,00$; $C = 6300,00$; e $L = 1200,00$
 - 300 unidades
- (Unicap-PE, adaptado) Mestre Florindo, raizeiro famoso, vende suas garrafadas medicinais por R\$ 5,00 na feira de Caruaru. Para fabricá-las, o mestre gasta R\$ 2,00 por garrafada, além de um custo fixo de R\$ 900,00.
 - Qual é a lei que define o lucro do mestre em função do número de unidades produzidas e vendidas?
 - Quantas garrafadas devem ser comercializadas para que o mestre tenha um lucro de R\$ 900,00?
 - Esboce o gráfico das funções custo e receita num mesmo plano cartesiano.

Solução:

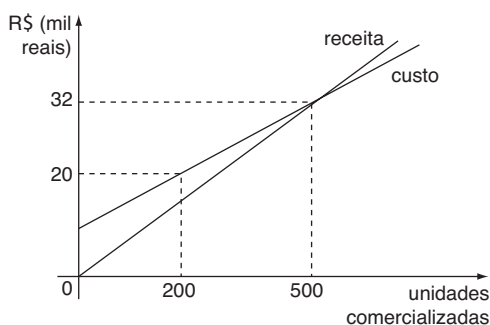
- $L(x) = 3x - 900$
- 600



- O custo fixo mensal de uma empresa que fabrica óleo lubrificante para motores automotivos é de R\$ 6 000,00. Cada litro de óleo é fabricado a R\$ 5,00. Sabe-se que o ponto de nivelamento é de 1 500 litros mensais.
 - Qual é o preço de venda de um litro de óleo?
 - Qual é o lucro mensal gerado pela produção e venda de 5 000 litros de óleo?

Resposta:

- R\$ 9,00
 - R\$ 14 000,00
- No gráfico seguinte estão representadas as funções mensais de custo e receita de uma empresa na comercialização (produção e venda) de certo artigo de informática.



- Para que valores de x a empresa começa a ter lucro?
- Qual é o preço unitário de produção e de venda do artigo?
- Qual é o custo fixo mensal da empresa?

Resposta:

- $x > 500$
 - Venda: R\$ 64,00; custo: R\$ 40,00
 - R\$ 12 000,00
5. Uma lanchonete produz salgadinhos a um custo unitário médio de R\$ 0,25. As despesas fixas mensais dessa lanchonete são de R\$ 2 500,00. Sabendo que em um determinado mês o dono da lanchonete teve um lucro líquido de R\$ 2 000,00 com a venda de 6 000 salgadinhos, determine o preço médio de venda de um salgadinho naquele mês.

Resposta: R\$ 1,00

■ Capítulo 5: Função quadrática

A receita máxima

- Um vendedor de cachorro-quente, cuja barraca está instalada na saída de um grande colégio, vende 120 lanches por dia, quando o preço de venda é R\$ 1,80. Se o preço for R\$ 2,00, são vendidas 100 unidades diárias. Admita que a relação entre o preço e o número de cachorros-quentes vendidos seja dada por uma função do 1º grau.
 - Qual é a lei da função que relaciona o preço (p) e o número de unidades vendidas (x)?
 - Qual deve ser o valor de x a fim de que a receita diária do vendedor seja máxima? Qual é a receita?

Resposta:

- $p = -0,01x + 3$
 - 150; R\$ 225,00
2. O dono de um estabelecimento comercial percebeu que, em média, ele consegue vender, em uma semana, 120 unidades de um produto quando o preço unitário de venda é R\$ 80,00. Além disso, ele sabe, por experiências anteriores, que para cada real de desconto no preço do produto o número de unidades vendidas semanalmente aumenta em 15.

Qual é o desconto percentual que deve ser oferecido a fim de que a arrecadação semanal seja máxima? Admita que possa ser oferecido até 60% de desconto em relação ao preço de venda do produto.

Resposta: 45%

- A diretoria de um clube de futebol europeu sabe que o número de torcedores (x), em milhares, que vão ao estádio depende do preço (p), em euros, do ingresso da arquibancada, segundo a relação $p = -\frac{3}{10}x + 27$.

- Qual é o preço do ingresso para a arquibancada, em um jogo em que o público é de 20 000 torcedores? E no caso de 50 000 torcedores?
- Qual preço deverá ser cobrado a fim de proporcionar receita máxima?

Resposta:

- 21,00 €; 12,00 €
- 13,50 €

- Uma empresa especializada em festas de formatura organizou um jantar para n ($150 \leq n \leq 300$) formandos. Cada participante deverá pagar uma taxa de $400 - n$ reais. Nessas condições, qual será a maior arrecadação possível no jantar?

Resposta: R\$ 40 000,00

■ Capítulo 7: Função exponencial

Matemática e Química: Radioatividade

- O iodo-131 é um isótopo radioativo usado em Medicina Nuclear para exames de tireoide. Sua meia-vida é de oito dias. Se hoje for ministrada a um paciente uma dose contendo n_0 átomos radioativos do iodo-131, qual é, em função de n_0 , a quantidade de átomos radioativos existentes daqui a:
 - 24 dias?
 - 40 dias?
 - 200 dias?

Resposta:

- $\frac{n_0}{8}$
- $\frac{n_0}{32}$
- $\frac{n_0}{2^{25}}$

- Um isótopo de um elemento químico tem meia-vida de 12 anos. Considere uma amostra de 160 g desse isótopo.
 - Faça uma tabela para representar a massa do isótopo existente daqui a:
 - 12 anos
 - 24 anos
 - 36 anos
 - 48 anos
 - 60 anos
 - 72 anos
 - Encontre a lei que forneça a massa (m) desse isótopo em função do número de meias-vidas (x) transcorridas. Faça o gráfico dessa função.

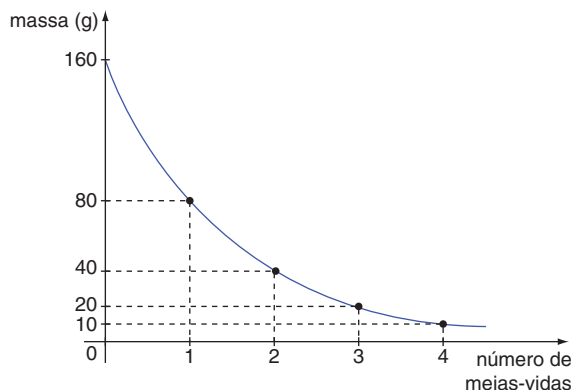
- c) Quantos anos serão necessários para que a massa do isótopo se reduza a 0,15625 g?

Resposta:

a)

Número de anos	12	24	36	48	60	72
Massa (em g)	80	40	20	10	5	2,5

b) $m = \frac{160}{2^x}$



- c) 120 anos (10 meias-vidas)

3. Um dos produtos que podem ser liberados nos acidentes em usinas nucleares é o isótopo do estrôncio-90 (Sr^{90}), cuja meia-vida é de 28 anos. Suponha que, em um acidente, tenham sido liberados 30 g desse isótopo. Determine:
- a) a massa desse isótopo 84 anos após o acidente;
 - b) o tempo necessário para que a massa desse isótopo seja de $15 \cdot 2^{-7}$ g.

Resposta:

- a) 3,75 g b) 224 anos

■ Capítulo 8: Função logarítmica

Matemática e Química: a escala de acidez e os logaritmos

1. Calcule o pH de uma solução aquosa, sendo:

- $[\text{H}^+] = 10^{-2} \text{ mol/}\ell$
- $[\text{H}^+] = 10^{-8} \text{ mol/}\ell$
- $[\text{H}^+] = \frac{1}{10} \text{ mol/}\ell$
- $[\text{H}^+] = 10^{-13} \text{ mol/}\ell$

Resposta:

- a) 2 b) 8 c) 1 d) 13

2. Determine a concentração de íons hidrogênio (em mols/ ℓ) – $[\text{H}^+]$ – em uma solução aquosa cujo pH vale:

- a) 1 b) 10 c) 7 d) 4,5

Resposta:

- $[\text{H}^+] = 10^{-1}$
- $[\text{H}^+] = 10^{-10}$
- $[\text{H}^+] = 10^{-7}$
- $[\text{H}^+] = 10^{-4,5}$

3. Calcule o pH das soluções, em cada caso, a partir da concentração de íons hidrogênio. (Use a aproximação $\log 2 = 0,3$.)

- $[\text{H}^+] = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mol/}\ell$
- $[\text{H}^+] = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ mol/}\ell$
- $[\text{H}^+] = 0,004 \text{ mol/}\ell$

Resposta:

- a) 2,7 b) 4,8 c) 2,4

4. Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das proposições seguintes e justifique:

- Quando o pH de uma solução aquosa aumenta de duas unidades, a concentração de íons hidrogênio – $[\text{H}^+]$ – fica cem vezes maior.
- Dobrando-se o pH de uma solução aquosa, a concentração de íons hidrogênio também dobra.

Resposta:

- Falsa; fica cem vezes menor.
- Falsa; a concentração de íons hidrogênio fica elevada ao quadrado.

5. Ao analisar uma solução aquosa, um estudante verificou que nela a concentração de íons hidrogênio era $[\text{H}^+] = 4,8 \cdot 10^{-7}$. Calcule o pH dessa solução. Use as aproximações $\log 2 = 0,301$ e $\log 3 = 0,4771$.

Resposta: 6,3189

Matemática e Geologia: a Matemática e os terremotos

6. Classifique como verdadeira ou falsa e justifique:

- Um tremor que atinge 6 graus na escala Richter produz ondas dez vezes mais amplas que um tremor que atinge 5 graus.
- A amplitude das ondas medidas por um sismógrafo em um terremoto de 4 graus na escala Richter corresponde à metade das amplitudes das ondas relativas a um terremoto de 8 graus.
- Sabendo que as ondas de um terremoto X são mil vezes mais amplas que as ondas de um terremoto Y, então o terremoto X atingiu 3 graus a mais que o Y na escala Richter.

Resposta:

- a) Verdadeira. $M_1 - M_2 = 1 \Rightarrow 1 = \log \left[\frac{A_1}{A_2} \right] \Rightarrow A_1 = 10 \cdot A_2$

- b) Falsa. $M_1 - M_2 = 4 \Rightarrow 4 = \log \left[\frac{A_1}{A_2} \right] \Rightarrow A_2 = \frac{1}{10000} A_1$

- c) Verdadeira. $A_1 = 10000 A_2 \Rightarrow M_1 - M_2 = \log 1000 \Rightarrow M_1 = 3 + M_2$

7. As ondas de um terremoto T_1 são quatrocentas vezes mais amplas que as ondas de um terremoto T_2 . Se T_2 atingiu 4,6 graus na escala Richter, quantos graus atingiu T_1 ? (Use a aproximação $\log 2 = 0,3$.)

Resposta: 7,2

Resolução dos exercícios

Capítulo 1 Noções de conjuntos

Exercícios

1. $A = \{x \mid x \text{ é um número inteiro}\} \Rightarrow -4 \in A, \frac{1}{3} \notin A, 3 \in A$
e $0,25 \notin A$

$$B = \{x \mid x < 1\} \Rightarrow -4 \in B, \frac{1}{3} \in B, 3 \notin B \text{ e } 0,25 \in B$$

$$C = \{x \mid 15x - 5 = 0\} \Rightarrow \frac{1}{3} \in C, \text{ pois } 15 \cdot \frac{1}{3} - 5 = 0, -4 \notin C, 3 \notin C \text{ e } 0,25 \notin C$$

$$D = \left\{x \mid -2 \leq x \leq \frac{1}{4}\right\} \Rightarrow -4 \notin D, \frac{1}{3} \notin D \text{ e } 3 \notin D, 0,25 = \frac{1}{4} \in D$$

2. $F = \{x \mid x \text{ é estado do Sudeste brasileiro}\} \Rightarrow F = \{\text{Espírito Santo, Minas Gerais, São Paulo, Rio de Janeiro}\}$

Assim: a) Rio de Janeiro $\in F$ (V)

e) Espírito Santo $\notin F$ (F)

f) São Paulo $\in F$ (V)

$G = \{x \mid x \text{ é capital de um país sul-americano}\}$

Assim: b) México $\in G$ (F, pois o México não é um país sul-americano)

c) Lima $\notin G$ (F, pois Lima é a capital do Peru)

d) Montevideu $\in G$ (V, pois Montevideu é a capital do Uruguai)

3. $H = \{-1, 0, 2, 4, 9\}$

$$A = \{x \mid x \in H \text{ e } x < 1\} = \{-1, 0\}$$

$$B = \left\{x \mid x \in H \text{ e } \frac{2x-1}{3} = 1\right\}; \text{ como } \frac{2x-1}{3} = 1 \Rightarrow x = 2, \text{ então } B = \{2\}$$

$$C = \{x \mid x \in H \text{ e } x \text{ é um quadrado perfeito}\} = \{0, 4, 9\}$$

$$D = \{x \mid x \in H \text{ e } x < 0\} = \{-1\}$$

$$E = \{x \mid x \in H \text{ e } 3x + 1 = 10\}; \text{ como } 3x + 1 = 10 \Rightarrow x = 3 \notin H, \text{ então } E = \emptyset$$

4. $A = \{x \mid x = 1 \text{ e } x = 3\} = \emptyset$

$B = \{x \mid x \text{ é um número primo positivo e par}\} = \{2\}$ (unitário)

$$C = \left\{x \mid 0 < x < 5 \text{ e } \frac{3x+5}{4} = 4\right\} = \left\{\frac{11}{3}\right\} \text{ (unitário)}$$

$D = \{x \mid x \text{ é capital da Bahia}\} = \{\text{Salvador}\}$ (unitário)

$E = \{x \mid x \text{ é mês cuja letra inicial do nome é } p\} = \emptyset$

$$F = \left\{x \mid \frac{2}{x} = 0\right\} = \emptyset$$

5. $M = \{0, 3, 5\}$

Lembrando que o símbolo \in relaciona elemento com conjunto, enquanto \subset estabelece uma relação entre conjuntos, temos:

a) $5 \in M$ (V)

e) $\emptyset \subset M$ (V)

b) $3 \subset M$ (F)

f) $0 = \emptyset$ (F)

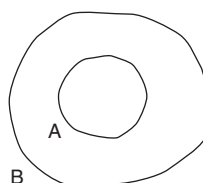
c) $\emptyset \in M$ (F)

g) $0 \in \emptyset$ (F)

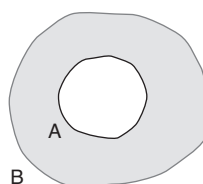
d) $0 \in M$ (V)

h) $0 \subset M$ (F)

6. a)



- b)



7. $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{1, 3, 4\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4\}$

a) $B \subset D$ (V)

d) $D \supset A$ (V)

b) $A \subset B$ (F)

e) $C \not\subset B$ (V)

c) $A \not\subset C$ (V)

f) $C = D$ (F)

8. $A = \{x \mid x \text{ é um número ímpar positivo}\} = \{1, 3, 5, \dots\}$

$$B = \{y \mid y \text{ é um número inteiro e } 0 < y \leq 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

Pede-se: $C = \{z \mid z \in B \text{ e } z \notin A\}$, ou seja, $C = \{2, 4\}$.

9. $A = \{a, b, c\}$

a) $C \notin A$ (F)

d) $\{a, b\} \in A$ (F)

b) $\{c\} \in A$ (F)

e) $\{b\} \subset A$ (V)

c) $\{a, c\} \subset A$ (V)

f) $\{a, b, c\} \subset A$ (V)

10. $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $Z = \{0, 1, 2\}$

a) $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}$ e $\{2, 3, 4\}$

b) Entre outros: $\{0, 2, 4, 6\}, \{0, 4, 6, 8\}$ e $\{2, 4, 6, 8\}$

c) $\mathcal{P}(Z) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$

11. I. Como não existe x tal que $x \neq x$, então a sentença $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$ é verdadeira.

II. Como o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, então $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ é uma sentença verdadeira.

III. Como $\{\emptyset\}$ é um conjunto unitário cujo elemento é o conjunto \emptyset , então a sentença $\emptyset \in \{\emptyset\}$ é verdadeira.

IV. De acordo com a justificativa do item II, a sentença $\emptyset \subset \emptyset$ é verdadeira.

12. $U = \{0, 1, 2, 3\}$

I. $\emptyset \in U$ (F, pois \emptyset não é elemento de U).

II. $3 \in U$ e $U \supset \{3\}$ (V, pois 3 é elemento de U e $\{3\}$ é subconjunto de U).

III. V, pois os subconjuntos unitários de U são $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{3\}$.

IV. F, pois $n(A) = 4 \Rightarrow n(\mathcal{P}(A)) = 2^4 = 16$.

13. $A = \{p, q, r\}$, $B = \{r, s\}$ e $C = \{p, s, t\}$

a) $A \cup B = \{p, q, r, s\}$

b) $A \cup C = \{p, q, r, s, t\}$

c) $B \cup C = \{p, r, s, t\}$

d) $A \cap B = \{r\}$

e) $A \cap C = \{p\}$

f) $B \cap C = \{s\}$

14. a) $(A \cap B) \cup C = \{r\} \cup C = \{r, p, s, t\}$

b) $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = \{r\} \cap C = \emptyset$

c) $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{p\} \cup \{s\} = \{p, s\}$

d) $(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{p, q, r, s, t\} \cap \{p, r, s, t\} = \{p, r, s, t\}$

15. $U = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$;

$A = \{x \in U \mid x < 0\} = \{-4, -3, -2, -1\}$;

$B = \{x \in U \mid -3 < x < 2\} = \{-2, -1, 0, 1\}$;

$C = \{x \in U \mid x \geq -1\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

a) $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = \{-2, -1\} \cap \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} = \{-1\}$

b) $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = \{-4, -3, -2, -1\} \cup \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} = U$

c) $C \cup (B \cap A) = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{-2, -1\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

d) $(B \cup A) \cap C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\} \cap \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} = \{-1, 0, 1\}$

16. Sejam:

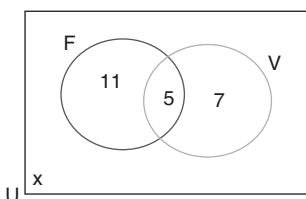
U: conjunto dos alunos da 1ª série.

F: conjunto dos alunos de U que jogam futebol.

V: conjunto dos alunos de U que jogam voleibol.

$n(U) = 36$, $n(F) = 16$, $n(V) = 12$ e $n(F \cap V) = 5$

x: número de alunos que não jogam futebol nem voleibol.



Temos: $n(U) = x + 11 + 5 + 7 \Rightarrow 36 = x + 23 \Rightarrow x = 13$

17. Sejam U = conjunto dos funcionários do escritório;

M = conjunto das funcionárias; H = conjunto dos homens;

A = conjunto dos que têm automóvel. Temos:

$n(U) = 48$

$n(M) = \frac{1}{3} \cdot n(U) =$

$= \frac{1}{3} \cdot 48 = 16$

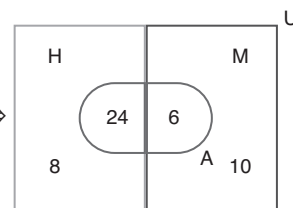
$n(H) = n(U) - n(M) =$

$= 48 - 16 = 32$

$n(A) = 30$

$n(A \cap H) = \frac{3}{4} \cdot n(H) =$

$= \frac{3}{4} \cdot 32 = 24$



Assim:

a) $n(M \cap A) = 6$

b) $n(H \cup A) = n(H) + n(A) - n(H \cap A) = 32 + 30 - 24 = 38$

18. A e B: conjuntos quaisquer

a) $A \cup \emptyset = A$ (V)

b) $B \cap \emptyset = \emptyset$ (V)

c) $(A \cap B) \subset B$ (V)

d) $(B \cup A) \subset B$ (F)

e) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ (V)

f) $\emptyset \not\subset (A \cap B)$ (F)

(Sugestão: use diagramas de Venn para justificar as respostas.)

19. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ e $C = \{1, 2, 4\}$

Pede-se X, tal que: $A \cup X = \{1, 2, 3\}$, $B \cup X = \{3, 4\}$ e $C \cup X = A \cup B$

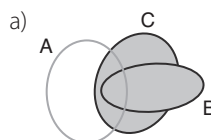
$A \cup X = \{1, 2, 3\}$ e $A = \{1, 2, 3\} \Rightarrow X \subset \{1, 2, 3\}$ (1)

$B \cup X = \{3, 4\}$ e $B = \{3, 4\} \Rightarrow X \subset \{3, 4\}$ (2)

$C \cup X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{1, 2, 4\} \Rightarrow X = \{3\}$

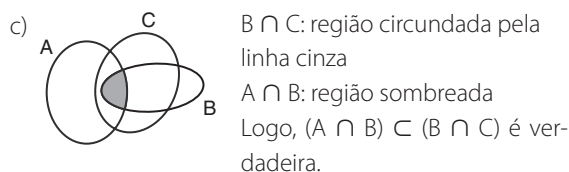
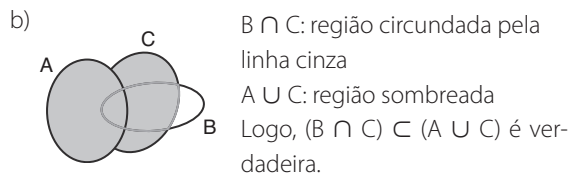
Como $X = \{3\}$ satisfaz as condições (1) e (2), então é a resposta procurada.

20. Em cada caso, estão destacadas nos diagramas uma linha cinza (circundando um dos conjuntos) e uma região sombreada (correspondente a outro conjunto). Isso permitirá analisar a veracidade das afirmações dadas.



A: região circundada pela linha cinza

$B \cup C$: região sombreada
Logo, $(B \cup C) \subset A$ é falsa.



d) $(A \cap B) \cup B = \emptyset$ é falsa, pois, como $(A \cap B) \subset B$, temos $(A \cap B) \cup B = B$

21. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, d, e\}$, $C = \{c, d\}$ e $D = \{a, d, e\}$.

- $A - B = \{b\}$ (V)
- $B - C = \{a, e\}$ (V)
- $D - B = \emptyset \neq \{c\}$ (F)
- $\complement_A C = \emptyset$ (F), pois $C \not\subset A$
- $\complement_B \emptyset = B - \emptyset = B$ (V)
- $\complement_B D = \{c\} = B - D$ (V)
- $(A \cap B) - D = \{a, c\} - \{a, d, e\} = \{c\} \neq \{a, d, e\}$ (F)
- $B - (A \cup C) = \{a, c, d, e\} - \{a, b, c, d\} = \{e\}$ (V)
- $(\complement_B C) \cup (\complement_B D) = (B - C) \cup (B - D) = \{a, e\} \cup \{c\} = \{a, e, c\}$ (V)

22. $A = \{2, 4, 8, 12, 14\}$, $B = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ e $C = \{1, 2, 3, 18, 20\}$

- $A - C = \{4, 8, 12, 14\}$
- $B - C = \{5, 10, 15, 25\}$
- $(C - A) \cap (B - C) = \{1, 3, 18, 20\} \cap \{5, 10, 15, 25\} = \emptyset$
- $(A - B) \cap (C - B) = A \cap \{1, 2, 3, 18\} = \{2\}$

23. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$(A - B) \cap C = \{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{3\}$

Como $(A - B) \cap C$ tem 1 elemento, então o número de seus subconjuntos é $2^1 = 2$.

24. Obs.: $Z - X = Z \Rightarrow Z \cap X = \emptyset$

Assim, temos:

$\left. \begin{array}{l} X \not\subset Y \text{ e } X \cap Y \neq \emptyset \\ Z \subset Y \text{ e } Z - X = Z \end{array} \right\}$

25. $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;

$A = \{x \in U \mid x \leq 3\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$;

$B = \{x \in U \mid x \text{ é ímpar}\} = \{-1, 1, 3, 5\}$;

$C = \{x \in U \mid -2 \leq x < 1\} = \{-2, -1, 0\}$

- $A \cap B = \{-1, 1, 3\}$
- $A \cup C = A$
- $A - C = \{1, 2, 3\}$

d) $C - B = \{-2, 0\}$

e) $\complement_A C = A - C = \{1, 2, 3\}$

f) $\complement_B A$: não pode ser determinado, pois $A \not\subset B$

g) $\overline{B} = U - B = \{-2, 0, 2, 4\}$

h) $(A \cap C) - B = C - B = \{-2, 0\}$

i) $C \cup (A - B) = C \cup \{-2, 0, 2\} = \{-2, -1, 0, 2\}$

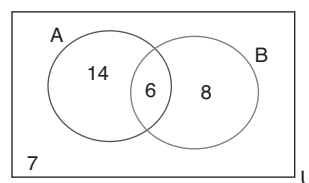
j) $(A - B) \cup (B - A) = \{-2, 0, 2\} \cup \{5\} = \{-2, 0, 2, 5\}$

k) $\overline{C} \cap \overline{A} = (U - C) \cap (U - A) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{4, 5\} = \{4, 5\}$

l) $\overline{B} \cap (C - B) = (U - B) \cap (C - B) = \{-2, 0, 2, 4\} \cap \{-2, 0\} = \{-2, 0\}$

26. $A \subset U$, $B \subset U$

$n(U) = 35$; $n(A) = 20$; $n(A \cap B) = 6$; $n(A \cup B) = 28$.



a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 28 = 20 + n(B) - 6 \Rightarrow n(B) = 14$

b) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 20 - 6 = 14$

c) $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 14 - 6 = 8$

d) $A \cup \overline{A} = U \Rightarrow n(A \cup \overline{A}) = n(U) \xRightarrow{A \cap \overline{A} = \emptyset}$

$\Rightarrow n(A) + n(\overline{A}) = n(U) \Rightarrow 20 + n(\overline{A}) = 35 \Rightarrow$
 $\Rightarrow n(\overline{A}) = 15$

e) $n(\overline{B}) = n(U) - n(B) = 35 - 14 = 21$

f) $n(\overline{A \cap B}) = n(U) - n(A \cap B) = 35 - 6 = 29$

g) $n(\overline{A - B}) = n(U) - n(A - B) = 35 - 14 = 21$

h) $n(\overline{A \cap B}) = n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) =$
 $= 35 - 28 = 7$

Desafio

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Idade de Ribamar em 1936: } XY \text{ anos} \\ \text{Ano de nascimento de Ribamar: } 19XY \end{array} \right.$

Assim: $1936 - 19XY = XY$

$(1900 + 36) - (1900 + XY) = XY \Rightarrow XY = 18 \text{ anos}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Idade do pai de Ribamar em 1936: } AB \text{ anos} \\ \text{Ano de nascimento do pai de Ribamar: } 18AB \end{array} \right.$

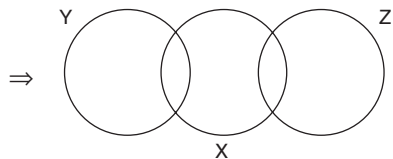
Assim: $1936 - 18AB = AB \Rightarrow$

$\Rightarrow (1900 + 36) - (1800 + AB) = AB \Rightarrow AB = 68 \text{ anos}$

Logo: $XY + AB = 18 + 68 = 86 \text{ (anos)}$

Exercícios complementares

1. $X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow X$ e Y têm elementos comuns
 $X \cap Z \neq \emptyset \Rightarrow X$ e Z têm elementos comuns
 $Y \cap Z = \emptyset \Rightarrow Y$ e Z não têm elementos comuns



2. $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$

$A \Delta B = \{2, 4\} \cup \{5\} = \{2, 4, 5\}$

b) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{4\}$

$A \Delta B = \{0, 2, 6, 8\} \cup \emptyset = \{0, 2, 6, 8\}$

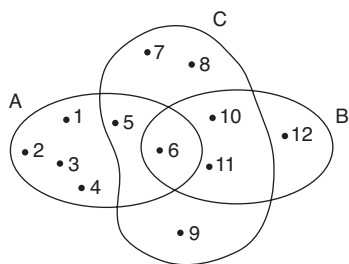
3. número de elementos de $X = n \Rightarrow$ número de subconjuntos de $X = 2^n$

Assim: $2^n = 64 \Rightarrow 2^n = 2^6 \Rightarrow n = 6$

4. Dados: $n(B) = 50$, $n(A \cap B) = 24$ e $n(A \cup B) = 85$

Como $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, então: $85 = n(A) + 50 - 24 \Rightarrow n(A) = 59$.

5. (0-0) Falsa, pois: $A - C = A - (A \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \neq \{1, 2, 3, 4, 6\}$



(1-1) Verdadeira, pois:

$$\left. \begin{aligned} B \cup C &= \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \\ A &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (B \cup C) - A = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

(2-2) Verdadeira, pois:

$$\left. \begin{aligned} A \cap B &= \{6\} \\ A \cap C &= \{5, 6\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (A \cap B) \subset (A \cap C)$$

(3-3) Verdadeira, pois:

$$\left. \begin{aligned} C - A &= C - (C \cap A) = \{7, 8, 9, 10, 11\} \\ C - B &= C - (C \cap B) = \{5, 7, 8, 9\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (C - A) \cap (C - B) = \{7, 8, 9\}$$

(4-4) Falsa, pois:

$$\left. \begin{aligned} B - C &= \{12\} \\ B - A &= \{10, 11, 12\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (B - C) \cup (B - A) = \{10, 11, 12\} \text{ (3 elementos)}$$

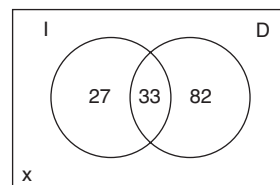
6. $n(U) = 200$

$I =$ conjunto dos professores com tempo integral $\Rightarrow n(I) = 60$

$D =$ conjunto dos doutores $\Rightarrow n(D) = 115$

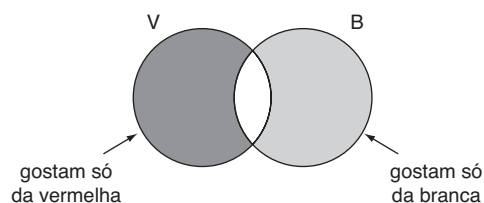
$n(I \cap D) = 33$

No diagrama de Venn abaixo, estão dispostos os dados do problema.



Logo: $x + 27 + 33 + 82 = 200 \Rightarrow x = 58$

- 7.



Logo, o conjunto das pessoas que gostam de uma única cor é: $(V - B) \cup (B - V)$.

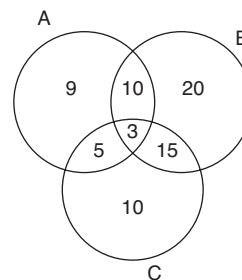
8. $n(A - B) = 42$; $n(A \cap B) = 15$; $n(A \cup B) = 66$; $n(B - A) = x$
 Como $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ e os conjuntos $A - B$, $A \cap B$ e $B - A$ são dois a dois disjuntos, temos:

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 66 = 42 + 15 + x \Rightarrow x = 9 \end{aligned}$$

9. $\{1\} \subset X \subset \{1, 2, 3\} \Rightarrow \begin{cases} \{1\} \subset X & \textcircled{1} \\ e \\ X \subset \{1, 2, 3\} \Rightarrow \\ \Rightarrow X = \emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \text{ ou } \{1, 2, 3\} & \textcircled{2} \end{cases}$

Satisfazem $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$ os conjuntos: $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ e $\{1, 2, 3\}$

10. Distribuindo os dados do problema em um diagrama de Venn, no qual:



$A =$ conjunto dos inscritos no curso A;

$B =$ conjunto dos inscritos no curso B;

$C =$ conjunto dos inscritos no curso C;

temos:

- I. $10 + 5 + 15 + 3 = 33$ (Verdadeira)
- II. não se inscreveram em A: $(20 + 10 + 15)$ pessoas = $= 45$ pessoas $\neq 52$ pessoas (Falsa)
- III. $n(B) = 10 + 20 + 3 + 15 = 48$ (Verdadeira)
- IV. $n(A \cap B \cap C) = 3 \neq 88$ (Falsa)

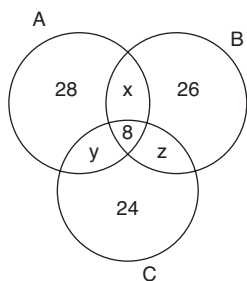
Resposta: b.

11. A = conjunto das pessoas que frequentam a livraria A $\Rightarrow n(A) = 90$

B = conjunto das pessoas que frequentam a livraria B $\Rightarrow n(B) = 84$

C = conjunto das pessoas que frequentam a livraria C $\Rightarrow n(C) = 86$

Dispondo os dados do problema no diagrama abaixo, temos:



$$\begin{cases} x + y + 28 + 8 = 90 \\ x + z + 26 + 8 = 84 \\ y + z + 24 + 8 = 86 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 54 \\ x + z = 50 \\ y + z = 54 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 29 \\ z = 25 \end{cases}$$

- a) número de pessoas que frequentam apenas uma livraria $= 28 + 26 + 24 = 78$
- b) número de pessoas que frequentam, pelo menos, duas livrarias $= x + y + z + 8 = 79 + 8 = 87$
- c) número de pessoas ouvidas na pesquisa $= 28 + 26 + 24 + 8 + x + y + z = 86 + 79 = 165$

12. T = conjunto dos funcionários

H = conjunto dos homens

M = conjunto das mulheres

F = conjunto dos fumantes

$$\begin{aligned} n(F) &= 0,18 \cdot n(T) \Rightarrow n(H \cap F) + n(M \cap F) = 0,18 \cdot n(T) \\ n(H \cap F) &= 0,2 \cdot n(H) \\ n(M \cap F) &= 0,15 \cdot n(M) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 0,2 \cdot n(H) + 0,15 \cdot n(M) = 0,18 \cdot n(T) & \textcircled{1} \\ n(H) + n(M) = n(T) \Rightarrow n(M) = n(T) - n(H) & \textcircled{2} \end{cases}$$

Substituindo $\textcircled{2}$ em $\textcircled{1}$:

$$0,2 \cdot n(H) + 0,15 \cdot [n(T) - n(H)] = 0,18 \cdot n(T) \Rightarrow n(H) = \frac{3}{5} \cdot n(T) = 60\% \cdot n(T)$$

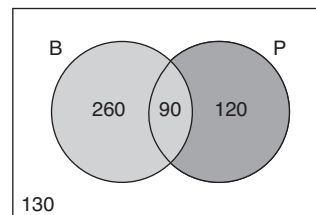
13. $n(U) = 600$

B = conjunto dos produtores que investiram na área da

biotecnologia

P = conjunto dos produtores que investiram na área de proteção de plantas

$$n(B) = 350; n(P) = 210; n(B \cap P) = 90$$



De acordo com o diagrama de Venn, concluímos que:

- I. é verdadeira, pois: $n(B - P) = 260$
- II. é verdadeira, pois: $n(P - B) = 120$
- III. é verdadeira, pois: $n(B \cup P) = 260 + 90 + 120 = 470$
- IV. é verdadeira, pois: $n(U) - n(B \cup P) = 600 - 470 = 130$

14. Sejam:

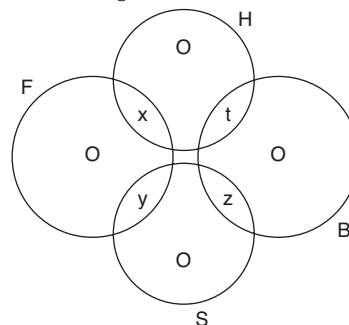
F = conjunto dos que escolheram futebol

H = conjunto dos que escolheram handebol

B = conjunto dos que escolheram basquete

S = conjunto dos que escolheram futebol de salão

De acordo com o diagrama abaixo, temos:



$$n(F) = 0,65 \cdot 200 \Rightarrow x + y = 130 \quad \textcircled{1}$$

$$n(S) = 0,60 \cdot 200 \Rightarrow y + z = 120 \quad \textcircled{2}$$

$$n(B) = 0,35 \cdot 200 \Rightarrow z + t = 70 \Rightarrow z = 70 - t \quad \textcircled{3}$$

$$25\% \cdot n(H) = n(H \cap B) \Rightarrow \frac{x + t}{4} = t \Rightarrow x = 3t \quad \textcircled{4}$$

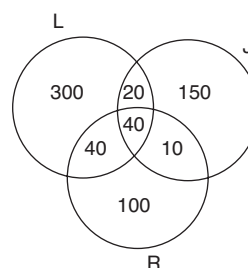
Substituindo $\textcircled{4}$ em $\textcircled{1}$: $3t + y = 130$ (*)

Substituindo $\textcircled{3}$ em $\textcircled{2}$: $y + 70 - t = 120 \Rightarrow t = y - 50$ (**)

$$n(F \cap S) = y$$

Substituindo (**) em (*): $3(y - 50) + y = 130 \Rightarrow y = 70$

15. A disposição dos dados do problema em um diagrama de Venn facilita a solução do problema.



R = conjunto das pessoas que leem revistas

L = conjunto das pessoas que leem livros

J = conjunto das pessoas que leem jornais

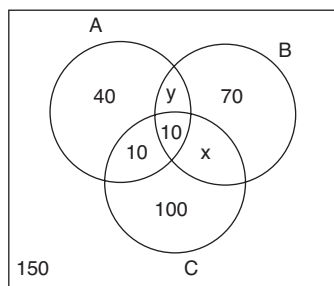
I. É falsa, pois o número de pessoas que leem pelo menos um dos três meios de comunicação é igual a $n(L \cup R \cup J) = 660$.

II. É verdadeira, pois é pedido $n[(L \cap R) - J]$, que é igual a 40.

III. É falsa, pois $n(R \cup L) = 300 + 20 + 40 + 40 + 100 + 10 = 510$.

Logo, apenas II é verdadeira.

16. Utilizando o diagrama de Venn, tem-se a distribuição da quantidade de sócios entrevistados.



Não votariam em A: $100 + x + 70 = 190 \Rightarrow x = 20$

Não votariam em C: $40 + y + 70 = 110 \Rightarrow y = 0$

a) $n[(B \cap C) - A] = x = 20$

b) $n[(A \cup B \cup C) - B] = 40 + 10 + 100 = 150$

Testes

4. U = conjunto dos estudantes da escola $\Rightarrow n(U) = 500$

M = conjunto das mulheres

H = conjunto dos homens

I = conjunto dos que estudam inglês

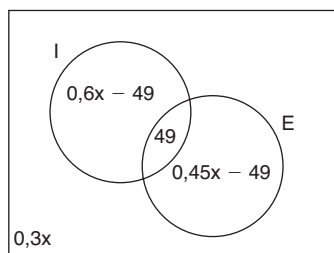
F = conjunto dos que estudam francês

$n(M) = 0,6 \cdot n(U) = 0,6 \cdot 500 = 300 \Rightarrow n(H) = 200$

$n(H \cap F) = 0,3 \cdot 200 = 60 \Rightarrow n(H \cap I) = n(H) - n(H \cap F) = 200 - 60 = 140$

Resposta: c.

6.



$n(U) = x$ = total de funcionários da empresa

I = conjunto dos que falam inglês $\Rightarrow n(I) = 0,6 \cdot x$

E = conjunto dos que falam espanhol $\Rightarrow n(E) = 0,45x$

$n(I \cap E) = 49; n(\overline{I \cap E}) = 0,3x$

$x = 0,6x - 49 + 49 + 0,45x - 49 + 0,3x \Rightarrow 0,35x = 49 \Rightarrow x = 140$

Resposta: b.

7. Total de caixas testadas = 150

x = número de caixas reprovadas em ambos os testes \Rightarrow

$$\Rightarrow \begin{cases} 40 - x = \text{número das reprovadas no teste de qualidade} \\ 60 - x = \text{número das reprovadas no teste de medida} \end{cases}$$

Como o número de caixas aprovadas nos dois testes = 65, temos: $(40 - x) + x + (60 - x) + 65 = 150 \Rightarrow x = 15$

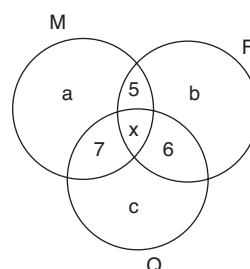
Resposta: a.

10. M = conjunto dos alunos que cursam Matemática

F = conjunto dos alunos que cursam Física

Q = conjunto dos alunos que cursam Química

No diagrama de Venn abaixo, temos a distribuição dos dados do problema.



x = número de alunos que cursam as três disciplinas

$$\text{Temos: } \begin{cases} a + b + c = 150 \quad (1) \\ a + b + c + 7 + 6 + 5 + x = 190 \quad (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2): $150 + 18 + x = 190 \Rightarrow x = 22$

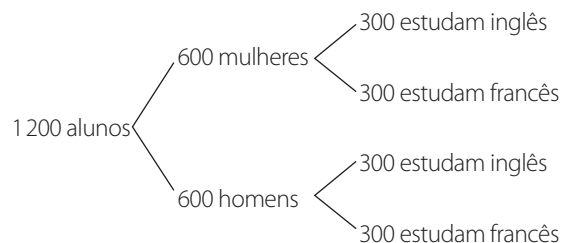
Resposta: d.

12. A = conjunto dos alunos do 1º ano

B = conjunto dos alunos do 2º ano

C = conjunto dos alunos do 3º ano

Relativamente ao conjunto A, temos:



Esse mesmo esquema repete-se para B e C.

Se F = conjunto dos alunos que estudam francês, temos:

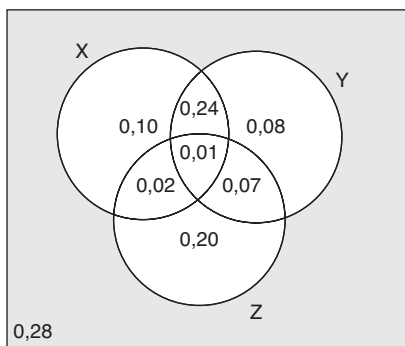
$$n(C \cup \overline{F}) = n(C) + n(\overline{F}) - n(C \cap \overline{F}) = 1200 + 3 \times 600 - 600 = 2400$$

Resposta: d.

17. X = conjunto dos que preferem a marca X

Y = conjunto dos que preferem a marca Y

Z = conjunto dos que preferem a marca Z
T = conjunto dos entrevistados

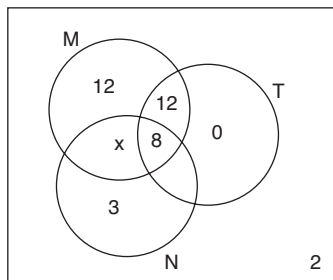


$n(X) = 0,37 \cdot n(T)$; $n(Y) = 0,40 \cdot n(T)$
 $n(Z) = 0,30 \cdot n(T)$; $n(X \cap Y) = 0,25 \cdot n(T)$
 $n(Y \cap Z) = 0,08 \cdot n(T)$; $n(X \cap Z) = 0,03 \cdot n(T)$
 $n(X \cap Y \cap Z) = 0,01 \cdot n(T)$
 $n(\overline{X \cap Y}) = 0,28 \cdot n(T) + 0,20 \cdot n(T) = 48\% T$
 Resposta: e.

18. M = conjunto dos alunos que frequentaram a piscina pela manhã

N = conjunto dos alunos que frequentaram a piscina à noite

T = conjunto dos alunos que frequentaram a piscina à tarde
Distribuídos os dados do problema no diagrama abaixo, pede-se $n(N)$.



Temos: $12 + 12 + 8 + x + 3 = 38 \Rightarrow x = 3$
 $n(N) = x + 8 + 3 = 3 + 8 + 3 = 14$
 Resposta: c.

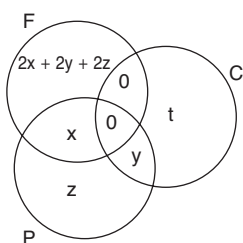
19. F = conjunto dos torcedores do Flamengo

C = conjunto dos torcedores do Cruzeiro

P = conjunto dos torcedores do Palmeiras

$n(F \cup C \cup P) = 93$ (*)

$n[(F \cap C) \cup (F \cap P) \cup (C \cap P)] = 12$



De acordo com o diagrama de Venn, temos: $t \geq 4$

$$x + y = 12$$

$$(*) (2x + 2y + 2z) + (x + y) + t + z = 93 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot 12 + 2z + 12 + t + z = 93 \Rightarrow z = \frac{57-t}{3}$$

$$\text{Como } z \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{N} \text{ e } t \geq 4, \text{ então: } \begin{cases} t = 6 \Rightarrow z = 17 \\ t = 9 \Rightarrow z = 16 \\ \vdots \\ t = 54 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$$

Logo, $z_{\max} = 17$ e o número máximo de torcedores do Palmeiras é:

$$x + y + z_{\max} = 12 + 17 = 29$$

Resposta: b.

20. $X \subset \mathbb{N}, Y \subset \mathbb{N}, Z \subset \mathbb{N}$ e $W \subset \mathbb{N}$

$$(1) (X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow 1, 2, 3, 4 \in Z; 1, 2, 3, 4 \in X \\ \text{e } 1, 2, 3, 4 \notin Y$$

$$(2) Y = \{5, 6\}$$

$$(3) Z \cap Y = \emptyset \Rightarrow 5 \notin Z \text{ e } 6 \notin Z$$

$$(4) W \cap (X - Z) = \{7, 8\} \Rightarrow 7, 8 \in W; 7, 8 \in X \text{ e } 7, 8 \notin Z$$

$$(5) X \cap W \cap Z = \{2, 4\} \Rightarrow 2, 4 \in X; 2, 4 \in W \text{ e } 2, 4 \in Z$$

De (1), (2), (3), (4) e (5), temos:

$$\text{— } 1, 2, 3, 4 \in X \text{ e } 7, 8 \in X \Rightarrow X = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$$

$$\text{— } Y = \{5, 6\}$$

$$\text{— } 1, 2, 3, 4 \in Z \text{ e } 2, 4 \in Z \Rightarrow Z = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{— } 7, 8 \in W \text{ e } 2, 4 \in W \Rightarrow W = \{2, 4, 7, 8\}$$

$$\text{Logo: } [X \cap \underbrace{(Z \cup W)}_X] - [W \cap (Y \cup Z)] =$$

$$= X - [W \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}] = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\} = \{2, 4\} = \\ = \{1, 3, 7, 8\}$$

Resposta: c.

Capítulo 2 Conjuntos numéricos

Exercícios

1. a) $A = \{5, 6, 7, 8, \dots\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A \cap B = \{5, 6\}; A \cup B = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$$

b) $A = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$ e $B = \{3, 4, 5, \dots\}$

$$A \cap B = B; A \cup B = A$$

c) $A = \{\dots, 8, 9\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$A \cap B = B; A \cup B = A$$

d) $A = \{3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$

$$A \cap B = \{3\}; A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

2. a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$, entre outros.

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2 \text{ ou } 7 < x < 11\}$, entre outros.

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 5\}$, entre outros.

d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 3\}$, entre outros.

3. a) $-5 + 6 = 1$
 b) 11
 c) $|3| + |-3| = 3 + 3 = 6$
 d) $2 - 15 + 4 = -9$
 e) $-11 + 6 + 3 = -2$
 f) $-8 + 3 \cdot 3 = 1$
 g) $|2 - 6| - |3 - 6| = |-4| - |-3| = 4 - 3 = 1$
 h) $|-5| - |15| - |0| = 5 - 15 - 0 = -10$
4. a) $|x| = 18 \Rightarrow x = -18$ ou $x = 18$
 b) $|x| < 3 \Rightarrow x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
5. Observe que:
- Todo múltiplo de 6 é também múltiplo de 3. Assim, o único elemento desse conjunto que é múltiplo de 6 é também múltiplo de 3.
 - Todo múltiplo de 6 é também múltiplo de 2 (isto é, é par). Assim, o único múltiplo de 6 é um dos 7 números pares que o conjunto possui.
- Assim, esse conjunto possui:
- Três múltiplos de 3, sendo que um deles é múltiplo de 6 e os outros dois não.
 - Seis números pares. O outro número par já foi contado. O total pedido é: $3 + 6 = 9$.
6. a) $|-8| = 8$; b) -6 e c) $|5| = 5$
 a) $8 + (-6) = 2$
 b) $-6 \cdot 5 = -30$
 c) $5 - 8 = -3$
 d) $8 \cdot (-6) + 5 = -43$
 e) $-6 - 8 \cdot 5 = -46$
 f) 36
 g) $|-6 - 5| = |-11| = 11$
 h) $|8 - (-6)| = |14| = 14$
7. ■ Das páginas 1 a 9 usamos 9 algarismos.
 ■ Das páginas 10 a 99 usamos $90 \cdot 2 = 180$ algarismos.
 ■ Das páginas 100 a 200 usamos $101 \cdot 3 = 303$ algarismos.
 ■ Para numerar as páginas 201, 202, 203, 204, 205 e 206 usamos $6 \cdot 3 = 18$ algarismos.
 O total pedido é: $9 + 180 + 303 + 18 = 510$.
8. a) $n = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$
 $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$
 Logo, n^2 é ímpar; (V)
 b) 2 é primo; 2 é par (F)
 c) $(n - 1) + n + (n + 1) = 3 \cdot n$ é múltiplo de 3 (V)
 d) F; tome 3 e 5; $3 + 5 = 8$ é par

9. a) O número máximo ocorrerá quando cada operador receber exatamente 2 ingressos de teatro – serão 600 operadores; o mesmo deve ocorrer com os ingressos para o cinema – serão $1\,344 \div 2 = 672$ operadores (diferentes dos 600 anteriores). O total é: $600 + 672 = 1\,272$.
 b) O número mínimo ocorrerá quando cada operador receber o equivalente ao mdc (1 200, 1 344) = $2^4 \cdot 3 = 48$ (ingressos), pois: $\begin{cases} 1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \\ 1344 = 2^6 \cdot 3 \cdot 7 \end{cases}$
 Desse modo, $\frac{1200}{48} = 25$ operadores receberão ingressos para o teatro e $\frac{1344}{48} = 28$ operadores receberão ingressos para o cinema, num total de $25 + 28 = 53$ operadores.

10. a) V
 b) V
 c) F; $\left(\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}; \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}\right)$
 d) V
 e) F; $\left(-\frac{7}{3} \in \mathbb{Q}\right)$
 f) V
 g) F
 h) V
 i) $F(\mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}_- = \{0\})$
 j) F

11. $m = 3 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$
 a) $-m + n = -\frac{13}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{15}{3} = -5 \in \mathbb{Q}$
 b) $m + n - \frac{13}{4} = \frac{13}{3} - \frac{2}{3} - \frac{13}{4} = \frac{5}{12} \in \mathbb{Q}$

12. a) $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ d) $\frac{33}{100}$
 b) $\frac{105}{100} = \frac{21}{20}$ e) $\frac{33}{10}$
 c) $-\frac{102}{10} = -\frac{51}{5}$ f) $-\frac{225}{100} = -\frac{9}{4}$

13. a) $\frac{12}{5} = 2,4$
 b) 0,57
 c) 0,08
 d) 0,024
 e) $\frac{25 - 256}{80} = -\frac{231}{80} = -2,8875$

14. $\frac{1}{30}, -\frac{5}{13}, \frac{4}{11}, \frac{1000}{3}$

15. $x = 0,6666\ldots$ ①
 $10x = 6,6666\ldots$ ②
 ② - ① $\Rightarrow 9x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$$y = \frac{2}{3} + \frac{\frac{36-14}{9}}{\frac{3+1}{3}}$$

$$y = \frac{2}{3} + \frac{\frac{22}{9}}{\frac{4}{3}}$$

$$y = \frac{2}{3} + \frac{22}{9} \cdot \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{2}{3} + \frac{11}{6} = \frac{5}{2} = 2,5$$

16. $-\frac{17}{5} = -3,4; -\frac{33}{10} = -3,3$

Respostas possíveis: $-3,32; -3,375; -3,38$ etc.

17. a) $x = 0,444... \quad \textcircled{1}$

$10x = 4,444... \quad \textcircled{2}$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \Rightarrow 9x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{9}$$

b) $x = 0,1414... \quad \textcircled{1}$

$100x = 14,1414... \quad \textcircled{2}$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \Rightarrow 99x = 14$$

$$x = \frac{14}{99}$$

c) $x = 2,777... \quad \textcircled{1}$

$10x = 27,777... \quad \textcircled{2}$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \Rightarrow 9x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{9}$$

d) $x = 1,715715... \quad \textcircled{1}$

$1000x = 1715,715715... \quad \textcircled{2}$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \Rightarrow 999x = 1714$$

$$x = \frac{1714}{999}$$

e) $x = 1,12333... \quad \textcircled{1}$

$100x = 112,3333... \quad \textcircled{2}$

$1000x = 1123,3333... \quad \textcircled{3}$

$$\textcircled{3} - \textcircled{2} \Rightarrow 900x = 1011$$

$$x = \frac{1011}{900} = \frac{337}{300}$$

f) $x = 0,02323... \quad \textcircled{1}$

$10x = 0,2323... \quad \textcircled{2}$

$1000x = 23,2323... \quad \textcircled{3}$

$$\textcircled{3} - \textcircled{2} \Rightarrow 990x = 23$$

$$x = \frac{23}{990}$$

g) $x = 1,030303... \quad \textcircled{1}$

$100x = 103,030303... \quad \textcircled{2}$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \Rightarrow 99x = 102 \Rightarrow x = \frac{102}{99} = \frac{34}{33}$$

h) $x = 1,0303030... \quad \textcircled{1}$

$10x = 10,303030... \quad \textcircled{2}$

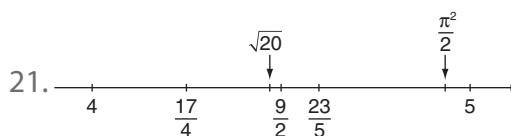
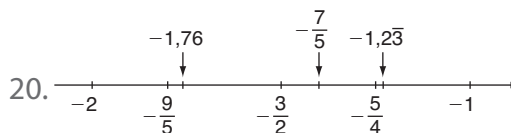
$1000x = 1030,3030... \quad \textcircled{3}$

$$\textcircled{3} - \textcircled{2} \Rightarrow 990x = 1020 \Rightarrow x = \frac{1020}{990} = \frac{34}{33}$$

Observe que
 $1,0\overline{3} = 1,0\overline{30}$

18. $x \in \mathbb{Q}; \frac{1}{x} = -x \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{Q}$

19. $\frac{p}{z} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{8}{5}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}; z - p = 4 - 3 = 1$



São irracionais: $\sqrt{20}$ e $\frac{\pi^2}{2}$.

22. a) irracional

b) racional

c) irracional

d) irracional

e) racional $\sqrt{\frac{20}{80}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

f) racional

g) $(\sqrt{2})^2 - 1^2 = 1 \in \mathbb{Q}$; racional

h) racional $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\right)$

i) irracional $(\sqrt{15})$

j) irracional

k) $\sqrt{9} = 3$; racional

23. a) F; se $x = -2,3$, então $-x = 2,3 \in \mathbb{R}_+$

b) F; se $x = \frac{1}{2}$, então $x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

c) F; se $x = -5$, temos $2 \cdot x = -10$ e $3 \cdot x = -15$; $2x > 3x$

d) V

e) F

24. a) $x^3 = -8 \Rightarrow x = -2 \notin \mathbb{N}$; conjunto vazio

b) $x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2$; como $x \in \mathbb{R}_+$, temos $x = 2$; conjunto unitário

c) $-\frac{1}{5} = -0,2; \frac{2}{3} = 0,\overline{6}$

O único inteiro entre $-0,2$ e $0,\overline{6}$ é 0 ; conjunto unitário.

d) $x^2 < 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$; conjunto vazio

e) $|x| = -4 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$, pois $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$; conjunto vazio

f) $x^5 = 0 \Rightarrow x = 0 \in \mathbb{Q}$, conjunto unitário

g) $x = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ conjunto unitário

h) $x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ conjunto vazio

25. $x = 1 \div 0,05 = 20$; $y = 2 \div 0,2 = 10$

$A = \sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{10}{20}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, portanto é irracional.

$B = \sqrt{x - \frac{y}{x}} = \sqrt{20 - \frac{10}{20}} = \sqrt{18} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, portanto é irracional.

$C = A \cdot B = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6 \in \mathbb{Q}$, portanto é racional.

$D = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6} \in \mathbb{Q}$, portanto é racional.

$E = A + B = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{18} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, portanto é irracional.

26. Respostas possíveis:

aproximações por falta: 1,7; 1,72; 1,73; 1,732
aproximações por excesso: 1,733; 1,735; 1,74; 1,8

27. $a = -\frac{5}{2} = -1,6$;

$b = -\frac{3}{4} = -1,3$;

$c = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} > -1$;

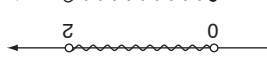
$d = -|-1| = -1$

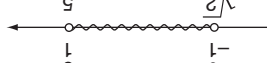
Dat:
 $a < b < d < c$

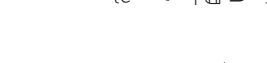
28. a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

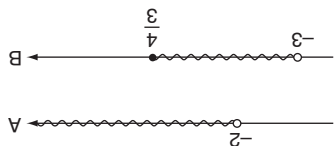
f) 

29. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\sqrt{2}\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{4}{1} < x \leq 1\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{4}{3} < x \leq 0\right\}$


30. 

a) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\} = [-3, +\infty[$

b) $A \cap B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq \frac{3}{4}\right\} = \left]-2, \frac{3}{4}\right]$

c) $A - B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{4}\right\} = \left]\frac{3}{4}, +\infty\right[$

d) $B - A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq -2\} =]-3, -2]$

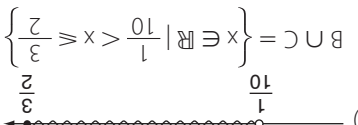
31. 

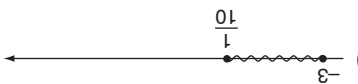
Há três números inteiros: -1, 0 e 1

32. $\left]-1, \frac{2}{3}\right[\cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$

33. 

$A \cap B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{10} < x \leq 1\right\}$

b) 

c) 

d) $C - A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

e) $A \cup B \cup C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$

f) 

$B \cup C$ 

$A - (B \cup C) =$ 

$= \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < -1\}$

g) 

$A \cap B \cap C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{10} < x \leq 1\right\}$

h) 

$B - C = \emptyset$

Desafio

O padrão é:

- dividir por 5
- somar 10

$75 \div 5 = 15$; $15 + 10 = 25$; $25 \div 5 = 5$; $5 + 10 = 15$;
 $15 \div 5 = 3$; $3 + 10 = 13$; $13 \div 5 = 2,6$; $2,6 + 10 = 12,6$

oitavo termo nono termo

A soma pedida é $2,6 + 12,6 = 15,2$.

Exercícios complementares

- V ; se $y = 2$, $2\sqrt{3} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; se $y = 0$, $0\sqrt{3} = 0 \in \mathbb{Q}$
 - V
 - V ; se $x \in \mathbb{Q}$, $x^2 \in \mathbb{Q}$; $y - x^2 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, se y é irracional
 - V
 - F ; $x = 2$ e $y = \sqrt{3} \Rightarrow x^3 \cdot y^2 = 8 \cdot 3 = 24 \in \mathbb{Q}$

- Uma possível solução consiste em atribuir valores para a e b . Por exemplo, $a = -\frac{5}{4} = -1,25$ e $b = \frac{4}{5} = 0,8$

$$a) \frac{a}{b} = \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{4}{5}} = -\frac{25}{16} = -1,5625$$

Assim, $\frac{a}{b} < a$, e sua representação na reta é um ponto localizado à esquerda de a . (V)

- $b^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} = 0,64$; assim $b^2 < b$, e sua representação na reta é um ponto localizado entre 0 e b . (F)
A propriedade importante a ser destacada para os alunos é que, se $0 < x < 1$, então $0 < x^2 < x$.

- $a + b = -\frac{5}{4} + \frac{4}{5} = \frac{-25 + 16}{20} = -\frac{9}{20} = -0,45$;
assim $a + b$ estaria representado entre -1 e 0 . (V)

- $a^2 = \left(-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} > 1$; a^2 estaria representado à direita de 1 . (F)

- $b - a = \frac{4}{5} - \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{4}{5} + \frac{5}{4} > 1$; $b - a$ estaria representado à direita de 1 . (F)

- A distância (real) entre as duas cidades é $47 - 13 = 34$ km. No mapa, essa distância é 8 cm. Daí:

$$\left\{ \begin{array}{l} 34 \text{ km (ou } 3400000 \text{ cm)} \text{ — } 8 \text{ cm} \\ x \text{ — } 1 \text{ cm} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x = 3400000 \Rightarrow x = 425000 \text{ cm}$$
Assim, 1 cm no mapa corresponde a 425 000 cm "reais".
 - O posto está representado no mapa a 5 cm de Paraguaçu; na realidade, a distância entre Paraguaçu e o posto é:
 $5 \cdot 425000 \text{ cm} = 2125000 \text{ cm} = 21,25 \text{ km}$
O posto se encontra no quilômetro:
 $21,25 + 13 = 34,25$

- Na nova escala, cada cm representado equivale a 500 000 cm "reais" (ou 5 km). Desse modo, uma distância de 34 km seria representada por um segmento de comprimento: $\frac{34}{5} = 6,8$ cm.

- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}$, pois $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, $c \in \mathbb{Z}$ e $d \in \mathbb{Z}^*$; (V)

(02) V

(04) $(\sqrt{3})^2 = 3 \in \mathbb{Q}$ (F)

- Suponha, por absurdo, que a seja ímpar, isto é, $a = 2q + 1$ para $q \in \mathbb{N}$
 $a^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 4 \cdot (q^2 + q) + 1 = 4 \cdot q' + 1$
com $q' \in \mathbb{N}$, isto é, a^2 seria ímpar, o que contradiz a hipótese de a^2 ser par. (V)

- Observe o conjunto dos múltiplos de 17:

$$M(17) = \{0, 17, 34, 51, 68, 85, \dots\}. (V)$$

- 2 é primo, 7 é primo $\rightarrow 2 + 7 = 9$ não é primo. (F)

- $\text{mdc}(5, 9) = 1$, mas 9 não é primo; o correto seria dizer que 5 e 9 são primos entre si. (F)

- 

- $R \cup S \cup T = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ ou $]-\infty, +\infty[$

- $R \cap S \cap T = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < -\frac{1}{2}\right\} = \left[-1, -\frac{1}{2}\right[$

$$\text{---} \begin{array}{c} \bullet \text{---} \circ \\ -1 \quad -\frac{1}{2} \end{array} \text{---} R \cap S \cap T$$

- $R - S$

$$\text{---} \begin{array}{c} \bullet \text{---} \circ \\ -3 \quad -1 \end{array} \text{---} R - S$$

$$\text{---} \begin{array}{c} \bullet \text{---} \circ \\ -1 \end{array} \text{---} S - T$$

$$(R - S) \cup (S - T) =]-\infty, -1[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$$

- Fatorando 280, temos:

$$\begin{array}{r|l} 280 & 2 \\ 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad 280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$$

Ao multiplicarmos 280 por x , notamos que x deve possuir, ao menos, $2 \cdot 5 \cdot 7$ como fatores primos, a fim de que o produto resulte em um quadrado perfeito.

De fato:

$$(2^3 \cdot 5 \cdot 7) \cdot \underbrace{(2 \cdot 5 \cdot 7)}_x = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2, \text{ que é o quadrado do}$$

número $2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$.

Assim, $x = 70$.

7. Fatorando 48, temos:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \quad 48 = 2^4 \cdot 3 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

O número n deve possuir 2 e 3 como fatores primos, a saber: $n = 2^a \cdot 3^b$, com a e b naturais.

$$48 \cdot n^2 = (2^4 \cdot 3) \cdot (2^a \cdot 3^b)^2 = (2^4 \cdot 3) \cdot (2^{2a} \cdot 3^{2b}) = 2^{4+2a} \cdot 3^{1+2b}$$

Para que $2^{4+2a} \cdot 3^{1+2b}$ seja um cubo perfeito, é preciso que, no mínimo, tenhamos $a = 1$ e $b = 1$.

De fato, $2^6 \cdot 3^3$ é o cubo do número $2^2 \cdot 3$.

Assim, $n = 2^1 \cdot 3^1 = 6$ é a resposta procurada.

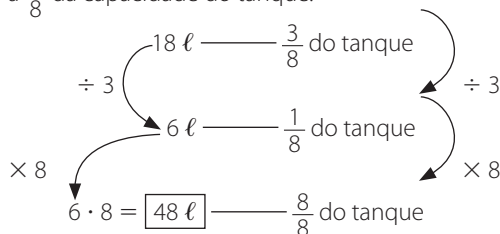
8. a) $z = 71 - (7 + 1) = 71 - 8 = 63 = 7 \cdot 9 \in M(9)$
 $z = 30 - (3 + 0) = 30 - 3 = 27 = 3 \cdot 9 \in M(9)$

b) Seja $AB = 10A + B$ um número de dois algarismos.
 $z = (10A + B) - (A + B) = 9A$, portanto, z é múltiplo de 9.

9. a) $\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{7-4}{8} = \frac{3}{8}$

$$216 \div 12 = 18 \text{ litros}$$

Assim, podemos concluir que 18 litros correspondem a $\frac{3}{8}$ da capacidade do tanque.



b) Com o consumo de 9 km por litro, o número de litros consumidos seria de $216 \div 9 = 24 \text{ l}$.

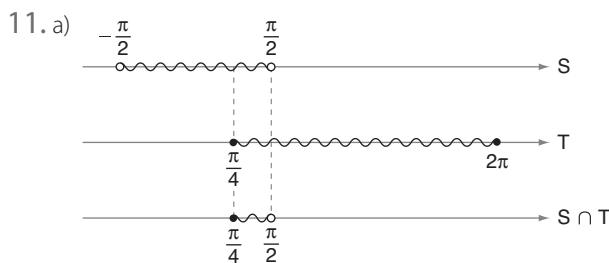
O veículo iniciou o percurso com:

$$\frac{7}{8} \text{ de } 48 = \frac{7}{8} \cdot 48 = 42 \text{ l}$$

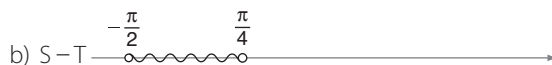
Assim, $42 - 24 = 18 \text{ l}$ é a quantidade que sobrou após o passeio, e a fração que o ponteiro indicaria seria $\frac{18}{48} = \frac{3}{8}$.

10. $\frac{x}{40} = x \cdot \frac{1}{40} = x \cdot 0,025$

$$= \frac{x}{1,25} = \frac{x}{\frac{5}{4}} = \frac{4x}{5} = x \cdot 0,8$$

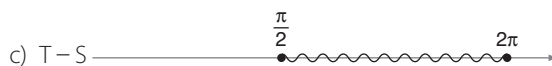


$S \cap T = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ e o único inteiro pertencente a esse intervalo é 1.



$$S - T = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right[$$

$\mathbb{C}_S T$ não se define, pois $T \not\subset S$.



$$T - S = \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi \right]$$

$\mathbb{C}_T S$ não se define, pois $S \not\subset T$.

12. Temos

x : número de alunos do matutino

y : número de alunos do noturno; $x + y = 456$

Inscreveram-se:

$$\frac{15}{17} \cdot x \text{ (matutino)} \text{ e } \frac{7}{23} \cdot y \text{ (noturno)}$$

x deve ser múltiplo de 17 e y deve ser múltiplo de 23.

$$M(17) = \{17, 34, 51, \dots, 238, 255, \boxed{272}, 289, \dots\}$$

$$M(23) = \{23, 46, 69, \dots, 161, \boxed{184}, 207, \dots\}$$

$$\text{Se } x = 272 \text{ e } y = 184, x + y = 456$$

Assim, $\frac{7}{23} \cdot 184 = 56$ do noturno inscreveram-se na competição e $184 - 56 = 128$ não se inscreveram.

13. a) $F; (-3)^2 = 3^2$, mas $-3 \neq 3$

b) $F; 5 > 2$, mas $5 \cdot (-3) < 2 \cdot (-3)$

c) $F; 3 > -4$, mas $3^2 < (-4)^2$

d) $V; ab = ac \Rightarrow ab - ac = 0 \Rightarrow a \cdot (b - c) = 0$

Daí podemos ter: $a = 0$ (contraria a hipótese) ou

$$b - c = 0, \text{ isto é, } b = c$$

e) V ; se a e b são positivos e $a < b$, então

$$a \cdot a < b \cdot a < b \cdot b$$

14. a) $\frac{8}{q}$ b) $\frac{8}{q'}$
 \downarrow \downarrow
 q q'

$$r = 7 \quad r = 5$$

$$a = 8 \cdot q + 7; b = 8 \cdot q' + 5$$

$$a \cdot b = (8q + 7) \cdot (8q' + 5) = 64qq' + 40q + 56q' + 35 =$$

$$= 8 \cdot (8qq' + 5q + 7q') + \underbrace{4 \cdot 4 + 3}_{35} =$$

$$= 8 \cdot (8qq' + 5q + 7q' + 4) + 3$$

múltiplo de 8

Assim, $a \cdot b = 8 \cdot m + 3$; o resto é igual a 3.

15. A capacidade máxima do *pen drive* é $32 \cdot 1024 = 32768$ Mb.

O número máximo de filmes é obtido quando todos os filmes têm o tamanho mínimo, isto é, 500 Mb.

Assim, $32768 \div 500 \cong 65,53$.

Logo, é possível salvar, no máximo, 65 filmes.

16.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Observe a ordem em que os números foram riscados:

1º) 1

2º) 4 - 6 - 8 - 10 - 12 - 14 - 16 - 18 - 20 - 22 - 24 - 26 - 28 - 30 - 32 - 34 - 36 - 38 - 40 - 42 - 44 - 46 - 48 - 50 - 52 - 54 - 56 - 58 - 60 - 62 - 64 - 66 - 68 - 70 - 72 - 74 - 76 - 78 - 80 - 82 - 84 - 86 - 88 - 90 - 92 - 94 - 96 - 98 - 100

3º) 9 - 15 - 21 - 27 - 33 - 39 - 45 - 51 - 57 - 63 - 69 - 75 - 81 - 87 - 93 - 99

4º) 25 - 35 - 55 - 65 - 85 - 95

O 21º número primo é 73.

17. $x = \sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{3 + \sqrt{8}}$

Observemos inicialmente que $x < 0$, pois

$$0 < 3 - \sqrt{8} < 3 + \sqrt{8} \quad (*)$$

Temos:

$$x^2 = (\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{3 + \sqrt{8}})^2$$

$$x^2 = 3 - \sqrt{8} - 2 \cdot \sqrt{3 - \sqrt{8}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{8}} + 3 + \sqrt{8}$$

$$x^2 = 6 - 2 \cdot \sqrt{3^2 - (\sqrt{8})^2} \Rightarrow x^2 = 6 - 2 \cdot \sqrt{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm 2 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} x = -2$$

18. $\begin{array}{c} n \mid 7 \\ \downarrow q \\ 3 \end{array}$

$\begin{array}{c} n \mid 5 \\ \downarrow q' \\ 4 \end{array}$

$n = 7 \cdot q + 3; q \in \mathbb{N}^* \quad \textcircled{1} \quad n = 5 \cdot q' + 4; q' \in \mathbb{N}^* \quad \textcircled{2}$

Do enunciado, $q' = q + 3$

Em $\textcircled{2}$ temos: $n = 5 \cdot (q + 3) + 4 = 5q + 19$

Comparando com $\textcircled{1}$: $5q + 19 = 7q + 3 \Rightarrow q = 8$

a) Em $\textcircled{1}$, temos que $n = 7 \cdot 8 + 3 = 59$ computadores.

b) Sim. Lembrando que 59 é um número primo, podemos distribuir esses computadores em 59 salas, cada uma com um único computador.

19. a) $45^m \cdot 60^n \cdot 75^p \cdot 90^q = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (3^2 \cdot 5)^m \cdot (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^n \cdot (3 \cdot 5^2)^p \cdot (2 \cdot 3^2 \cdot 5)^q = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^{2m+n+p+2q} \cdot 5^{m+n+2p+q} \cdot 2^{2n+q} = 1$$

Devemos ter:
$$\begin{cases} 2n + q = 0 \Rightarrow n = -\frac{q}{2} \\ m + n + 2p + q = 0 \quad \textcircled{2} \\ 2m + n + p + 2q = 0 \quad \textcircled{3} \end{cases}$$

Escolhendo, por exemplo, $q = 6$, vem:

$\textcircled{1} \quad n = -3$

$\textcircled{2} \quad m - 3 + 2p + 6 = 0 \Rightarrow m + 2p = -3$

$\textcircled{3} \quad 2m - 3 + p + 12 = 0 \Rightarrow 2m + p = -9$

$\left. \begin{array}{l} p = 1 \\ e \\ m = -5 \end{array} \right\}$

Assim, temos $m = -5, n = -3, p = 1$ e $q = 6$.

b) $m + n + p + q = 8 \Rightarrow m + n + q = 8 - p$

Em $\textcircled{2}$: $(8 - p) + 2p = 0 \Rightarrow p = -8$

Em $\textcircled{3}$: $2m + n - 8 + 2q = 0;$

como $n = -\frac{q}{2}$, temos:

$$2m - \frac{q}{2} - 8 + 2q = 0 \Rightarrow 2m + \frac{3}{2}q = 8 \quad \textcircled{4}$$

Como $m + n + q = 8 - (-8) = 16$ e $n = -\frac{q}{2}$, temos:

$$m - \frac{q}{2} + q = 16 \Rightarrow m + \frac{q}{2} = 16 \quad \textcircled{5}$$

$\textcircled{4}$ e $\textcircled{5} \Rightarrow q = -48$ e $m = 40$

Como $n = -\frac{q}{2}$, $n = 24$.

20. (01) F. Tome $m = 6$ e $n = 5$; $m + n = 11$, que não é divisível por 15.

(02) V. Se n é divisível por 7, podemos escrever $n = 7q$, sendo $q \in \mathbb{Z}$.

$n^2 = (7q)^2 = 49 \cdot q^2 = 7 \cdot \underbrace{(7q^2)}_{q'} = 7 \cdot q'$ com $q' \in \mathbb{Z}$, isto é, n^2 é divisível por 7.

(04) F. Se $n = 4$, o resto da divisão de 4 por 3 é ímpar, mas n é par.

(08) V

(16) F. Se $x = \frac{1}{2} > 0$, $x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = x$

(32) F. Tome $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{32}$; $x \cdot y = 8$

A soma pedida é: (02) + (08) = 10.

21. $91 = 13 \cdot 7$

Como o número dado é divisível por 91, é, portanto, divisível por 13 e por 7 simultaneamente.

$\begin{array}{ccccc} 7 & 7 & X & Y & \mid 7 \\ 0 & X & Y & 11 & \end{array} \Rightarrow XY \text{ é divisível por } 7$

Podemos ter: $XY = 7$; $XY = 14$; $XY = 21$; $XY = 28$; $XY = 35$

$XY = 42$; $XY = 49$; $XY = 56$; $XY = 63$; $XY = 70$;

$XY = 77$; $XY = 84$; $XY = 91$ ou $XY = 98$.

Fazendo as verificações, notamos que, se $XY = 35$, o número 7735 é divisível por 13. Todas as outras possibilidades não servem. Logo, $X = 3$ e $Y = 5$.

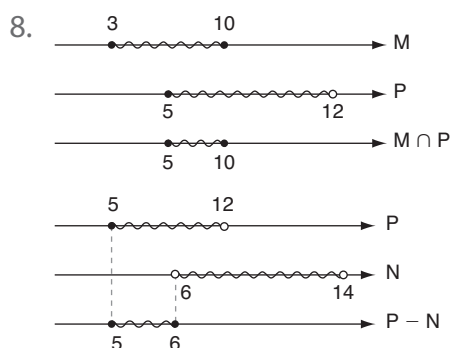
Testes

3. número de moedas = $\frac{1000}{0,26} \approx 3846,15$; 3846 moedas

número de cédulas = $\frac{1000}{0,17} \approx 5882,35$; 5882 cédulas

A resposta procurada é: $5882 - 3846 = 2036$.

Resposta: b.



$(M \cap P) \cup (P - N) = [5, 10]$ e o comprimento pedido é 5.

Resposta: c.

9.

5	a	b	c	8	d	e	f	x	...
---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$5 + a + b = 20 \Rightarrow a + b = 15$

$\underbrace{a + b}_{15} + c = 20 \Rightarrow c = 20 - 15 = 5$

$c + 8 + d = 20 \Rightarrow 5 + 8 + d = 20 \Rightarrow d = 7$

$8 + d + e = 20 \Rightarrow 8 + 7 + e = 20 \Rightarrow e = 5$

$d + e + f = 20 \Rightarrow 7 + 5 + f = 20 \Rightarrow f = 8$

$e + f + x = 20 \Rightarrow 5 + 8 + x = 20 \Rightarrow x = 7$, que é divisor de 49.

Resposta: a.

10. I) F. $a = \frac{1}{2}$, temos: $a^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = a$.

II) F. $a^2 = b^2 \Rightarrow a = \pm b$

III) V. Observe que $\forall b \in \mathbb{R}, b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq a^2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a| \geq a$.

IV) V

Resposta: d.

12. a) F. Se $a = \sqrt{8}$ e $b = \sqrt{2}$, então $a \cdot b = \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{Q}$.

b) F. Se $a = \pi$ e $b = -\pi$, então $a + b = 0 \in \mathbb{Q}$.

c) F. Há infinitos.

d) V. Basta fazer a média aritmética entre eles.

e) F. Se $a = -8$ e $b = -10$, então $a - b = -8 + 10 = 2 \in \mathbb{N}$.

Resposta: d.

13. $x = 0,949494... \Rightarrow 100x = 94,9494...$

$-x = 0,9494...$

$99x = 94 \Rightarrow x = \frac{94}{99}$

$y = 0,060606... \Rightarrow 100y = 6,0606...$

$-y = 0,0606...$

$99y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{99}$

$x + y = \frac{94}{99} + \frac{6}{99} = \frac{100}{99}$

Resposta: d.

15. ■ Número total de elementos de A: 10^{12}

■ Número de quadrados perfeitos de A. Temos:

$\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, \underbrace{(10^6)^2}_{10^{12}}\}$

São 10^6 elementos.

■ Número de cubos perfeitos de A. Temos:

$\{1^3, 2^3, 3^3, \dots, \underbrace{(10^4)^3}_{10^{12}}\}$

São 10^4 elementos.

■ Número de quadrados perfeitos e cubos perfeitos, simultaneamente. Temos:

$\{1^6, 2^6, \dots, \underbrace{(10^2)^6}_{10^{12}}\}$

São 10^2 elementos.

■ Número procurado: Total - (nº de quadrados ou cubos perfeitos)

$= 10^{12} - (10^6 + 10^4 - 10^2) = 10^{12} - 10^6 - 10^4 + 10^2$

Resposta: b.

16. $\frac{x}{y}$ é máximo se x é máximo e y é mínimo, isto é, se $x = 15$

e $y = 3 \Rightarrow \frac{x}{y} = 5$

$\frac{x}{y}$ é mínimo se x é mínimo e y é máximo, isto é, se $x = 2$

e $y = 18 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{9}$

Assim, $\frac{x}{y} \in \left[\frac{1}{9}, 5\right]$.

Resposta: d.

17. $N = ABC = 100A + 10B + C$

$N - 396 = CBA$

$100A + \cancel{10B} + C - 396 = 100C + \cancel{10B} + A$

$99A - 99C = 396$

$99(A - C) = 396$

$A - C = 4$

Como $A + C = 8$, segue que $A = 6$ e $C = 2$.

Resposta: c.

18. A alternativa a não ocorre, pois $-3 \notin A$.

A alternativa b não ocorre, pois $\sqrt{10} \notin B$ ($\sqrt{10} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$).

A alternativa c não ocorre, pois $-5 \notin B$. Note que $-5 \in \mathbb{Q}$ e $-5 \in (\mathbb{Z} - \mathbb{N})$.

A alternativa *d* está correta:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \in (\mathbb{N} \cup \mathbb{I}) \text{ e } \frac{\sqrt{3}}{2} \notin (\underbrace{\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}}_{\mathbb{Z}}); 3 \in \mathbb{Q} \text{ e } 3 \notin (\mathbb{Z} - \mathbb{N}),$$

$$2, \overline{31} \in \mathbb{Q} \text{ e } 2, \overline{31} \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}; \text{ logo, } 2, \overline{31} \in (\mathbb{N} \cup \mathbb{I}) \cup (\mathbb{Q} - \mathbb{N}).$$

Resposta: *d*.

19. Sejam *a, b, c, d* os números pedidos.

■ Se $a = b + c + d$, temos: $a + \underbrace{b + c + d}_a = 100 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2a = 100 \Rightarrow a = 50$$

■ Como 50 não é primo, *b, c* e *d* são primos.

Como $b + c + d = 50$, um deles deve ser par, pois se *b, c, d* fossem todos ímpares não ocorreria soma igual a 50. Como o único primo par é 2, um deles (digamos *b*) é igual a 2.

Daí: $c + d = 48$.

Podemos ter: {43, 5}; {41, 7}; {11, 37}; {17, 31} e {19, 29}, totalizando 5 soluções.

Resposta: *d*.

20. ■ *B* é o conjunto dos números pares;

■ Se $x \in C$, devemos ter *n* divisor positivo de 40, isto é, $n \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$.

Temos: $n = 1 \Rightarrow x = 40; n = 2 \Rightarrow x = 20; n = 4 \Rightarrow x = 10;$

$n = 5 \Rightarrow x = 8; n = 8 \Rightarrow x = 5; n = 10 \Rightarrow x = 4;$

$n = 20 \Rightarrow x = 2; \text{ e } n = 40 \Rightarrow x = 1$

$C = \{40, 20, 10, 8, 5, 4, 2, 1\}$

■ $(A \cap B) \cap C = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\} \cap C = \{4, 8, 10\}$

Resposta: *b*.

21. a) V. Se $n \in \mathbb{N}$, $2n + 1$ é ímpar. Como $n \cdot (n + 1)$ representa o produto de dois naturais consecutivos, que é par, segue que $\underbrace{n(n+1)}_{\text{par}} \cdot \underbrace{(2n+1)}_{\text{ímpar}} = \text{par}$.

b) F. Tome $a = 0$ e $b = -1$. Temos: $a - b > 0; a^4 - b^4 = 0^4 - (-1)^4 = 0 - 1 = -1 < 0$.

c) F. Pode ser racional. Tome $a = \sqrt{3}$ e $b = \sqrt{12}$.

d) F. Se $n = 11$, $n^2 + n + 11 = 11^2 + 11 + 11 = 11 \cdot 13$, que não é primo.

e) V.

Resposta: *a* e *e*.

22. I. Tome $a = \frac{1}{3}$ e $b = 1$; $a < b$, mas $\frac{1}{a} = 3 > 1 = \frac{1}{b}$.

II V.

III. F. Tome $a = 4$, $b = 2$ e $c = \frac{1}{2}$.

$(a : b) : c = (4 : 2) : \frac{1}{2} = 2 : \frac{1}{2} = 4$

$a : (b : c) = 4 : \left(2 : \frac{1}{2}\right) = 4 : 4 = 1$

Logo, apenas II é correta.

Resposta: *b*.

24. a) F. Se $a = 9$ e $b = 16$, temos: $\sqrt{a+b} = \sqrt{25} = 5 \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$.

b) F. $a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow (a+b) \cdot (a-b) = 0 \Rightarrow a = -b$ ou $a = b$.

c) F. Se $a = -3$, $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

d) F. Se $a = -1$ e $b = 1$, temos: $a < b$ e $\frac{1}{b} (=1) > \frac{1}{a} (= -1)$.

e) V. Como $0 < a < 1$, multiplicamos por *a*:

$$\underbrace{0 < a^2 < a}_{(*)} \Leftrightarrow 0 < \sqrt{a^2} < \sqrt{a} \Leftrightarrow 0 < |a| < \sqrt{a}$$

Como $a > 0$, $|a| = a$, donde:

$$0 < a < \sqrt{a}$$

Em (*) vem: $0 < a^2 < a < \sqrt{a}$.

Resposta: *e*.

25. O número de períodos de tempo necessário para essa criança trocar pela bicicleta é $9\,200 \div 20 = 460$. Como cada período custa R\$ 3,00, o gasto total seria de 460. R\$ 3,00 = R\$ 1 380,00.

Resposta: *d*.

28. A carga máxima do caminhão é de 1500 telhas (t), que equivalem a 1200 tijolos (j).

Carregado com $900 \cdot t$, a carga máxima a ser acrescentada é de $600 \cdot t$.

Como $15 \cdot t = 12 \cdot j$, temos que (multiplicando os dois membros por 40): $600 \cdot t = 480j$, isto é, podem ser acrescentados, no máximo, 480 tijolos.

Resposta: *d*.

Capítulo 3 Funções

Exercícios

1. a) $4,5 \cdot \text{R\$ } 14,00 = \text{R\$ } 63,00$

b) $\frac{\text{R\$ } 350,00}{\text{R\$ } 14,00} = 25$ quilogramas

c) $y = 14x$

2. a)

Número de litros	0,25	0,5	2	3	10	25	40
Distância percorrida (km)	2,25	4,5	18	27	90	225	360

b) $d = 9 \ell$

3. a)

Tempo	15 min	0,5 hora	2 horas	5 horas
Distância (km)	225	450	1800	4500

b) 3,2 horas = 3 horas e 12 minutos

c) $d = 900t$

4. a) $\text{R\$ } 94,00 = \text{R\$ } 50,00 + 2r$; $r = \text{R\$ } 22,00$

b) $y = 50 + 22x$, em reais

5. a)

Lado (cm)	1	3,5	5	8	10
Perímetro (cm)	4	14	20	32	40
Área (cm²)	1	12,25	25	64	100

- b) $p = 4\ell$
 c) $a = \ell \cdot \ell = \ell^2$
 d) Sim; não.

6. a)

Número de pedreiros	1	4	6	8	12
Número de dias	$12 \cdot 2 = 24$	$24 \div 4 = 6$	$24 \div 6 = 4$	$24 \div 8 = 3$	$24 \div 12 = 2$

b) $d = \frac{24}{n}$

7. a)

Número de horas	1	2	3	4	5	6
Número de células	2	4	8	16	32	64

b)

Número de horas	7	8	9	10
Número de células	128	256	512	1024

Tempo mínimo: 10 horas.

c) $n = 2^t$

8. a) e b) Sim, pois para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ associado a esse x .

c) Não, pois existe um $x \in A$ associado a dois $y \in B$.

d) Não, pois existe um $x \in A$ que não está associado a $y \in B$.

9. a) Sim, $y = x$.

b) Não.

c) Sim; $y = 2x$.

d) Não.

10. a) Sim.

b) Sim.

c) Não, pois, se $x = 2$, $y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ e $5 \notin B$.

11. a) $y = x + 1$; sim.

b) $y = x^2$; sim.

c) $y = -x$; não, pois o oposto de x não pertence a \mathbb{N} .

12. a) $f(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 + 4 = 6$

b) $f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - (-1) + 4 = 8$

c) $f(0) = 3 \cdot 0^2 - 0 + 4 = 4$

d) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 4 = \frac{17}{4}$

e) $f(\sqrt{2}) = 3 \cdot (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} + 4 = 10 - \sqrt{2}$

13. a) $f(0) = (3 + 0) \cdot (2 - 0) = 6$

$f(-2) = (3 + (-2)) \cdot (2 - (-2)) = 4$

$f(1) = (3 + 1) \cdot (2 - 1) = 4$

b) $f(a) = (3 + a) \cdot (2 - a) = 6 - a - a^2$

$f(-a) = (3 - a) \cdot (2 + a) = 6 + a - a^2$

A diferença pedida é igual a $(-2a)$.

14. a) $f(0) = 2 \cdot 0 + (-1)^0 = 1$

b) $f(1) = 2 \cdot 1 + (-1)^1 = 1$

c) $f(2) = 2 \cdot 2 + (-1)^2 = 5$

d) $f(-2)$ não existe, pois $-2 \notin \mathbb{N}$.

e) $f(37) = 2 \cdot 37 + (-1)^{37} = 73$

15. a) $\frac{f(0) + g(-1)}{f(1)} = \frac{(3 \cdot 0^2 - 0 + 5) + [(-2) \cdot (-1) + 9]}{3 \cdot 1^2 - 1 + 5} = \frac{16}{7}$

b) $g(x) = f(-3) + g(-4)$

$-2x + 9 = 3 \cdot (-3)^2 - (-3) + 5 + (-2) \cdot (-4) + 9$

$x = -\frac{43}{2}$

16. a) $\frac{4x-2}{3} = 6 \Rightarrow x = 5$

b) $\frac{4x-2}{3} = -10 \Rightarrow x = -7$

c) $\frac{4x-2}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ não existe

d) $\frac{4x-2}{3} = 1 \Rightarrow x = \frac{5}{4} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ não existe

17. a) $t = 0 \Rightarrow v(0) = 1800 \cdot \left(1 - \frac{0}{20}\right) = 1800$ (reais)

b) $t = 1 \Rightarrow v(1) = 1800 \cdot \left(1 - \frac{1}{20}\right) = 1710$ (reais)

A desvalorização é, portanto, $1800 - 1710 = 90$ (reais).

c) $1260 = 1800 \cdot \left(1 - \frac{t}{20}\right) \Rightarrow \frac{1260}{1800} = 1 - \frac{t}{20} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0,7 = 1 - \frac{t}{20} \Rightarrow \frac{t}{20} = 0,3 \Rightarrow t = 6$ anos

18. a) $f(-8) = -4 \Rightarrow -\frac{3}{4} \cdot (-8) + m = -4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 6 + m = -4 \Rightarrow m = -10$

b) $f(1) = -\frac{3}{4} \cdot 1 - 10 = -\frac{43}{4}$

c) $-\frac{3}{4}x - 10 = -12 \Rightarrow -\frac{3}{4}x = -2 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$

19. a) $y = 400 - \frac{5}{2} \cdot 60 = 250$ (pagantes)
 b) $320 = 400 - \frac{5}{2}x \Rightarrow \frac{5x}{2} = 80 \Rightarrow x = 32$ (reais)
 c) $y = 400 - \frac{5}{2} \cdot 90 = 175$ (pagantes)
 Como o ingresso cobrado foi R\$ 90,00, a arrecadação foi $175 \cdot 90 = 15\,750$ (reais).

20. a) $f(1) = m \cdot 4^1 = 12 \Rightarrow m = 3$
 b) $f(2) = 3 \cdot 4^2 = 48$

21. a) $L(15) = 0$
 $-15^2 + 75 \cdot 15 + q = 0 \Rightarrow q = -900$
 b) $L(20) = -20^2 + 75 \cdot 20 - 900 = 200$ (reais)

22. a)
- | Dia | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 |
|--------------------|------|-----|------|------|------|
| Quantidade (mg/dl) | 5,75 | 4,3 | 3,15 | 1,98 | 1,43 |

As quantidades da tabela são obtidas substituindo os valores de t na expressão $n(t)$.

- b) O paciente foi liberado no primeiro dia em que $n(t) < 1$, ou seja, para o menor valor de t que satisfaz

$$\frac{20t + 3}{2 \cdot (t^2 + 1)} < 1. \text{ Por tentativa, verifica-se que } t = 11.$$

Observe:

$$t = 9 \Rightarrow n(t) = \frac{183}{164} \cong 1,115$$

$$t = 10 \Rightarrow n(t) = \frac{203}{202} \cong 1,0049$$

$$t = 11 \Rightarrow n(t) = \frac{223}{244} \cong 0,9139 < 1$$

O paciente foi liberado no dia 11.

23. $f(a) + f(a + 1) = 3 \cdot f(2a) \Rightarrow (-3a + 5) +$
 $+ [-3(a + 1) + 5] = 3 \cdot (-3 \cdot 2a + 5) \Rightarrow$
 $\Rightarrow -3a + 5 - 3a + 2 = -18a + 15 \Rightarrow$
 $\Rightarrow -6a + 7 = -18a + 15 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 12a = 8 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

24. $f(m) = -\frac{2m}{3} + 4;$
 $f(1 - m) = -\frac{2}{3} \cdot (1 - m) + 4 = -\frac{2}{3} + \frac{2m}{3} + 4;$
 $f(m) = f(1 - m) \Rightarrow -\frac{2}{3} \cdot m + 4 =$
 $= -\frac{2}{3} + \frac{2m}{3} + 4 \Rightarrow -\frac{4m}{3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

25. $D = A = \{-1, 0, 1, 2\}$
 O contradomínio é $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
 O conjunto imagem é $\{1, 2, 5\}$.

26. $\text{Im} = \{1, 0, 6, 3\}$ e $B = \{0, 1, 3, 6\}$

27. $B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
 $\text{Im} = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$
 Os elementos de B que não pertencem a Im são: $-5, -4, -2, 0, 2$ e 4 , num total de 6.

28. O conjunto imagem de f é $\text{Im} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq 0\} = \mathbb{Z}_-$.

29. a) \mathbb{R}
 b) \mathbb{R}
 c) $x \neq 0$ e $D = \mathbb{R}^*$
 d) $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ e $D = \mathbb{R} - \{1\}$

30. a) $x - 2 \geq 0$ e $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$
 b) \mathbb{R}
 c) $x - 3 \geq 0$ e $\sqrt{x - 3} \neq 0 \Rightarrow x \geq 3$ e $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x > 3$;
 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
 d) $x + 1 \geq 0$ e $x \neq 0 \Rightarrow x \geq -1$ e $x \neq 0$;
 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \text{ e } x \neq 0\}$

31. a) $2x - 1 \geq 0$ e $x \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$ e $x \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$
 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{2}\right\}$
 b) $-3x + 5 \geq 0$ e $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{5}{3}$ e $x \geq 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{5}{3}$
 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq \frac{5}{3}\right\}$
 c) $x^3 - 4x \neq 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 4) \neq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \neq 0, x \neq 2 \text{ e } x \neq -2$
 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2, x \neq 0, x \neq 2\}$
 d) Devemos ter $x^2 + 5 \geq 0$. Como, para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, então $x^2 + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Assim, $D = \mathbb{R}$.

32. a) Das 10:00 às 12:00;
 das 12:30 às 14:00;
 das 15:30 às 16:00;
 das 17:00 às 18:00.
 b) Das 12:00 às 12:30;
 das 14:00 às 15:30;
 das 16:30 às 17:00.
 c) Entre R\$ 9,20 e R\$ 12,00.
 d) 15:00; um valor próximo das 16:00 e das 17:00.
 e) alta; 2%

33. a) 1986; R\$ 1 107,00
 b) 1984; R\$ 685,00
 c) 1981 a 1984; 1986 a 1988; 1989 a 1992; 1995 a 2001
 d) 1985 e 1986
 e) Não; 20% de 806 = 161,2
 f) 1986; 1989, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2006 e 2007

34. a) V

b) F; internas \rightarrow dezembro de 2010 e exportações \rightarrow \rightarrow maio de 2011

c) V; pois o dobro de $1004 = 2008 < 2757$

d) F; houve períodos de aumento nas exportações enquanto as vendas internas só diminuíram.

e) O total de vendas internas e exportações era: $13441 + 2757 = 16198$; o estoque era: $19289 - 16198 = 3091$; (F)

35. a) V

b) V; $\frac{20,66 + 20,01 + 17,56}{3} = 19,41$

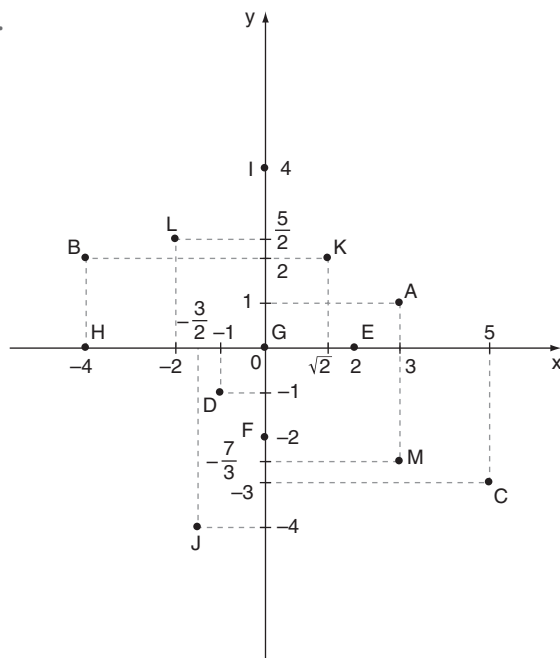
c) F; Para obtermos o valor da queda, podemos fazer:

$$\frac{31,9 - 17,56}{31,9} \cong 45\%$$

d) F; $\frac{20,66}{1000} = \frac{x}{50000} \Rightarrow x = 1033$ órbitos

e) V; 10% de $20,01 \cong 2$; $20,01 - 2 = 18,01$

36.



37. A(4, 2)

B(-4, 6)

C(-5, -3)

D(4, -5)

E(0, 4)

F(-3, 0)

G(0, -6)

H(5, 0)

I(0, 0)

38. a) $x = 2$ e $y = -5$

$$b) \begin{cases} x + 4 = 5 \\ y - 1 = 3 \end{cases}; \text{ daí, } x = 1 \text{ e } y = 4$$

$$c) \begin{cases} x + y = 3 \\ x - 3y = 7 \end{cases}; \text{ daí, } x = 4 \text{ e } y = -1$$

$$39. \begin{cases} m^2 = 16 \Rightarrow m = +4 \text{ ou } m = -4 \\ m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4 \end{cases}$$

Portanto, $m = -4$.

$$40. m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$41. m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = +1 \text{ ou } m = -1$$

$$42. m - 5 = 0 \Rightarrow m = 5$$

$$2 - n = 0 \Rightarrow n = 2$$

43. a) $a < 0$ e $b > 0$

b) Como $-a > 0$ e $b > 0$, o ponto Q pertence ao 1º quadrante.

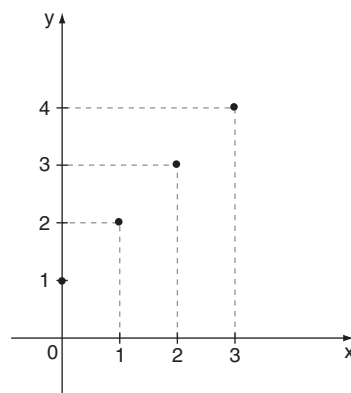
44. a) $-a < 0 \Rightarrow a > 0$

$b < 0$

b) Como $a > 0$ e $b < 0$, o ponto S pertence ao 4º quadrante.

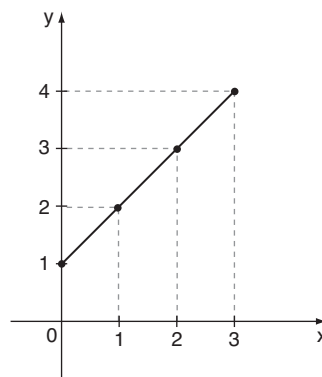
45. a) $A = \{0, 1, 2, 3\}$

$Im = \{1, 2, 3, 4\}$

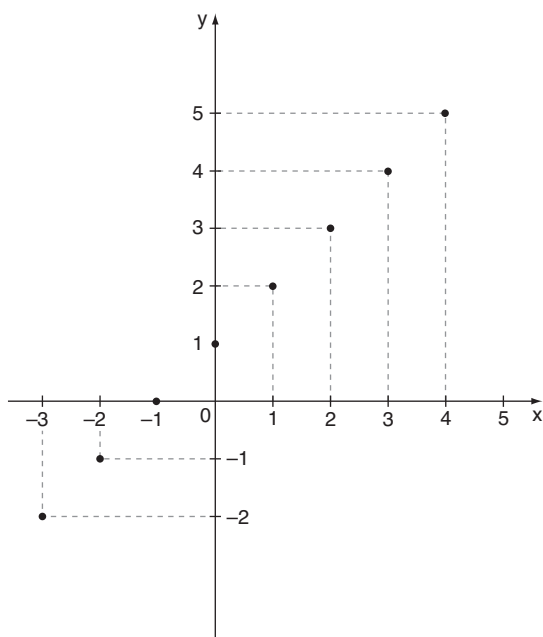


b) $A = [0, 3]$

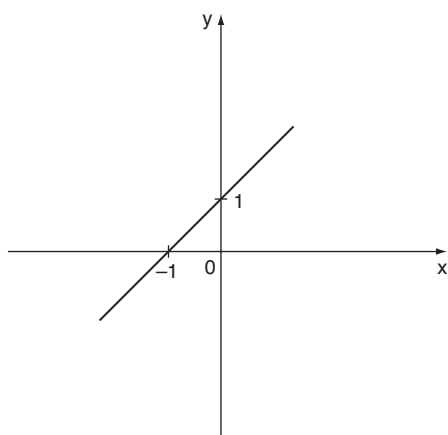
$Im = [1, 4]$



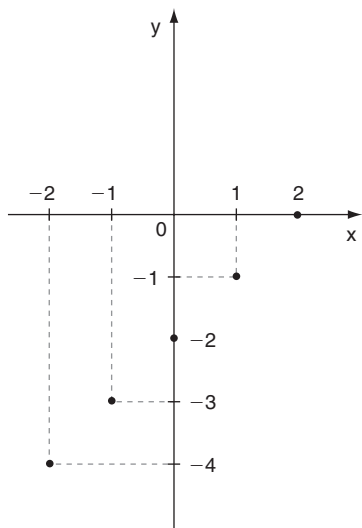
c) $A = \mathbb{Z}$
 $\text{Im} = \mathbb{Z}$



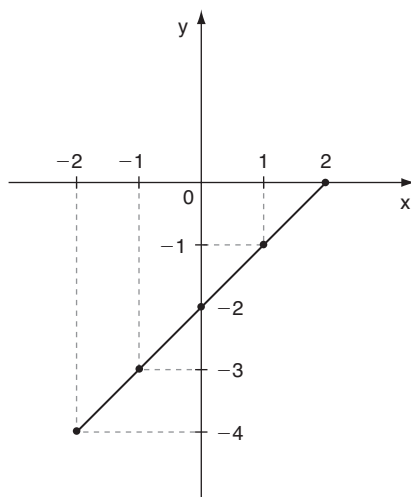
d) $A = \mathbb{R}$
 $\text{Im} = \mathbb{R}$



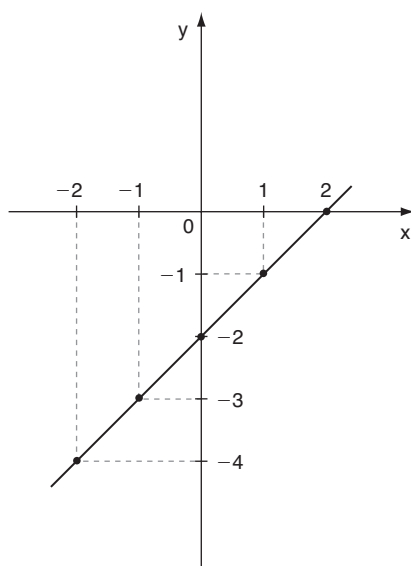
46. a)



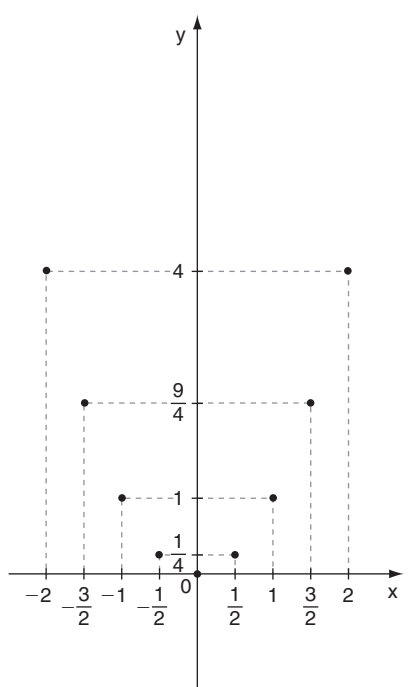
b)

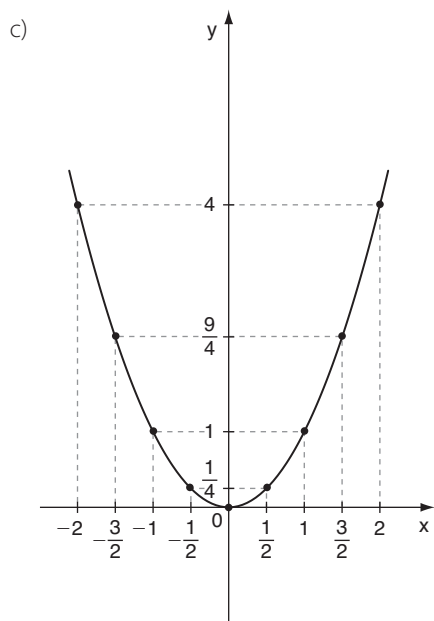
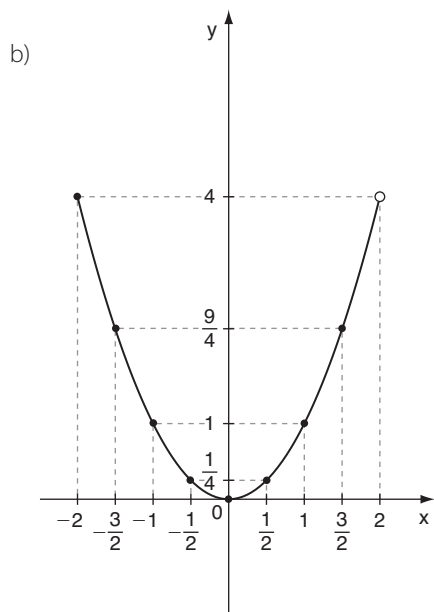


c)

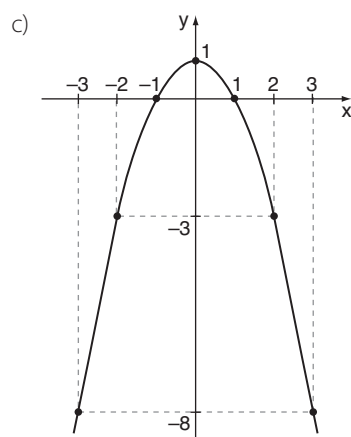
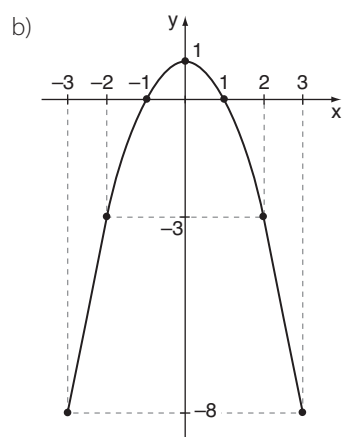
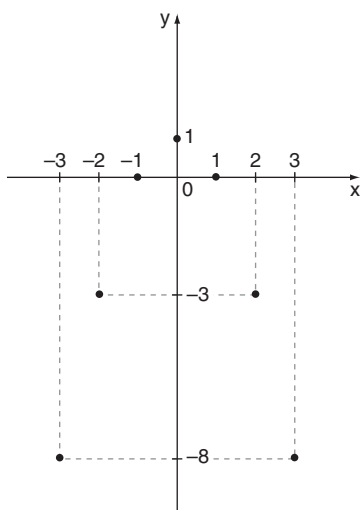


47. a)

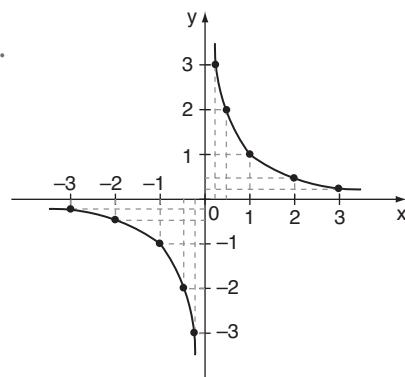




48. a)



49.



50. $y = 2x + b$

Pelo gráfico, se $x = 0, y = 3$.

$$3 = 2 \cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$$

51. $y = ax^2 + b$

Pelo gráfico, se $x = 0, y = 2$.

$$2 = a \cdot 0^2 + b$$

$$b = 2$$

$$\text{Agora, } y = ax^2 + 2$$

Pelo gráfico, se $x = 1, y = 3$.

$$3 = a \cdot 1^2 + 2 \Rightarrow a = 1$$

52. $f(a) = 5 \Rightarrow -3a + 2 = 5 \Rightarrow a = -1$

$$f(b) = -7 \Rightarrow -3b + 2 = -7 \Rightarrow b = 3$$

53. c, d, e, g

- c) Para todo $x < 0$ há duas imagens associadas.
 d) $x = -3$ possui duas imagens: 1 e -1.
 e) Observe que para $-1 < x < 1$ não há imagem correspondente.
 g) $x = 1$ está associado a infinitos valores de y ; para $x \neq 1$ não há imagem.

54. crescente decrescente constante

- a) $]0, +\infty[$ $]-\infty, 0[$
 b) $] -3, +\infty[$ $]-\infty, -3[$
 c) $]2, +\infty[$ $]-\infty, 2[$
 d) $] -2, 4[$ $]-\infty, -2[$ ou $]4, +\infty[$
 e) $]-\infty, +\infty[$

55. a) raiz: -3

- $y > 0$ quando $x > -3$
 $y < 0$ quando $x < -3$

b) raízes: $x = 0$ e $x = 2$

- $y > 0$ quando $x < 0$ ou $x > 2$
 $y < 0$ quando $0 < x < 2$

c) raízes: -1 e 1

- $y > 0$ quando $x < -1$ ou $x > 1$
 $y < 0$ quando $-1 < x < 1$

d) raízes: -5, -3 e 1

- $y > 0$ quando $-5 < x < -3$ ou $x > 1$
 $y < 0$ quando $x < -5$ ou $-3 < x < 1$

e) não há raízes reais

- $y > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$
 $y < 0$ não ocorre

f) raízes: -3 e $\frac{15}{2}$

- $y > 0$ quando $-3 < x < \frac{15}{2}$
 $y < 0$ quando $x < -3$ ou $x > \frac{15}{2}$

56. a) $f(-1) = 4$; $f(0) = 4$; $f(-3) = \frac{3}{2}$ e $f(3) = 0$

b) $x < -2$

c) $\frac{3}{2} < x < \frac{9}{2}$

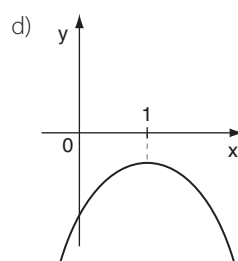
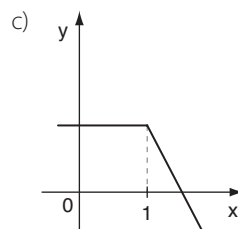
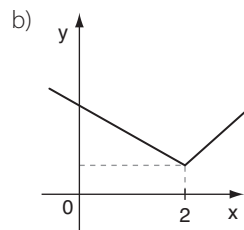
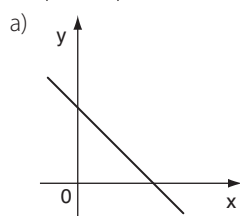
d) $y > 0$ quando $x < 3$

$y < 0$ quando $3 < x < \frac{9}{2}$

e) $\text{Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid -\frac{7}{2} < y \leq 4 \right\}$

f) 3

57. Respostas possíveis:



58. a) $\text{Im} = \mathbb{R}_+$

b) $\text{Im} = \{4\}$

c) $\text{Im} =]-\infty, 3]$

d) $\text{Im} = \mathbb{R}_+^*$

59. a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$; par

b) 0

c) 0

d) $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$; ímpar

e) $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$; par

60. a) $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{4 - 4}{2} = 0$

b) $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{7 - 3}{2} = 2$

c) $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-3 - 3}{2} = -3$

d) $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{4 - 4}{2} = 0$

61. A taxa de variação nos cinco primeiros anos é o quádruplo da taxa de variação nos cinco últimos anos.

De 2000 a 2005: $\frac{100 - 60}{5} = 8$

De 2010 a 2015: $\frac{115 - 105}{5} = 2$

Da hipótese, $x \neq \frac{3}{2}$.

Em (*), obtemos $a = -20 + 27 = 7$.

$$f(2) = \frac{-2 + \frac{2}{3}}{2 \cdot 2 + 7} = \frac{-\frac{1}{3}}{11} = -\frac{1}{33}$$

3. a) Se $x = 0$, então $x + 1 = 1$ e $\text{def}(1) = 2 \cdot f(0) + 1$ tem-se

b) Se $x = 1$, então $x + 1 = 2$ e $\text{def}(2) = 2 \cdot \text{f}(1) + 1$ tem-se

$$f(2) = 2 \cdot (-5) + 1 = -9.$$

$$= 2 \cdot (-9) + 1 = -17.$$

$$-33 = 1 + (-17) \cdot 2 =$$

$$= 20 \cdot 2,45 = 49 \text{ milhares ou } 49\,000 \text{ pessoas}$$

c) Devemos determinar x tal que $y = 30$:

$$\frac{8}{\sqrt{10}} \cdot 10 = \sqrt{10} \cdot 8$$

$$= \frac{10}{30\sqrt{2} - 20\sqrt{2}} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 1.4$$

$$\Leftrightarrow 20 = \frac{c}{200} \Leftrightarrow c = 10$$

$$\Leftrightarrow 300b + 500 = 6a + 200 \Leftrightarrow$$

$$= 600b + 600 = 10a + 200 \Leftrightarrow 10a - 600b =$$

$$\text{Assim, } f(x) = \frac{x + 10}{100x + 200}$$

1. Set $t = 1$, then $n(t) = 100 - 4 = 96$.

Substituindo-se $t = 1$ e $t = 5$ em $n(t)$, tem-se o

Substituindo-se $t = 3$ em $n(t) = -4t^2 + 100$, obtêm-se $n = 64$; o número de boxes ocupados era $100 - n = 36$.

$$= -18 + 54b \Rightarrow a = -20 + 54b (*)$$

em comparação com o 1%.

O ritmo de crescimento do IDH diminui no 2º período,

Taxa média de variação no 2º período:

63. Taxa média de variação no 1º período:

$$z^{-3} = \frac{z}{z^{-1} - 5} = \frac{z - 0}{(z - 0)(z - 5)} \quad (p)$$

$$1 - \frac{z}{0 - z} = \frac{0 - z}{h(z) - h(0)} \quad (10) \quad (c)$$

$$4 = \frac{2}{8-0} = \frac{0-2}{9(7)-9(0)} \quad (q) \text{ (1)}$$

$$62. \text{ a) } (10) \quad \frac{2-0}{2-1(0)} = \frac{2}{2-2^0} = \frac{2}{3}$$

6. a) $f(x) > 0$ quando $x > -1$
 b) $g(x) \leq 0$ quando $x \geq 2$
 c) $x > \frac{1}{2}$
 d) Observe que:
 ■ $x < -1, f(x) < 0$ e $g(x) > 0; h(x) < 0$ (*)
 ■ $-1 < x < 2, f(x) > 0$ e $g(x) > 0; h(x) > 0$
 ■ $x > 2, f(x) > 0$ e $g(x) < 0; h(x) < 0$ (**)
 De (*) e (**), tem-se: $x < -1$ ou $x > 2$
 e) p está definida quando $g(x) \neq 0$, isto é, $x \neq 2$. (Observe que $x = 2$ é raiz de g .)
7. a) Devemos ter: $1 + x^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -1$; para todo $x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ e, portanto, $x^2 \neq -1$; $D = \mathbb{R}$.
 b) Como $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o número real $\frac{1}{1+x^2}$ não pode assumir valores negativos; portanto, Im não pode conter $-\frac{1}{2}$.
 Se $y = 5$ vem:
 $5 = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow 1 + x^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow x^2 = -\frac{4}{5} \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$ que satisfaz a condição.
 Observe que, $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x^2 \geq 1$ e, desse modo,
 $0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$.
 c) f é decrescente se $x > 0$; f é crescente se $x < 0$.
 d) $y > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
 $y < 0$ não ocorre
8. a) $a = -7$ e $b = \frac{31}{2}$
 b) Para todo $x \in \left[-7, \frac{31}{2}\right]$ tem-se $-11 \leq y < 7$; assim, o conjunto imagem de f é $\text{Im} = [-11, 7]$.
 c) $f(2) = 5$, pois f é constante se $0 \leq x \leq 3$.
 $f(10) = -6$
 $f(-2) = 0$, pois -2 é uma raiz de f .
 O resultado procurado é $5 + (-6) - 0 = -1$.
 d) f é crescente se $-7 \leq x \leq 0$ ou $10 \leq x < \frac{31}{2}$
 e) $y > 0$ quando $-2 < x < 6$ ou $12 < x < \frac{31}{2}$
 $y < 0$ quando $-7 \leq x < -2$ ou $6 < x < 12$
 f) $\frac{f(10) - f(-2)}{10 - (-2)} = \frac{-6 - 0}{12} = -\frac{1}{2}$
 g) $\frac{f(0) - f(-7)}{0 - (-7)} = \frac{5 - (-11)}{7} = \frac{16}{7}$
 h) $0 \leq x \leq 3$
9. a) Se Cíntia está 3 quilos abaixo do seu peso ideal, este é 57 quilos. Da equação $57 = (a - 100) - \left(\frac{a - 150}{2}\right)$ tem-se $a = 164$, em centímetros (1,64 m).
 b) Sejam a_o a altura de Paulo e a_a de Paula; sejam P_o o peso de Paulo e P_a o de Paula.

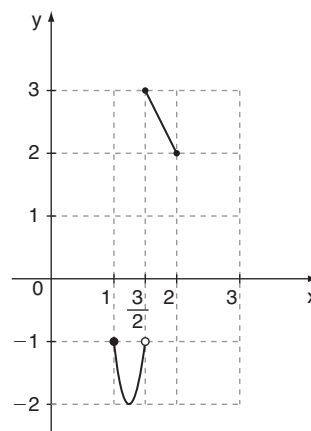
Como $a_o = a_a$ e $P_o = 2 + P_a$, então:

$$(a_o - 100) - \frac{a_o - 150}{4} = 2 + (a_o - 100) - \frac{a_o - 150}{2}, \text{ cuja}$$

solução é $a_o = 158 \text{ cm} \Rightarrow P_o = 56$ e $P_a = 54$.

10. a) Se $x = 3$, temos $f(9) = 3 \cdot f(3)$, isto é, $45 = 3 \cdot f(3) \Rightarrow f(3) = 15$;
 se $x = 1$, temos $f(3) = 3 \cdot f(1)$, isto é, $15 = 3 \cdot f(1) \Rightarrow f(1) = 5$.
 b) Se $x = 9$, vem
 $f(27) = 3 \cdot f(9)$
 $f(27) = 3 \cdot 45 = 135$
11. h está definida quando o radicando $f(x) - g(x)$ é não negativo, isto é, (*) $f(x) - g(x) \geq 0$ (ou $f(x) \geq g(x)$).
 a) Neste caso, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ e $g(x) < 0$. Desse modo, $f(x) - g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}; D = \mathbb{R}$.
 b) Neste caso, $f(x) \geq g(x)$ quando $x \leq -\frac{1}{2}$ ou $x \geq 3$
 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 3\right\}$.
 c) Observe que, se $x \neq 0, g(x) > f(x)$;
 se $x = 0, f(x) = g(x) = 0$ e (*) é satisfeita. $D = \{0\}$
12. a) Como $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, temos $f(x) = 2x + 3 + \sqrt{-(x - 1)^2}$. f está definida quando $-(x - 1)^2 \geq 0$, ou melhor, $(x - 1)^2 \leq 0$.
 Mas essa última desigualdade só é satisfeita se $x = 1$, pois $(1 - 1)^2 \leq 0$ (V); se $x \neq 1, (x - 1)^2 > 0$.
 Assim, o domínio de f é $\{1\}$.
 b) $f(1) = 2 \cdot 1 + 3 + \sqrt{-(1 - 1)^2} = 5 + \sqrt{0} = 5$
13. a) $v = 20 \cdot \sqrt{27 + 273}$
 $v = 20 \cdot \sqrt{300}$
 $v = 20 \cdot \sqrt{100 \cdot 3} = 20 \cdot 10 \cdot 1,73 \Rightarrow v = 346 \text{ m/s}$
 b) $340 = 20 \cdot \sqrt{t + 273}$
 $\frac{340}{20} = \sqrt{t + 273} \Rightarrow 17 = \sqrt{t + 273} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 17^2 = (\sqrt{t + 273})^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 289 = t + 273 \Rightarrow t = 16^\circ \text{C}$

14. Possível resposta:



15. No início, a solução continha 75 ℓ de álcool e 25 ℓ de água.

a) $f(0) = \frac{25 \ell}{100 \ell} = \frac{1}{4} = 0,25$

b) Após a retirada de x litros de água, a solução passará a ter $100 - x$ litros, dos quais 75 ℓ de álcool e $25 - x$ litros de água.

Assim, $f(x) = \frac{25 - x}{100 - x}$; para $0 \leq x \leq 25$.

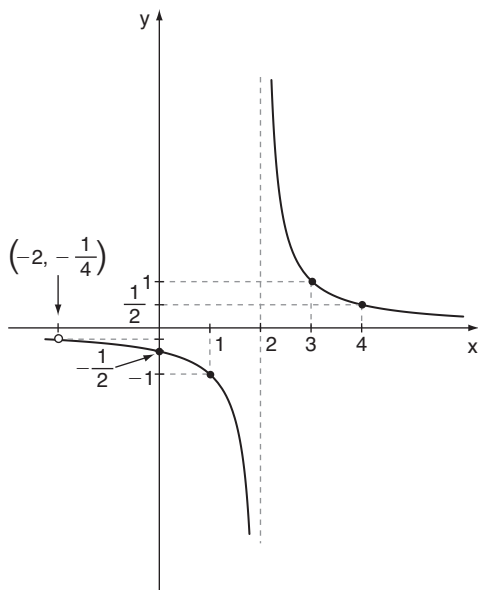
16. a) $\frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{(x+2) \cdot (x-2)} = \frac{1}{x-2}$

b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

$f(0) = -\frac{1}{2}$; $f(1) = \frac{1}{-1} = -1$

$f(3) = \frac{1}{3-2} = 1$; $f(4) = \frac{1}{4-2} = \frac{1}{2}$

c) O gráfico de f é o mesmo gráfico da função definida por $g(x) = \frac{1}{x-2}$, excetuando-se o ponto $(-2, -\frac{1}{4})$, uma vez que $x = -2$ não pertence ao domínio de f .



■ Observe que para $x > 2$, à medida que aumentamos o valor de x , o valor de y tende a zero. Por exemplo, se $x = 10$, $f(10) = 0,125$;

Se $x = 20$, $f(20) = \frac{1}{18} = 0,0\bar{5}$ etc.

Para valores de x muito próximos de 2, o valor de y tende a ser arbitrariamente grande. Por exemplo, se $x = 2,001 \Rightarrow f(2,001) = \frac{1}{0,001} = 1000$; se $x = 2,00001 \Rightarrow f(2,00001) = 100\,000$ etc.

■ Para $x < 2$, considerando valores muito próximos de 2, temos que y tende a "menos infinito". Por exemplo, se $x = 1,999 \Rightarrow f(1,999) = -1000$; se $x = 1,99999 \Rightarrow f(1,99999) = -100\,000$ etc.

À medida que diminuimos o valor de x , y tende a zero. Por exemplo, se $x = -10 \Rightarrow f(-10) = -0,083$; se $x = -20 \Rightarrow f(-20) = -0,045$ etc.

17. a) Funções pares: gráficos I e III.

Funções ímpares: gráficos IV e V.

b) Possíveis respostas:

Função par: $y = x^2$; $y = x^4$; $y = 2x^2$

Função ímpar: $y = -x$; $y = x$; $y = \frac{1}{x}$

18. a) Devemos determinar x tal que

$$\frac{1}{x + \frac{1}{2}} + 1 = x \Rightarrow \frac{1}{\frac{2x+1}{2}} = x-1 \Rightarrow \frac{2}{2x+1} = x-1 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$

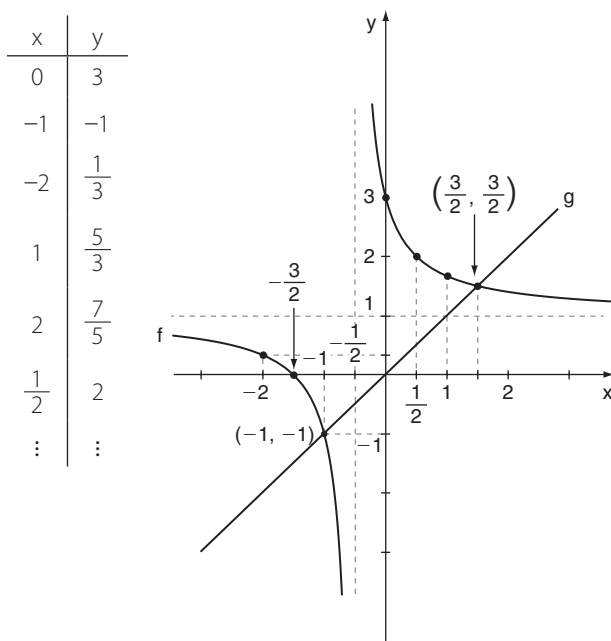
b) $f(x) = \frac{2}{2x+1} + 1$;

■ $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{1}{2} \right\}$

■ raiz de f : $\frac{2}{2x+1} + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

O gráfico de $y' = \frac{2}{2x+1}$ é uma hipérbole.

O gráfico de f é a hipérbole transladada de uma unidade, para cima.



19. a) $t = 0 \Rightarrow Q(0) = \frac{10 \cdot 0 + 750}{0 + 15} = \frac{750}{15} = 50$ partículas/ℓ

$t = 15 \Rightarrow Q(15) = \frac{10 \cdot 15 + 750}{15 + 15} = \frac{900}{30} = 30$ partículas/ℓ

b) $12 = \frac{10t + 750}{t + 15} \Rightarrow 12t + 180 = 10t + 750 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 285$ minutos =

= 4,75 horas (ou 4 horas e 45 minutos)

c) 1ª parte:

$Q(t) = \frac{10t + 750}{t + 15} = a + \frac{b}{t + c}$

Devemos ter:

$$t + 15 = t + c \Rightarrow c = 15$$

$$a + \frac{b}{t+15} = \frac{a \cdot (t+15) + b}{t+15} = \frac{a \cdot t + (15a + b)}{t+15}$$

Comparando com a expressão de $Q(t)$, vem:

$$\begin{cases} a = 10 \\ 15a + b = 750 \end{cases} \xrightarrow{a=10} b = 600$$

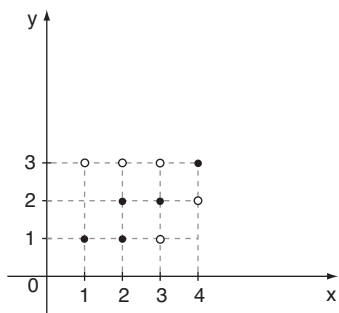
$$\text{Assim, } Q(t) = 10 + \frac{600}{t+15}.$$

2ª parte:

Substituindo $Q(t)$ por qualquer número real positivo menor que 10, obteremos uma equação na qual um dos membros é igual a $\frac{600}{t+15}$ e o outro membro é um número real negativo. Desse modo, não existe $t > 0$ que satisfaz a equação mencionada, isto é, a afirmação dada é verdadeira.

Testes

2. Considere a figura



Observe que os pontos (1, 3), (2, 3) e (3, 3) estão alinhados. Assim, quem jogou com a cor cinza seria o vencedor, em sua terceira jogada.

Resposta: a.

$$4. H = (10 \text{ min}) \cdot 2 \cdot 5 = 100 \text{ min} = \frac{100}{60} h = \frac{5}{3} h$$

$$C = \frac{2500 \cdot \frac{5}{3} \cdot 30}{1000} = 125 \text{ kWh}$$

Resposta: c.

8. Para $n = 1$, temos:

$$f(2) = 3 \cdot f(1) - f(0) = 3 \cdot 0 - 1 = -1. (02) \text{ é verdadeira.}$$

Para $n = 2$, temos:

$$f(3) = 3 \cdot f(2) - f(1) = 3 \cdot (-1) - 0 = -3. (08) \text{ é falsa.}$$

Para $n = 3$, temos:

$$f(4) = 3 \cdot f(3) - f(2) = 3 \cdot (-3) - (-1) = -8. (16) \text{ é falsa.}$$

Para $n = 4$, temos:

$$f(5) = 3 \cdot f(4) - f(3) = 3 \cdot (-8) - (-3) = -21. (01) \text{ é verdadeira.}$$

Para $n = 5$, temos:

$$f(6) = 3 \cdot f(5) - f(4) = 3 \cdot (-21) - (-8) = -55. (04) \text{ é verdadeira.}$$

Resposta: (02) + (01) + (04) = 07.

9. Se $n \in \mathbb{N}$ é ímpar, escrevemos $n = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{N}$.

$$f(n) = n^2 - 9 = (2k + 1)^2 - 9 = 4k^2 + 4k + 1 - 9 = 4k^2 + 4k - 8 = 4 \cdot \underbrace{(k^2 + 4k - 8)}_{\in \mathbb{Z}}$$

Logo, $f(n)$ é múltiplo de 4 e, portanto, divisível por 4.

Resposta: b.

10. a) V. $f(10) = 0$, isto é, decorridos 10 minutos ele voltou ao ponto de apoio – observe que a distância a que ele se encontrava do ponto de apoio é igual a zero.

b) F. Foi após 10 minutos.

c) V. Foram 10 minutos (de 25 a 35) e 10 minutos (de 45 a 55).

d) V. Ele saiu aos 35 minutos e iniciou o regresso aos 40 minutos.

e) V. Ele chegou aos 25 minutos e encerrou o trabalho aos 75 minutos, totalizando $75 - 25 = 50$ minutos.

Resposta: a, c, d e e.

$$11. A(t) = B(t) \Rightarrow t + 10 = t^2 - 4t + 10 \Rightarrow t = 0 \text{ ou } t = 5$$

$$\text{Para } t = 5, A(5) = B(5) = 15.$$

Resposta: a.

12. Número de cricrilados a 15°C :

$$N = 7 \cdot 15 - 30 = 75$$

Devemos determinar T correspondente a $N = 2 \cdot 75 = 150$:

$$150 = 7T - 30 \Rightarrow T = \frac{180}{7} \approx 25,7^\circ\text{C}$$

Aproximadamente 26°C .

Resposta: d.

$$13. \text{ Para } x = 100 \text{ e } y = 3, \text{ temos: } f(100 \cdot 3) = \frac{f(100)}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(300) = \frac{f(100)}{3} \Rightarrow f(100) = 3 \cdot 5 = 15$$

$$\text{ Para } x = 100 \text{ e } y = 7, \text{ temos: } f(100 \cdot 7) = \frac{f(100)}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(700) = \frac{15}{7}$$

Resposta: a.

$$14. f(-x) = 1 - \frac{4 \cdot (-x)}{(-x + 1)^2} = 1 + \frac{4x}{(1-x)^2}$$

$$f(x) \cdot f(-x) = \left[1 - \frac{4x}{(1+x)^2}\right] \cdot \left[1 + \frac{4x}{(1-x)^2}\right]$$

$$f(x) \cdot f(-x) = 1 + \frac{4x}{(1-x)^2} - \frac{4x}{(1+x)^2} - \frac{16x^2}{[(1+x)(1-x)]^2}$$

$$f(x) \cdot f(-x) = \frac{(1-x^2)^2 + 4x \cdot (1+x)^2 - 4x \cdot (1-x)^2 - 16x^2}{\underbrace{[(1+x) \cdot (1-x)]^2}_{=1-x^2}}$$

$$f(x) \cdot f(-x) = \frac{1-2x^2+x^4 + \cancel{4x} + 8x^2 + \cancel{4x} - \cancel{4x} + 8x^2 - \cancel{4x} - 16x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$f(x) \cdot f(-x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(1-x^2)^2} = \frac{(x^2-1)^2}{(1-x^2)^2} = \left[\frac{x^2-1}{1-x^2}\right]^2 = (-1)^2 = 1$$

Resposta: b.

$$16. V = 90 \text{ km/h e } \mu = 0,8 \Rightarrow D = \frac{90^2}{250 \cdot 0,8} = 40,5 \text{ m}$$

Considerando o tempo de reação (1 s), devemos acrescentar a distância percorrida pelo automóvel, que estava a 90 km/h.

$$\text{em } \begin{cases} 3600 \text{ s} - 90 \text{ km} \\ 1 \text{ s} - x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{40} \text{ km} = 25 \text{ m}$$

Assim, $40,5 + 25 = 65,5 \text{ m}$.

Resposta: c.

18. I. V. Como a vazão é nula, o volume de água não se altera.

II. V. Como a vazão é positiva, o volume de água está aumentando.

III. V. Como a vazão é negativa, o volume de água está diminuindo.

IV. V. De C a D a vazão é máxima. Logo, o volume de água no reservatório aumenta mais rapidamente.

V. V. De F a G a vazão é mínima. Logo, o volume de água decresce mais rapidamente.

Resposta: e.

$$20. \begin{cases} 29 = a \cdot (1950 - 1950) + b \Rightarrow b = 29 \\ 50 = a \cdot (2010 - 1950) + 29 \Rightarrow a = \frac{21}{60} \end{cases}$$

$$\text{Em } 2050 \Rightarrow \frac{21}{60} \cdot (2050 - 1950) + 29 = 64$$

Resposta: c.

21. Em 1760, o rendimento fiscal registrado foi de:
 $100\,000 + \frac{1}{4} \cdot 50\,000 = 112\,500$ contos de réis

Como para cada arroba cobrava-se uma taxa de 1,125 contos de réis, o número total de arrobas foi

$$\frac{112\,500}{1,125} = 100\,000$$

Resposta: d.

22. Devemos ter:

$$(I) 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$$

e

$$(II) x^2 - 8x + 12 \neq 0$$

Observe que $x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm 4}{2} \Rightarrow x = 6 \text{ ou } x = 2$$

$$(I) \cap (II) \Rightarrow x < 2$$

Resposta: e.

23. O número de alevinos com comprimento maior ou igual a 3 cm é $n = \frac{5\,000}{3^2 + 1} = 500$.

O número de alevinos com comprimento maior ou igual a 7 cm é $n = \frac{5\,000}{7^2 + 1} = 100$.

Assim, a diferença $500 - 100 = 400$ fornece o número de alevinos com comprimento entre 3 cm e 7 cm.

Resposta: c.

$$24. \text{Devemos ter: } \begin{cases} x - 2 \geq 0 \text{ (I)} \\ 3 - x > 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

$$(I) \Rightarrow x \geq 2 \xRightarrow{I \cap II} 2 \leq x < 3$$

$$(II) \Rightarrow x < 3$$

Resposta: c.

30. Observe que, nos dois primeiros biênios, a produtividade diminuiu, pois $\frac{10\,253\,497}{129\,921} > \frac{11\,674\,140}{203\,865}$ (assim, já estão excluídas as alternativas a, b e d).

Nos dois últimos biênios, a produtividade aumentou, pois

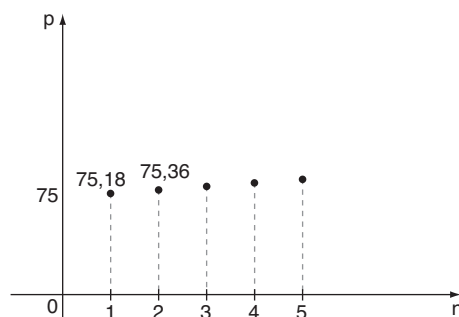
$$\frac{20\,800\,000}{281\,800} < \frac{33\,100\,000}{339\,200}$$

Resposta: c.

Capítulo 4 Função afim

Exercícios

- $780 + 3 \cdot 70 = 990$ (reais)
 - $1\,270 - 780 = 490$; $490 \div 70 = 7$ (noites)
 - $y = 780 + 70x$
- Ele deve ganhar 180 g, ou 0,18 kg, por dia; seu peso após uma semana é $75 + 0,18 \cdot 7 = 76,26$ (quilogramas).
 - $p = 75 + 0,18n$



- O número n de dias necessários para ele atingir ao menos 80 kg é a solução da inequação

$$75 + 0,18n > 80, \text{ que é } n > \frac{5}{0,18} = 27,77\dots$$

Então, com 28 dias de treinamento, seu peso será maior que 80 kg.

Outro modo é calcular o peso ao fim de um mês:

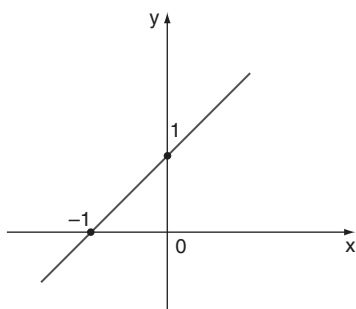
$$75 + 0,18 \cdot 30 = 80,4, \text{ que é maior que } 80 \text{ kg.}$$

A resposta é sim.

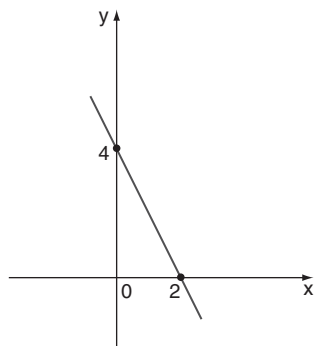
3. a) $g(80) = 20$, pagando só a assinatura, pois não alcançou os 100 minutos de franquia; R\$ 20,00.
 $g(120) = 20 + 20 \cdot 0,10 = 22$; R\$ 22,00
 $g(200) = 20 + 100 \cdot 0,10 = 30$; R\$ 30,00
 b) $v = 20 + 0,1x$. Observe, nesse caso, que se $x = 0$ (não se excedeu o limite de 100 minutos) $v = 20$, que é o valor de assinatura econômica.

4. a) $15 \cdot 30 = 450 \ell$
 b) $y = 15x$
 c) $y = 21\,000 - 15x$
 d) ■ 21 m^3 equivalem a $21\,000 \ell$
 ■ $21\,000 \div 15 = 1\,400$ (minutos)
 ■ $1\,400 \div 60 = 23,3 = 23 \frac{1}{3}$
 Portanto, são 23 horas e 20 minutos.

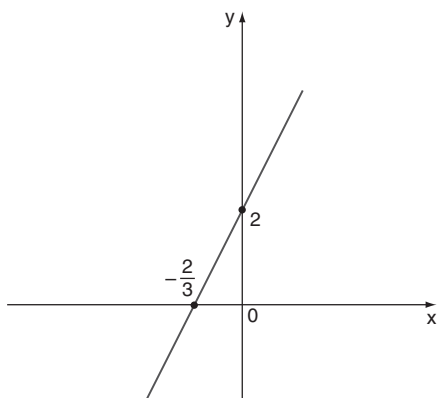
5. a) Usando os pontos $(-1, 0)$ e $(0, 1)$:



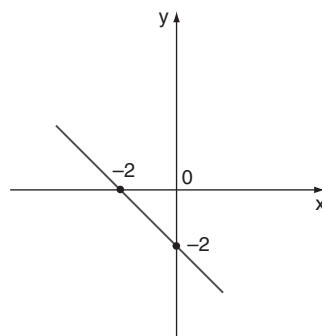
- b) Usando os pontos $(0, 4)$ and $(2, 0)$:



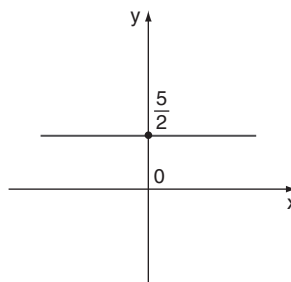
- c) Usando os pontos $(0, 2)$ and $(-\frac{2}{3}, 0)$:



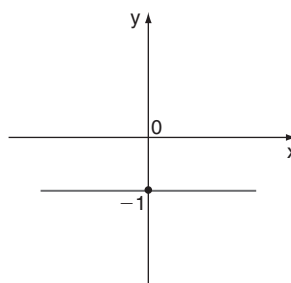
- d) Usando os pontos $(0, -2)$ and $(-2, 0)$:



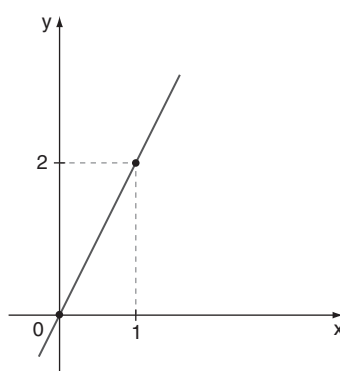
- e)



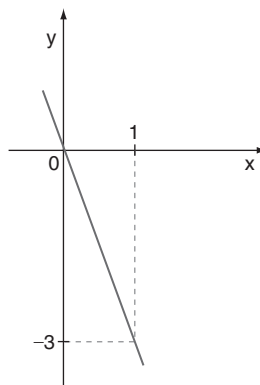
- f)

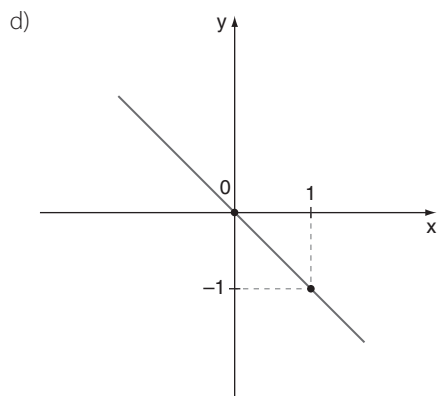
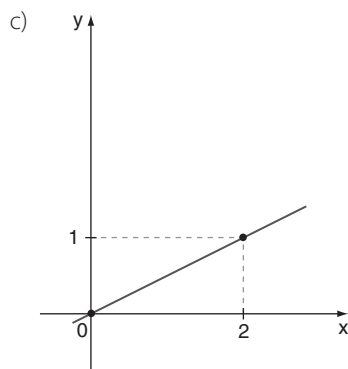


6. a)



- b)





A propriedade observada é que todas as retas passam pela origem $(0, 0)$.

7. Se $y = ax + b$, substituindo os pontos $(-1, 5)$ e $(2, -4)$, tem-se o sistema:

$$\begin{cases} 5 = -a + b \\ -4 = 2a + b \end{cases}, \text{ de solução } a = -3 \text{ e } b = 2.$$

Então, $y = -3x + 2$.

8. Substituindo os pontos em $y = ax + b$, tem-se o sistema:

$$\begin{cases} 2 = -4a + b \\ 5 = 2a + b \end{cases}, \text{ de solução } a = \frac{1}{2} \text{ e } b = 4.$$

A equação é $y = \frac{1}{2}x + 4$.

9. a) Substituindo os pontos $(0, 0)$ e $(-1, 3)$ na expressão $y = ax + b$, tem-se que $b = 0$ e $a = -3$. A equação é $y = -3x$.

- b) Substituindo os pontos $(-1, 1)$ e $(0, 4)$ na expressão $y = ax + b$, tem-se o sistema:

$$\begin{cases} 1 = -a + b \\ 4 = 0 + b \end{cases} \Rightarrow b = 4 \text{ e } a = 3.$$

A equação é $y = 3x + 4$.

- c) Como a reta é paralela ao eixo $0x$, trata-se de uma função constante, cuja lei é $y = \frac{11}{3}$ (ou $y - \frac{11}{3} = 0$).

10. a) Usando os pontos $(0, 0)$ e $(1, 2)$, determina-se que $y = 2x$ para $0 \leq x \leq 1$.

Assim, para $x = \frac{1}{2}$, tem-se $y = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

- b) Para $1 \leq x \leq 4$, observa-se que a função é constante, isto é, para todo x nesse intervalo tem-se $y = 2$. Logo, $f(3) = 2$.

- c) A reta que passa por $(4, 2)$ e $(6, 4)$ tem equação $y = x - 2$.

Assim, para $x = \frac{11}{2} = 5,5$, temos $y = 5,5 - 2 = 3,5$.

11. Como os pontos $(4, 11)$ e $(0, 15)$ pertencem ao gráfico de

$$g, \text{ o sistema } \begin{cases} 11 = 4a + b \\ 15 = 0 + b \end{cases}, \text{ de solução } a = -1 \text{ e } b = 15,$$

nos fornece $g(x) = -x + 15$ e $g(8) = 7$.

12. a) Suponha que $y = ax + b$ forneça o salário em função da venda. Os pontos $(5\,000, 550)$ e $(8\,000, 700)$ levam ao sistema:

$$\begin{cases} 550 = 5\,000a + b \\ 700 = 8\,000a + b \end{cases}, \text{ de solução } a = 0,05 \text{ e } b = 300 \Rightarrow y = 0,05x + 300.$$

- b) R\$ 300,00

- c) Não. Se as vendas fossem iguais a $2x$, o salário seria $y = 0,05 \cdot 2x + 300 = 0,1x + 300$, que não é o dobro do salário para vendas iguais a x ($0,05x + 300$).

Observe que a parte fixa é paga "uma única vez" e, portanto, não é dobrada.

13. a) Supondo que 700 pessoas almoçaram no fim de semana, temos a seguinte arrecadação:

$$\begin{array}{rcl} 700 \cdot 38 & = & 26\,600 \\ + & & \\ 500 \cdot 25 & = & 12\,500 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} 700 \cdot 38 & = & 26\,600 \\ + & & \\ 500 \cdot 25 & = & 12\,500 \end{array}} \right\} \text{total: } 39\,100 \text{ reais}$$

- b) x : nº de pessoas que almoçaram no fim de semana
 $1\,200 - x$: nº de pessoas que almoçaram no "meio" da semana

$$v(x) = 38x + 25 \cdot (1\,200 - x)$$

$$v(x) = 38x + 30\,000 - 25x$$

$$v(x) = 13x + 30\,000$$

14. a) $\frac{16}{5} = 3,2$

d) 20

g) $\frac{10 \text{ min}}{120 \text{ min}} = \frac{1}{12}$

b) $\frac{1}{3}$

e) 2

h) $\frac{8\,000 \text{ g}}{500 \text{ g}} = 16$

c) 4

f) 5

15. a) Tanto nas linhas quanto nas colunas, a soma das duas primeiras parcelas deve ser igual à 3^a . Assim:

$$\begin{cases} 20 + a = b \\ c + 40 = 48 \\ 28 + d = 80 \\ b + 48 = 80 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} 20 + c = 28 \\ a + 40 = d \\ b + 48 = 80 \\ 28 + d = 80 \end{cases}$$

Logo, $a = 12$; $b = 32$; $c = 8$; $d = 52$

- b) A razão entre homens e mulheres contrários é:

$$\frac{20}{8} = \frac{5}{2} \text{ ou } 2,5.$$

- c) A razão entre favoráveis e contrários é: $\frac{52}{28} = \frac{13}{7}$

- d) A razão entre o número de mulheres contrárias ao projeto e o total de mulheres é: $\frac{8}{48} = \frac{1}{6}$

- e) A nova razão pode ser calculada como $\frac{8+m}{48}$, em que m é o número de mulheres que mudaram de ideia.

Assim, temos: $\frac{8+m}{48} = \frac{1}{4} \Rightarrow 8 + m = 12 \Rightarrow m = 4$
4 mulheres deveriam mudar de opinião.

16. a) $2x = 9$

$$x = \frac{9}{2}$$

- b) $12x = 5x + 5$

$$x = \frac{5}{7}$$

- c) $8 - 4x = 3x + 15$

$$x = -1$$

- d) $2x - 2 = 3x - 6$

$$x = 4$$

17. a) $\frac{3}{10} = \frac{x}{20000} \Rightarrow x = 6000$

Há, no município, 6000 adultos favoráveis ao projeto.

- b) $\begin{cases} \frac{h}{5} + \frac{2m}{5} = 6000 \\ h + m = 20000 \end{cases}$

$\frac{h}{5} = 2000 \Rightarrow$ o número de homens contrários ao projeto é 8000.

18. a) $\frac{x}{y} = \frac{1,2}{2,4} = \frac{1}{2}$

Assim:

$$\frac{2,1}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4,2$$

$$\frac{0,85}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 1,70$$

$$\frac{c}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 2$$

$$b) \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$

Daí:

$$\frac{15}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 10$$

$$\frac{60}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3b = 120 \Rightarrow b = 40$$

$$19. \frac{15000}{12000} = \frac{x}{1800 - x}$$

$$4x = 9000 - 5x \Rightarrow x = 1000$$

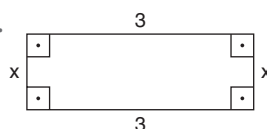
P deve receber R\$ 1000,00 e Q, R\$ 800,00.

20. ■ Sim; observe que, se o lado mede x , o perímetro mede $4x$; se o lado mede $2x$, o perímetro mede $4 \cdot 2x = 8x$ (que é o dobro de $4x$). Em geral, como $p = 4 \cdot \ell \Rightarrow \Rightarrow \frac{p}{\ell} = 4$.

- Não; tome, por exemplo, $\ell_1 = 1 \Rightarrow A_1 = 1^2 = 1$.

Dobrando-se a medida do lado, isto é, $\ell_2 = 2$, tem-se $A_2 = 2^2 = 4$ (a área quadruplica).

- 21.



- a) O perímetro do retângulo é:

$$3 + 3 + x + x = 6 + 2x$$

$$x = 1 \text{ m} \Rightarrow \text{perímetro} = 8 \text{ m}$$

$$x = 2 \text{ m} \Rightarrow \text{perímetro} = 10 \text{ m} \rightarrow \text{não dobrou!}$$

Assim, o perímetro não é diretamente proporcional a x .

- b) Sim; $A = 3 \cdot x \Leftrightarrow \frac{A}{x} = 3$; isso mostra que a área é diretamente proporcional a x .

$$22. x: \frac{1,5 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^4} = 50 \text{ habitantes/km}^2$$

$$y: \frac{1,2 \cdot 10^5}{1,5 \cdot 10^3} = 80 \text{ habitantes/km}^2$$

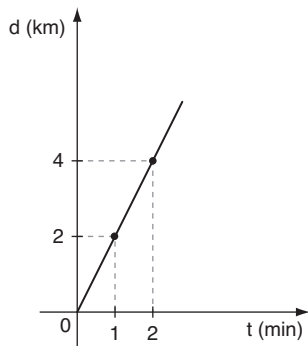
$$z: \frac{8 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^4} = 40 \text{ habitantes/km}^2$$

\therefore A região menos densamente povoada é a região z .

23. a)

tempo decorrido (min)	distância percorrida (km)
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
10	20
20	40

- b) Sim; observe que, para todo par de valores, $\frac{d}{t} = 2$ (com d em km e t em min).



24. a) Sim, observe que $\frac{7,5}{3} = \frac{10}{4} = \frac{15}{6} = \dots = 2,5$

b) $d = 2,5 \text{ g/cm}^3$

c) $m = 2,5 \text{ V}$

25. a) $B_1: \Delta L = 100,012 - 100 = 0,012 \text{ cm}$

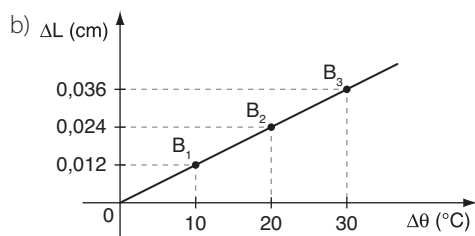
$B_2: \Delta L = 100,024 - 100 = 0,024 \text{ cm}$

$B_3: \Delta L = 100,036 - 100 = 0,036 \text{ cm}$

Observe que:

$$\frac{0,012}{10} = \frac{0,024}{20} = \frac{0,036}{30} = 0,0012$$

Assim, ΔL e $\Delta \theta$ são diretamente proporcionais.



- c) Usando, por exemplo, o ponto B_1 , temos:

$$\begin{cases} \Delta L = 0,012 \text{ cm} \\ \Delta \theta = 10^\circ \text{C} \\ L_0 = 100 \text{ cm} \end{cases}$$

$$0,012 = \alpha \cdot 100 \cdot 10$$

$$\alpha = \frac{0,012}{1000} = 0,000012 \text{ (}^\circ\text{C)}^{-1}$$

26. a) $3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

b) $-2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $-\frac{3x-5}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

d) $4x = 0 \Rightarrow x = 0$

e) $\frac{2x}{5} = \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$

f) $-x = 0 \Rightarrow x = 0$

27. Se -2 é raiz, $a \cdot (-2) - 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

A lei da função é $y = -\frac{3}{2}x - 3$ e $f(3) = -\frac{9}{2} - 3 = -\frac{15}{2}$.

28. a) $12x + 5 = 2x + 8 \Rightarrow 10x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{10}; S = \left\{ \frac{3}{10} \right\}$

b) $5(3-x) + 2(x+1) = -x + 5$

$$15 - 5x + 2x + 2 = -x + 5$$

$$-2x = -12 \Rightarrow x = 6; S = \{6\}$$

c) $5x + 20(1-x) = 5 \Rightarrow 5x + 20 - 20x = 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = 1; S = \{1\}$$

d) $-x + 4(2-x) = -2x - (10 + 3x)$

$$-x - 8 - 4x = -2x - 10 - 3x$$

$$-5x + 8 = -5x - 10 \Rightarrow 8 = -10$$

Não tem solução.

e) $\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5x}{2} + \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4x}{6} - \frac{3}{6} = \frac{15x}{6} + \frac{8}{6} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = -1; S = \{-1\}$$

f) $\frac{6x}{5} - \frac{x+3}{2} = \frac{x}{3} - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{36}{30}x - \frac{15}{30}x - \frac{45}{30} = \frac{10x}{30} - \frac{30}{30} \Rightarrow x = \frac{15}{11};$$

$$S = \left\{ \frac{15}{11} \right\}$$

29. Sejam x_A , x_B e x_C as quantias em reais recebidas respectivamente por A, B e C.

Como $x_B = 2 \cdot x_C$, $x_A = 2 \cdot x_B + x_C$ e $x_A + x_B + x_C = 120$, então $x_A = 75$, $x_B = 30$ e $x_C = 15$.

30. a) Seja n o número de anos procurado

$$\begin{cases} \text{Dona Clara: } 52 - n \\ \text{rapaz: } 23 - n \\ \text{moça: } 26 - n \end{cases}$$

$$(52 - n) + (23 - n) + (26 - n) = 65 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 101 - 3n = 65 \Rightarrow n = 12$$

Há 12 anos.

b) $(52 + n) + (23 + n) + (26 + n) = 128$

$$3n + 101 = 128 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3n = 27 \Rightarrow n = 9$$

Daqui a 9 anos.

31. Seja n o número de equipamentos que Carlos revisou;

$$\begin{cases} \text{Bruno: } n - 2 \\ \text{André: } n - 2 - 3 = n - 5 \end{cases}$$

$$n + (n - 2) + (n - 5) = 53$$

$$3n = 60 \Rightarrow n = 20$$

Carlos: 20; Bruno: 18; André: 15

32. Seja x o valor recebido por hora de trabalho:

Paulo deverá receber $4x$

Joana deverá receber $3x + \frac{1}{3}x = \frac{10x}{3}$

(observe que $3\text{h}20\text{min} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10\text{h}}{3}$)

$$\text{Daí, } 4x = \frac{10x}{3} + 15 \Rightarrow \frac{2x}{3} = 15 \Rightarrow x = 22,50$$

Paulo: $4 \cdot 22,50 = 90$ reais e Joana: $\frac{10}{3} \cdot 22,5 = 75$ reais.

33. a) 4
b) -3
c) 1
d) -1
34. a) Em 3 anos, a escola perdeu $1680 - 1560 = 120$ alunos. Assim, de 2008 a 2011, a perda também foi de 120 alunos, o que levou a um total de $1560 - 120 = 1440$ alunos em 2011.
b) Como o decréscimo é linear, por ano a escola perde $\frac{120}{3} = 40$ alunos; em 10 anos são 400 (alunos).
c) $y = 1680 - 40x$
d) Em 2015, o número de alunos na escola era de $1680 - 400 = 1280$. Em 5 anos, o aumento será de $5 \cdot 30 = 150$ alunos. Assim, em 2020, haverá $1280 + 150 = 1430$ (alunos).
35. a) $\frac{11-9}{14-9} = \frac{360}{x} \Rightarrow x = 900$ (turistas)
b) $\frac{11-9}{16-9} = \frac{360}{x} \Rightarrow x = 1260$ (turistas)
36. Em 4 anos, o quadro valorizou R\$ 4 500,00 - R\$ 3 300,00 = R\$ 1 200,00. Em 5 anos, valorizou x reais.
 $\frac{4}{5} = \frac{1200}{x} \Rightarrow x = 1500$
Daqui a 5 anos o quadro custará:
 $R\$ 4500,00 + R\$ 1500,00 = R\$ 6000,00$.
37. a) Para produzir 0 litro são gastos R\$ 4000,00; assim, o valor 4000 corresponde ao custo fixo de produção da empresa.
b) $5,2 - 4,0 = 1,2$; assim, com R\$ 1 200,00 são fabricados 8 litros; o custo por litro é $\frac{1200}{8} = 150$ reais.
c) $7000 - 4000 = 3000$
 $3000 \div 150 = 20$ litros
38. a) $\frac{33 - 29,5}{14 - 11,5} = \frac{3,5}{2,5} = 1,4$
A temperatura aumenta $1,4^\circ\text{C}$ por hora.
 $9:30 \rightarrow 29,5 - 2 \cdot 1,4 = 26,7^\circ\text{C}$
 $15:00 \rightarrow 33 + 1,4 = 34,4^\circ\text{C}$
b) $y = ax + b$
 $a = 1,4$ (taxa de variação)
Como às 11:30 a temperatura era de $29,5^\circ\text{C}$, temos:
 $29,5 = 1,4 \cdot 3,5 + b \Rightarrow b = 24,6$
 $y = 24,6 + 1,4x$
39. a) crescente
b) decrescente
c) decrescente
d) crescente
e) crescente
f) decrescente

40. a) $m > 0$
b) $m + 3 < 0 \Rightarrow m < -3$
c) $-m + 2 > 0 \Rightarrow m < 2$
41. a) $m > -1 \Rightarrow f$ é crescente
 $m < -1 \Rightarrow f$ é decrescente
 $m = -1 \Rightarrow f$ é constante
b) $m > 0 \Rightarrow f$ é crescente
 $m < 0 \Rightarrow f$ é decrescente
 $m = 0 \Rightarrow f$ é constante
c) $m < \frac{3}{2} \Rightarrow f$ é crescente
 $m > \frac{3}{2} \Rightarrow f$ é decrescente
 $m = \frac{3}{2} \Rightarrow f$ é constante

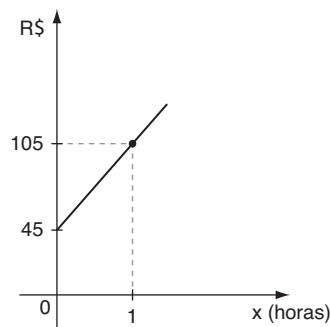
42.

	Coeficiente angular	Coeficiente linear
a)	-2	5
b)	3	-1
c)	4	0
d)	1	3
e)	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$

43.

	Coeficiente angular	Coeficiente linear
a)	$-\frac{3}{2}$	3
b)	1	-1

44. $195 = p + 60 \cdot 2,5$
 $195 = p + 150 \Rightarrow p = 45$
a) coeficiente angular = 60; coeficiente linear = 45



- b) $300 = 45 + 60x \Rightarrow x = 4,25$
4 horas "cheias" e mais $\frac{1}{4}$ de hora, isto é, 4 horas e 15 minutos.

45. a) Considerando, por exemplo, os pontos (0, 0) e

$$(2, 2600), \text{ temos: } \frac{2600-0}{2-0} = 1300 \frac{\ell}{h}$$

b) $a = 1300$

$b = 0$ (a reta passa pela origem)

c) $y = 1300x$

d) $26\,000 = 1300x \Rightarrow x = 20$ horas

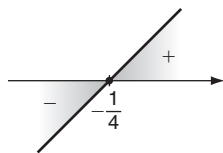
46. a) $y > 0$ quando $x > -1$

$y < 0$ quando $x < -1$

b) $y > 0$ quando $x < 2$

$y < 0$ quando $x > 2$

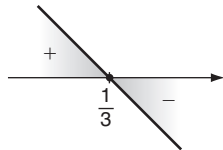
47. a)



$y > 0$ quando $x > -\frac{1}{4}$

$y < 0$ quando $x < -\frac{1}{4}$

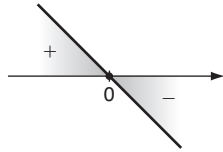
b)



$y > 0$ quando $x < \frac{1}{3}$

$y < 0$ quando $x > \frac{1}{3}$

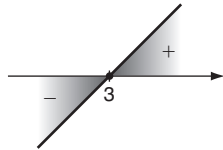
c)



$y > 0$ quando $x < 0$

$y < 0$ quando $x > 0$

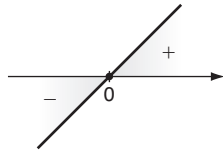
d)



$y > 0$ quando $x > 3$

$y < 0$ quando $x < 3$

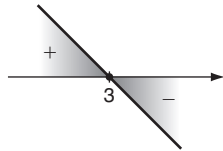
e)



$y > 0$ quando $x > 0$

$y < 0$ quando $x < 0$

f)



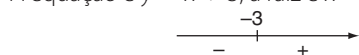
$y > 0$ quando $x < 3$

$y < 0$ quando $x > 3$

48. Usando os pontos (0, 3) e (1, 4), tem-se o sistema:

$$\begin{cases} 4 = a + b \\ 3 = b \end{cases}, \text{ de solução } a = 1 \text{ e } b = 3.$$

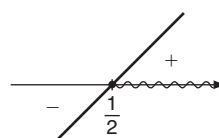
A equação é $y = x + 3$; a raiz é $x = -3$.



$$\begin{cases} x > -3 \Rightarrow y > 0 \\ x < -3 \Rightarrow y < 0 \end{cases}$$

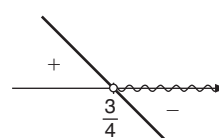
$$\begin{cases} x < -3 \Rightarrow y < 0 \end{cases}$$

49. a)



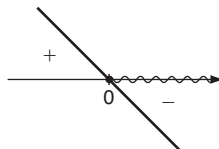
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{2} \right\}$$

b)



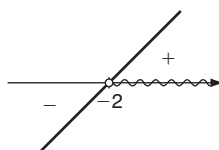
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{4} \right\}$$

c)



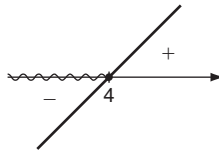
$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$$

d)



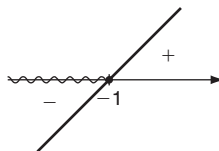
$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > -2 \}$$

e)



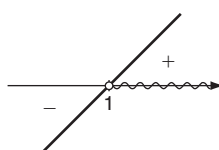
$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4 \}$$

f)



$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \}$$

g)



$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \}$$

50. a) $\frac{x-1}{3} - \frac{x-2}{2} \leq 2$

$$\frac{2(x-1)}{6} - \frac{3(x-2)}{6} \leq \frac{12}{6} \Rightarrow x \geq -8$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -8 \}$$

$$b) \frac{2(3-x)}{5} + \frac{x}{2} \geq \frac{1}{4} + \frac{2(x-1)}{3}$$

$$\frac{24(3-x)}{60} + \frac{30x}{60} \geq \frac{15}{60} + \frac{40(x-1)}{60} \Rightarrow x \leq \frac{97}{34}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{97}{34} \right\}$$

$$c) \frac{3x-1}{4} - \frac{x-3}{2} \geq \frac{x+7}{4}$$

$$\frac{3x-1}{4} - \frac{2(x-3)}{4} \geq \frac{x+7}{4}$$

$$x+5 \geq x+7 \Rightarrow 0 \cdot x \geq 2 \text{ não tem solução;}$$

$$S = \emptyset.$$

$$d) (x-3)^2 - (4-x)^2 \leq \frac{x}{2}$$

$$x^2 - 6x + 9 - (16 - 8x + x^2) \leq \frac{x}{2} \Rightarrow x \leq \frac{14}{3}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{14}{3} \right\}$$

$$e) \frac{4x-3}{5} - \frac{2+x}{3} < \frac{3x}{5} + 1 - \frac{2x}{15}$$

$$\frac{3(4x-3)}{15} - \frac{5(2+x)}{15} < \frac{9x}{15} + \frac{15}{15} - \frac{2x}{15}$$

$$7x - 19 < 7x + 15 \Rightarrow 0 \cdot x < 34, \text{ que é verdadeiro para todo } x \text{ real} \Rightarrow S = \mathbb{R}.$$

51. Sejam a_x e a_y os totais cobrados em reais por X e Y, respectivamente, por t horas de atendimento domiciliar. Então,
 $a_x = 60 + 45t$; $a_y = 40 + 50t$ e $a_x < a_y \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 60 + 45t < 40 + 50t \Rightarrow 20 < 5t \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t > 4$; serviços acima de 4 horas.

52. É dado que $2x - \frac{x}{2} < 6 \Rightarrow x < 4$.
 Os números inteiros positivos que são soluções desse problema são 1, 2 e 3.

53. a) Pelo gráfico verifica-se que, para $t = 0$, B cobra R\$ 1,00, o que caracteriza cobrança de entrada.
 b) Pelos pontos (0, 0) e (2; 5,60) verifica-se que o preço cobrado por A é $y_A = 2,8t$. Pelos pontos (0, 1) e (2,6) verifica-se que o preço cobrado por B é $y_B = 1 + 2,5t$.
 Tem-se $y_B < y_A$ se $t > \frac{10}{3}$, em horas, ou $t > 200$, em minutos.

54. Temos:
 $y = 50\,000 - 90t$, sendo y o número de quilogramas de soja produzidos no mês t , contado a partir de janeiro de 2010 ($t = 0$).
 Devemos ter $y < 40\,000$, isto é, $50\,000 - 90t < 40\,000 \Rightarrow 10\,000 < 90t \Rightarrow t > 111,1$.
 Como $t \in \mathbb{N}$, o menor valor de t que satisfaz é $t = 112$.
 Como $112 = 9 \cdot 12 + 4$, concluímos que $t = 112$ meses corresponde a maio de 2019.

$$55. a) -1 < 2x \leq 4 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x \leq 2;$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x \leq 2 \right\}$$

$$b) 3 < x - 1 < 5 \Rightarrow 4 < x < 6; S = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 6\}$$

$$c) 4 > -x > -1 \Rightarrow -4 < x < 1; S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 1\}$$

$$d) \underline{3 \leq x+1 \leq -x+6}$$

$$2 \leq x \quad 2x \leq 5 \Rightarrow x \leq \frac{5}{2}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq \frac{5}{2} \right\}$$

$$e) \underline{2x \leq -x+9 \leq 5x+21}$$

$$3x \leq 9 \quad -12 \leq 6x$$

$$x \leq 3 \quad x \geq -2$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$$

56. Seja x o número de quilômetros rodados. Sejam $P_A = 80$, $P_B = 30 + 0,6x$ e $P_C = 40 + 0,5x$ os preços pagos, em reais, nos três planos.

a) Para $x = 60$, tem-se $P_A = 80$, $P_B = 66$ e $P_C = 70$.

Para $x = 80$, tem-se $P_A = 80$, $P_B = 78$ e $P_C = 80$.

Nos dois casos, o plano B é o melhor.

$$b) \text{ O sistema } \begin{cases} P_A < P_B \\ P_A < P_C \end{cases} \text{ nos leva a } \begin{cases} 80 < 30 + 0,6x \\ 80 < 40 + 0,5x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x > \frac{500}{6} \text{ e } x > \frac{400}{5} \Rightarrow x > 83,3, \text{ ou seja, } x = 84 \text{ (km)}$$

$$57. a) \begin{cases} -3x < 1 - 2x \\ 4 - 3 \cdot (2 - x) \geq x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x < 1 \\ 4 - 6 + 3x \geq x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$$

$$b) \begin{cases} x+1 < 5x \\ 8x < -x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < 4x \\ 9x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{4} \\ x < \frac{2}{9} \end{cases}$$

não tem solução; $S = \emptyset$

$$58. a) \underline{3-x < x+2 < -x+5}$$

$$1 < 2x \quad 2x < 3$$

$$x > \frac{1}{2} \quad x < \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

Como $U = \mathbb{Z}$, então $S = \{1\}$.

$$b) \underline{-2x \leq 1-x \leq -3x+2}$$

$$-1 \leq x \quad 2x \leq 1$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$

$$-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

Como $U = \mathbb{Z}$, então $S = \{-1, 0\}$.

$$c) \frac{x}{3} + 2 < \frac{3x}{4} - 1 < \frac{x}{2} + 3$$

$$\frac{x}{3} + 3 < \frac{3x}{4} \quad \frac{3x}{4} < \frac{x}{2} + 4$$

$$\frac{4x}{12} + \frac{36}{12} < \frac{9x}{12} \quad \frac{3x}{4} < \frac{2x}{4} + \frac{16}{4}$$

$$x > \frac{36}{5} \quad x < 16 \Rightarrow \frac{36}{5} < x < 16$$

Como $U = \mathbb{Z}$, então $S = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

59. a)

	1	2
y_1	-	+
y_2	-	-
$y_1 \cdot y_2$	+	-

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$$

b)

	$\frac{1}{2}$	2
y_1	+	-
y_2	-	-
$y_1 \cdot y_2$	-	+

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 2\right\}$$

c)

	$-\frac{2}{5}$	1
y_1	-	+
y_2	+	+
$y_1 \cdot y_2$	-	+

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{2}{5} \text{ ou } x \geq 1\right\}$$

d)

	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
y_1	+	+	+
y_2	-	-	+
y_3	-	+	+
$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3$	+	-	+

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{3}{5} \text{ ou } -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{2}\right\}$$

60.

	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{2}$
y_1	-	+
y_2	+	+
$y_1 \cdot y_2$	-	+

Dois números inteiros satisfazem a sentença: 2 e 3.

61.

	0	$\frac{1}{2}$	3
y_1	+	-	-
y_2	-	-	+
y_3	-	-	+
$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3$	+	-	+

Para x reais tais que $x \leq 0$ ou $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$.

62. a)

	2
y_1	+
y_2	-
$y_1 \cdot y_2$	-

$S = \{2\}$

b)

	3
y_1	-
y_2	+
$y_1 \cdot y_2$	-

$S = \mathbb{R} - \{3\}$

c)

	$\frac{1}{2}$
y_1	-
y_2	+
$y_1 \cdot y_2$	-

$S = \emptyset$

63. a)

	-1	$\frac{1}{2}$
y_1	-	+
y_2	-	-
$\frac{y_1}{y_2}$	+	-

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < \frac{1}{2}\right\}$$

b)

	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
y_1	-	+
y_2	+	+
$\frac{y_1}{y_2}$	-	+

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3}{4} \text{ ou } x > \frac{3}{2}\right\}$$

c)

	0	3
y_1	-	+
y_2	+	+
$\frac{y_1}{y_2}$	-	+

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 3\}$$

64. a)

	-1	2	3	
y_1	+	+	+	-
y_2	-	+	+	+
y_3	-	-	+	+
$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3$	+	-	+	-

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 2 < x \leq 3\}$$

b)

	-2	$-\frac{1}{3}$	0	
y_1	+	+	+	-
y_2	-	+	+	+
y_3	+	+	-	-
$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3$	-	+	-	+

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -\frac{1}{3} < x < 0\right\}$$

65. a) $\frac{x-3}{2x-1} \geq 4 \Rightarrow \frac{x-3}{2x-1} - 4 \geq 0 \Rightarrow \frac{-7x+1}{2x-1} \geq 0$

	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{2}$	
y_1	+	-	-
y_2	-	-	+
$y_1 \cdot y_2$	-	+	-

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{7} \leq x < \frac{1}{2}\right\}$$

b) $\frac{-4x+1}{x-2} < -2 \Rightarrow \frac{-4x+1}{x-2} + 2 < 0 \Rightarrow \frac{-2x-3}{x-2} < 0$

	$-\frac{3}{2}$	2	
y_1	+	-	-
y_2	-	-	+
$y_1 \cdot y_2$	-	+	-

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{3}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$$

c) $\frac{x}{x-1} \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{x-1} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \leq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x-1 < 0$$

$$\text{~~~~~} \xrightarrow{1} S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$$

66. 1º modo

a) $(-x+2) \cdot (x+1) \geq 0$

	-1	2	
y_1	-	+	+
y_2	+	+	-
$y_1 \cdot y_2$	-	+	-

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$$

b) $\frac{-x+2}{x+1} \leq 0$

	-1	2	
y_1	-	+	+
y_2	+	+	-
$y_1 \cdot y_2$	-	+	-

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geq 2\}$$

2º modo

Observe pelo gráfico:

1) $x < -1 \Rightarrow f(x) > 0$ e $g(x) < 0 \Rightarrow f(x) \cdot g(x) < 0$

2) $-1 < x < 2 \Rightarrow f(x) > 0$ e $g(x) > 0 \Rightarrow f(x) \cdot g(x) > 0$

3) $x > 2 \Rightarrow f(x) < 0$ e $g(x) > 0 \Rightarrow f(x) \cdot g(x) < 0$

a) Assim, $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ quando $-1 \leq x \leq 2$.

b) $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ quando $x < -1$ ou $x \geq 2$ (lembre que a regra de sinal do produto é a mesma do quociente).

67. a) $\frac{2}{x-1} \geq \frac{3}{x+2} \Rightarrow \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+2} \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{-x+7}{(x-1) \cdot (x+2)} \geq 0$$

	-2	1	7	
y_1	-	+	+	+
y_2	-	-	+	+
y_3	+	+	+	-
$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3$	-	-	+	-

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x \leq 7\}$$

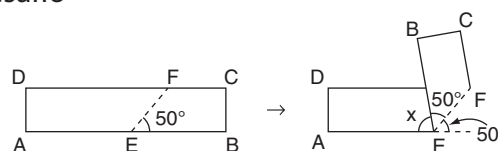
b) $-\frac{4}{x} + \frac{3}{2} \geq -\frac{1}{x} \Rightarrow -\frac{4}{x} + \frac{3}{2} + \frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3 \cdot (x-2)}{2x} \geq 0$$

	0	2	
y_1	-	+	+
y_2	-	-	+
$y_1 \cdot y_2$	+	-	+

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geq 2\}$$

Desafio



Devemos ter:

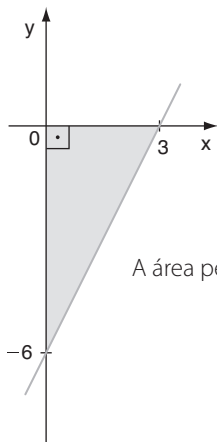
$$x + 50^\circ + 50^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 80^\circ$$

Exercícios complementares

1. a) P pertence ao gráfico de $g \Rightarrow$
 $\Rightarrow 6 = m \cdot 6 + n$
 $3 \text{ é raiz de } g \Rightarrow g(3) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow m \cdot 3 + n = 0$

$\Rightarrow m = 2 \text{ e } n = -6$

b) $g(x) = 2x - 6$



A área pedida é $\frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 \text{ u.a.}$

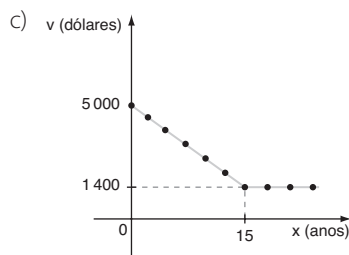
2. ■ distância da prova na escala: $10 \times 400\,000 \text{ cm} =$
 $= 4\,000\,000 \text{ cm} = 40\,000 \text{ m} = 40 \text{ km}$

■ $\begin{cases} 1 \text{ h} - 48 \text{ km} \\ x - 40 \text{ km} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{40}{48} = \frac{5}{6} \text{ h} =$
 $= \frac{5}{6} \cdot 60 = 50 \text{ minutos}$

Assim, o ganhador terminou a corrida às 10h50min.

3. a) 28% de U\$ 5 000,00 corresponde a U\$ 1 400,00.
 O valor v da máquina, em função do número x de anos,
 é dado por $v = 5\,000 - 240x$. De $1\,400 = 5\,000 - 240x$,
 tem-se 15, ou seja, 15 anos.

b) O valor mínimo é de US\$ 1 400,00.



4. a) Das 11h às 20h há um período de 9 horas. O relógio de Pedro adianta:

$\begin{cases} 30 \text{ s} - 1 \text{ h} \\ x - 9 \text{ h} \end{cases} \Rightarrow x = 270 \text{ s} = 4 \text{ min } 30 \text{ s}$

Logo, deve marcar 20h4min30s.

O relógio de João atrasa:

$\begin{cases} 10 \text{ s} - 1 \text{ h} \\ x - 9 \text{ h} \end{cases} \Rightarrow x = 90 \text{ s} = 1 \text{ min } 30 \text{ s}$

Logo, deve marcar 19h58min30s; e a diferença corresponde a 6 minutos.

b) O relógio de João atrasa:

$\begin{cases} 10 \text{ s} - 1 \text{ h} \\ x - 48 \text{ h} \end{cases} \Rightarrow x = 480 \text{ s} = 8 \text{ min}$

Logo, deve marcar 10h52min.

O relógio de Pedro adianta:

$\begin{cases} 30 \text{ s} - 1 \text{ h} \\ x - 48 \text{ h} \end{cases} \Rightarrow x = 1\,440 \text{ s} = 24 \text{ min}$

Logo, deve marcar 11h24min.

5. a) $y = ax + b$

$\begin{cases} 72 = a \cdot 20 + b \\ 60 = a \cdot 14 + b \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 32$

$y = 2x + 32$; a parte fixa cobrada é R\$ 32,00.

b) $E: y = 2x + 32$

$F: y = 4,5x$

$E < F \Rightarrow 2x + 32 < 4,5x \Rightarrow 32 < 2,5x \Rightarrow 12,8 < x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x > 12,8 \text{ m}$

Metragens acima de 12,8 m.

6. a) Em 10 meses, o peso aumenta 5 kg; como temos uma função afim, concluímos que o aumento é de 0,5 kg por mês.

Daí, $p(t) = 5 + 0,5t$, para $0 \leq t \leq 10$

$p(6) = 5 + 0,5 \cdot 6 = 8 \text{ kg}$

b) $10 < \frac{120t - 1000}{t + 10} \leq 70$; como $t + 10 > 0$, pois $t \geq 10$, podemos multiplicar os membros da desigualdade acima por $t + 10$, mantendo o sinal:

$$\underbrace{10 \cdot (t + 10)}_{(I)} < \overbrace{120t - 1000}^{(II)} \leq \overbrace{70(t + 10)}^{(III)}$$

De (I) vem: $10t + 100 < 120t - 1000$

$1\,100 < 110t$

$10 < t$

De (II) vem: $120t - 1000 \leq 70t + 700$

$50t \leq 1\,700$

$t \leq 34$

$\rightarrow 10 < t \leq 34$

7. 1º sócio: $\begin{cases} \text{capital: } x \\ \text{lucro: } a \end{cases}$

2º sócio: $\begin{cases} \text{capital: } 30\,000 - x \\ \text{lucro: } 5\,000 - a \end{cases}$

$\frac{a}{x} = \frac{5\,000 - a}{30\,000 - x} = \frac{5\,000}{30\,000} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = 6a$

Da hipótese:

$x + a = 14\,000 \Rightarrow 6a + a = 14\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 2\,000; x = 12\,000$

Assim, ao 2º sócio coube um lucro de $5\,000 - 2\,000 =$
 $= 3\,000$ referente a um capital de $30\,000 - 12\,000 =$
 $= 18\,000.$

Observe que: $\frac{2\,000}{12\,000} = \frac{3\,000}{18\,000} = \frac{1}{6}.$

8. A reta em "azul" representa a função $y = 3$; a reta em verde representa a função $y = \frac{1}{2}x + 2$, que é uma função crescente, pois $a = \frac{1}{2}x > 0$.

■ Para obtermos A, fazemos $y = 0$ (reta \overleftrightarrow{AB}).

$$0 = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow x = -4$$

$$A(-4, 0)$$

■ B pertence à reta \overleftrightarrow{AB} e tem ordenada igual a 3.

$$\text{Daí: } 3 = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow x = 2$$

$$B(2, 3)$$

■ A reta \overleftrightarrow{BC} passa por $(0, 5)$ e $B(2, 3)$. Para obter sua equação $y = ax + b$, fazemos:

$$\begin{cases} 5 = a \cdot 0 + b \\ 3 = a \cdot 2 + b \end{cases} \Rightarrow b = 5 \text{ e } a = -1$$

A lei é $y = -x + 5$.

Para obtermos C, basta fazer $y = 0$ (reta \overleftrightarrow{BC}) \Rightarrow

$$\Rightarrow 0 = -x + 5 \Rightarrow x = 5.$$

$$C(5, 0)$$

$$\text{A área pedida é } \frac{b \cdot h}{2} = \frac{9 \cdot 3}{2} = \frac{27}{2} \text{ u.a.}$$

9. a) O salário mínimo aumentou R\$ 210,00 em 5 anos; como o acréscimo é linear, conclui-se que o acréscimo, por ano, é $210 \div 5 = 42$ reais; a função que representa o salário y pode ser expressa por $y = 300 + 42x$, sendo x o número de anos transcorridos após 2005.

O valor da cesta aumentou R\$ 30,00 em 5 anos; temos um acréscimo de R\$ 6,00 por ano. A função pedida é: $y = 154 + 6x$ (y é o valor da cesta e x é dado como no item anterior).

- b) Devemos determinar x tal que $S \geq 3 \cdot C$ (S : salário e C : cesta).

$$300 + 42x \geq 3 \cdot (154 + 6x) \Rightarrow 24x \geq 162 \Rightarrow x \geq 6,75$$

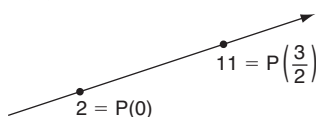
Como x deve ser inteiro, temos $x = 7$ (em 2012).

10. a) $P(0) = 2 \cdot (1 - 0) + 8 \cdot 0 = 2$

- b) $P(t) = 2 - 2t + 8t = 6t + 2$ é uma função crescente.

$$\left\{ \begin{aligned} P\left(\frac{3}{2}\right) &= 6 \cdot \frac{3}{2} + 2 = 11 \\ P(0) &= 2 \end{aligned} \right. \Rightarrow \text{a medida do segmento é}$$

$$P\left(\frac{3}{2}\right) - P(0) = 11 - 2 = 9$$



11. Seja n o número de anos que Diofante viveu.

Infante: $\frac{n}{6}$ anos; juventude com barba abundante: mais $\frac{n}{12}$ anos; antes do casamento: mais $\frac{n}{7}$ anos; até nascer o primeiro filho: mais 5 anos; número de anos que o filho viveu: mais $\frac{n}{2}$ anos; anos de estudo: 4 anos.

Devemos ter:

$$\text{a) } \frac{n}{6} + \frac{n}{12} + \frac{n}{7} + 5 + \frac{n}{2} + 4 = n \Rightarrow n = 84 \text{ (anos).}$$

- b) Até se casar, passaram-se:

$$\begin{aligned} \frac{n}{6} + \frac{n}{12} + \frac{n}{7} &= \frac{84}{6} + \frac{84}{12} + \frac{84}{7} = \\ &= 14 + 7 + 12 = 33 \text{ (anos).} \end{aligned}$$

12. a) $\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+3}{x+4} > 0 \Rightarrow$

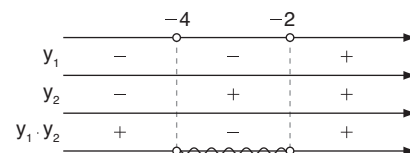
$$\Rightarrow \frac{(x+1)(x+4) - (x+3)(x+2)}{(x+2) \cdot (x+4)} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2 + 5x + 4) - (x^2 + 5x + 6)}{(x+2) \cdot (x+4)} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{(x+2) \cdot (x+4)} > 0$$

Como o numerador é sempre negativo, o denominador deve ser negativo para que o quociente resulte positivo:

$$(x+2) \cdot (x+4) < 0$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -2\}$$

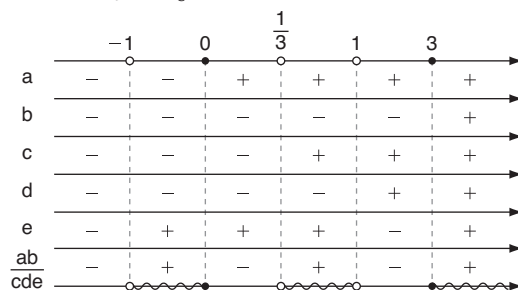
- b) $\frac{2}{3x-1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2(x+1)(x-1) - (3x-1)(x+1) + (3x-1)(x-1)}{(3x-1)(x-1)(x+1)} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2(x^2 - 1) - (3x^2 + 2x - 1) + (3x^2 - 4x + 1)}{(3x-1)(x-1)(x+1)} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 6x}{(3x-1)(x-1)(x+1)} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\overbrace{2x}^a \overbrace{(x-3)}^b}{\underbrace{(3x-1)}_c \underbrace{(x-1)}_d \underbrace{(x+1)}_e} \geq 0 \Rightarrow$$



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0 \text{ ou } \frac{1}{3} < x < 1 \text{ ou } x \geq 3 \right\}$$

$$c) (a-3) \cdot x > 4x - 5 + a$$

$$(a-3) \cdot x - 4x > a - 5$$

$$x \cdot (a-3-4) > a-5$$

$$(a-7) \cdot x > a-5$$

Como $a < 7$, $a-7 < 0$; dividindo os dois membros por $a-7$, vem:

$$\frac{(a-7) \cdot x}{a-7} < \frac{a-5}{a-7}, \text{ isto é, } x < \frac{a-5}{a-7}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{a-5}{a-7} \right\}$$

13. ■ Comprimento da vela A: ℓ cm

■ Comprimento da vela B: $\ell - 2$ cm

■ A vela A queima totalmente em 5 horas; seu comprimento diminui, por hora, $\frac{\ell}{5}$ cm. A lei que representa o comprimento de A em função do tempo t (a partir do qual ela foi acesa) é: $\ell - \frac{\ell}{5} \cdot t$ (*)

■ A vela B queima em 5 horas; seu comprimento diminui, por hora, $\frac{\ell-2}{5}$ cm. Seu comprimento, em função do tempo a partir do qual ela foi acesa, é:

$$(\ell-2) - \left(\frac{\ell-2}{5} \right) \cdot t (**)$$

■ Às 17:00 as duas velas tinham a mesma altura.

Fazendo $t = 2$ em (*) e $t = 1$ em (**) vem:

$$\ell - \frac{\ell}{5} \cdot 2 = (\ell-2) - \left(\frac{\ell-2}{5} \right) \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3\ell}{5} = \frac{4 \cdot (\ell-2)}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\ell = 4\ell - 8 \Rightarrow \ell = 8 \text{ cm (vela A: 8 cm; vela B: 6 cm)}$$

14. O custo mensal total da lanchonete é $C(x) = 0,25 \cdot x + 2500$, sendo x a quantidade de salgadinhos.

Cada salgadinho é vendido por r reais; a receita da lanchonete é $R(x) = x \cdot r$

De acordo com o enunciado, se $x = 6000$, temos:

$$R(6000) - C(6000) = 2000 \Rightarrow 6000 \cdot r - (0,25 \cdot 6000 + 2500) = 2000$$

$$6000r - 1500 - 2500 = 2000 \Rightarrow 6000r = 6000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = 1 \text{ (real)}.$$

$$15. \frac{x}{y^2} = k_1; \frac{x}{\frac{1}{z}} = k_2 \Rightarrow x \cdot z = k_2$$

$$\text{Daí: } \left(\frac{6}{\left(\frac{1}{3} \right)^2} \right) = k_1 \Rightarrow k_1 = 54; 6 \cdot \frac{1}{2} = k_2 \Rightarrow k_2 = 3$$

$$\frac{a}{2^2} = 54 \Rightarrow a = 216; a \cdot b = 3 \Rightarrow 216 \cdot b = 3 \Rightarrow b = \frac{1}{72}$$

$$c \cdot 2 = 3 \Rightarrow c = \frac{3}{2}; \frac{3}{d^2} = 54 \Rightarrow 54d^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow d = \frac{1}{6}$$

16. a) $h = a \cdot c + b$, em que h é a altura (em cm) e c é o comprimento do número (em cm):

$$\begin{cases} 190 = a \cdot 40 + b \\ 160 = a \cdot 30 + b \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } b = 70 \therefore h = 3 \cdot c + 70$$

$$b) h = 3 \cdot 32 + 70 = 166 \text{ cm} = 1,66 \text{ m}$$

$$17. a) y = ax + 2$$

$$a = \frac{8-2}{12-0} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

b) Como o coeficiente linear é igual a 2, o valor inicial fixo é 2 milhões de reais.

$$c) \text{ Se } x = 10, y = \frac{1}{2} \cdot 10 + 2 = 7.$$

O custo total é de 7 milhões de reais.

$$18. a) t = 1 \Rightarrow v = 35 \cdot 1$$

$$t = 2 \Rightarrow v = 35 \cdot 2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$t = 30 \Rightarrow v = 35 \cdot 30 = 1050 \frac{\text{km}}{\text{h}} (v = 35 \cdot t)$$

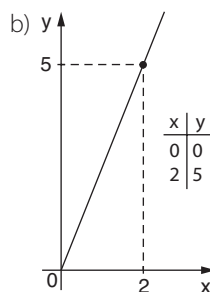
b) A velocidade máxima está entre $1300 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ e $1400 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Um valor aproximado pode ser $1350 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (média entre esses valores).

O instante em que Felix superou a velocidade do som é maior que 30 e menor que $\frac{30+60}{2} = 45$. Uma aproximação pode ser 37,5 s (média entre 30 e 45).

19. a) A base do triângulo mede 5 (distância de $A(0, 5)$ a $B(0, 10)$). A altura relativa a essa base mede x (distância de $C(x, 0)$ à origem).

$$\text{A área é } y = \frac{5 \cdot x}{2} \text{ ou } f(x) = \frac{5x}{2}.$$



20. ■ No plano alternativo, a assinatura dá direito a $\frac{400}{7} \cong 57,14$ ligações, isto é, 57 ligações. No plano básico, temos $57 \cdot 3 = 171$ minutos (< 200 minutos). Assim, os custos seriam iguais para os 2 planos para até 57 ligações, pois corresponderiam à assinatura.

■ No plano básico, a assinatura dá direito a $\frac{200}{3} = 66,6$ ligações, isto é, 66 ligações. Devemos analisar então os custos quando o número de ligações varia de 58 a 66. No plano básico, temos apenas o custo da assinatura (a). No alternativo, o custo é: $a + 0,04 \cdot (7x - 400)$, sendo x o número de ligações, com $x \in \{58, 59, \dots, 66\}$. Observemos que $58 \cdot 7 = 406 (> 400)$. Assim, o custo do plano básico (a) é menor que o custo do alternativo, que é $a + 0,04 \underbrace{(7x - 400)}_{\text{positivo}}$.

- Acima de 66 ligações (chamadas), no plano básico o custo é $a + 0,1 \cdot (3x - 200)$ e, no plano alternativo, o custo é $a + 0,04(7x - 400)$.

Assim, o custo do plano básico é menor que o do alternativo se:

$$a + 0,1(3x - 200) < a + 0,04(7x - 400) \Rightarrow \\ \Rightarrow 0,3x - 20 < 0,28x - 16 \Rightarrow 0,02x < 4 \Rightarrow x < 200$$

Reunindo os três casos, concluímos que o custo do plano básico é inferior ao do alternativo para até 200 chamadas (ligações).

21. a) A velocidade média é igual à taxa média de variação da posição, de 0 a 240 min:

$$V_m = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} = \frac{200 - 0}{240} = \frac{5}{6} \text{ m/min} = \frac{\frac{5}{6} \text{ m}}{\frac{1}{60} \text{ h}} = 50 \text{ m/h}$$

- b) A lei que expressa a posição y da tartaruga é $y = \frac{5}{6}x$ (observe que a taxa de variação é igual ao coeficiente angular; o coeficiente linear é igual a 0).

Na posição do encontro, a lei que define a posição da lebre é $y = 50$.

$$\text{Daí } \frac{5}{6}x = 50 \Rightarrow x = 60 \text{ min} = 1 \text{ h}$$

- c) Antes da parada, a lei que expressa a posição y , em metros, da lebre em função do tempo x , em minutos, é $y = 10x$, pois:

O coeficiente angular é igual à taxa de variação da posição nos 5 primeiros minutos, a saber: $\frac{50 - 0}{5 - 0} = 10$.

Após o descanso, como a velocidade é a mesma de antes, o coeficiente angular é o mesmo e a lei é: $y = 10x + n$. Como $(245, 200)$ pertence à reta, temos: $200 = 10 \cdot 245 + n \Rightarrow n = -2250$ e a lei é $y = 10x - 2250$. Por fim, se $y = 50$, temos:

$$50 = 10x - 2250 \Rightarrow 10x = 2300 \Rightarrow x = 230 \text{ min}$$

Assim, a lebre dormiu por $230 - 5 = 225 \text{ min} = 3 \text{ h } 45 \text{ min}$.

22. a) $27,4\%$ de $500 = 0,274 \cdot 500 = 137$ domicílios
 b) $41,7\%$ de $2000 = 0,417 \cdot 2000 = 834$ pessoas
 c) De 2008 a 2009, o acréscimo percentual foi de $27,4 - 23,8 = 3,6$.
 Desse modo, em 2010, a estimativa é $27,4 + 3,6 = 31\%$.

23. a) $x + \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = 26$

valor falso valor verdadeiro

$$\begin{array}{ccc} 6 & x & \\ \underbrace{13} & 26 & \Rightarrow \frac{6}{13} = \frac{x}{26} \Rightarrow x = 12 \\ 6 + \frac{6}{2} + \frac{2}{3} \cdot 6 & & \end{array}$$

- b) x : número de dias que o leão leva para chegar a $\frac{1}{7}$ de pé da boca do poço. Como a profundidade do poço é de $50 \frac{1}{7}$ pés, isto é, $50 + \frac{1}{7}$, temos:

$$\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) \cdot x = 50 \Rightarrow x = 1575$$

Assim, no 1576º dia, o leão sairá do poço (ao final do 1575º dia ele teria chegado a 50 pés e, durante o dia, subirá $\frac{1}{7}$ de pé, saindo do poço).

24. a) O gasto com aposentadorias aumentou $5,6 - 2,2 = 3,4$ em 20 anos. Mantida essa tendência, o gasto em 2050 será $5,6 + 3,4 = 9$ centenas de bilhões de reais.

- b) Analogamente ao item b, o acréscimo em 20 anos será de 2, totalizando $4 + 2 = 6$ centenas de bilhões de reais.

- c) aposentadoria: acréscimo anual: $\frac{3,4}{20} = 0,17$

$$\text{lei: } y = 2,2 + 0,17x \quad \textcircled{1}$$

$$\text{educação: acréscimo anual: } \frac{2}{20} = 0,10$$

$$\text{lei: } y = 2 + 0,1x \quad \textcircled{2}$$

$$\text{saúde: acréscimo anual: } \frac{3,6 - 1,8}{20} = 0,09$$

$$\text{lei: } y = 1,8 + 0,09x \quad \textcircled{3}$$

Igualando-se $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$, $\textcircled{1}$ e $\textcircled{3}$ e $\textcircled{2}$ e $\textcircled{3}$, vemos que não existe $x > 0$ que satisfaz. Outra justificativa é observar que os coeficientes angulares de $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ e $\textcircled{3}$ são, respectivamente, 0,17, 0,10 e 0,09 e, como $0,17 > 0,1 > 0,09$, as retas não se interceptam.

25. China: $y = ax + b$

$$a = \frac{1392 - 1331}{2050 - 2007} = \frac{61}{43},$$

$$y = \frac{61}{43} \cdot x + b$$

$$1331 = \frac{61}{43} \cdot 2007 + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 1331 - \frac{122427}{43} = -\frac{65194}{43}$$

$$\text{Assim, } y = \frac{61}{43}x - \frac{65194}{43}$$

$$\text{Índia: } y = cx + d$$

$$c = \frac{1592 - 1135}{2050 - 2007} = \frac{457}{43}$$

$$y = \frac{457}{43} \cdot x + d$$

$$1135 = \frac{457}{43} \cdot 2007 + d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = 1135 - \frac{917199}{43} = -\frac{868394}{43}$$

$$\text{Assim, } y = \frac{457}{43}x - \frac{868394}{43}.$$

Devemos determinar x tal que

$$\frac{457}{43}x - \frac{868394}{43} > \frac{61}{43}x - \frac{65194}{43} \Rightarrow$$

$$396x > 803200$$

$$x > 2028,28$$

Assim, a partir de 2029 a população da Índia será maior que a da China.

$$26. a) \begin{cases} 210^\circ - 240 \text{ km/h} \\ x - 104 \text{ km/h} \end{cases} \Rightarrow x = 91^\circ$$

b)

velocidade real (r)	velocidade indicada (i)
65 km/h	70 km/h
20 km/h	20 km/h

Da hipótese, temos que

$$r = a \cdot i + b$$

$$\begin{cases} 65 = a \cdot 70 + b \\ 20 = a \cdot 20 + b \end{cases} \Rightarrow a = 0,9 \text{ e } b = 2$$

Daí, $r = 0,9 \cdot i + 2$, ou melhor, $v(x) = 0,9 \cdot x + 2$.

Testes

10. Devemos ter:

$$100000 - 2000 \cdot 360 + m \cdot 360 \geq 110000$$

$$360m \geq 730000$$

$$m \geq 2027,77\dots$$

Como $M \in \mathbb{N}$, devemos ter $m = 2028$.

Resposta: d.

13. A lei que define a capacidade é $y = ax + 4$.

O coeficiente a é a taxa de variação:

$$\frac{8-4}{2014-2010} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow y = x + 4$$

A lei que define a demanda é $y = a'x + 6,7$

O coeficiente a' é a taxa de variação:

$$\frac{7,2-6,7}{2014-2010} = \frac{0,5}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow y = \frac{1}{8}x + 6,7$$

Devemos ter:

$$x + 4 = \frac{1}{8}x + 6,7 \Rightarrow \frac{7}{8}x = 2,7 \Rightarrow x = \frac{108}{35} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{108}{35} + 4 = \frac{248}{35} \cong 7,0857; \text{ sete milhões, oitenta e cinco mil e setecentos.}$$

Resposta: b.

14. A vazão é igual a:

$$\frac{315 \text{ mil} - 279 \text{ mil}}{19 - 11} = \frac{36 \text{ mil litros}}{8 \text{ dias}} = 4,5 \text{ mil litros ao dia}$$

$$= 4500 \text{ l/dia}$$

Como no dia 11, às 12 h, o volume do reservatório era de 315 mil litros, temos que o volume do reservatório, às 12 h do dia 1, era $315000 + \underbrace{10}_{\text{dez dias}} \cdot 4500 = 360000 \text{ l}$.

Assim, a lei $y = 360000 - 4500x$ representa o volume (y) do reservatório em função do dia x (contado a partir de 1º de outubro, que corresponde a $x = 0$).

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{360000}{4500} = 80$$

Como $80 - 31 - 30 = 19$, temos que o reservatório esvaziou no dia 20:

$$x = 0 \text{ a } x = 30 \text{ (dia 1º ao dia 31 de outubro)}$$

$$x = 31 \text{ a } x = 60 \text{ (dia 1º ao dia 30 de novembro)}$$

$$x = 61 \text{ a } x = 80 \text{ (dia 1º ao dia 20 de dezembro)}$$

Resposta: e.

15. Sejam F , M e R os custos (por km percorrido) ao se utilizar os transportes ferroviário, marítimo e rodoviário, respectivamente:

$$F = M + 100 \Rightarrow M = F - 100$$

$$F = \frac{R}{2} \Rightarrow R = 2F$$

Daí:

$$2000M + 200F + 25R = 700000$$

$$2000(F - 100) + 200 \cdot F + 25 \cdot 2F = 700000$$

$$2250F = 900000 \Rightarrow F = 400 \Rightarrow M = 300$$

Resposta: c.

17. A solução em R_1 enche o tanque em 40 s. Em 1 s, ela enche $\frac{1}{40}$ do tanque.

A solução em R_2 enche o tanque em 60 s. Em 1 s, ela enche $\frac{1}{60}$ do tanque.

$$\text{Juntas, em 1 s, elas enchem } \frac{1}{40} + \frac{1}{60} = \frac{5}{120} \text{ do tanque ou}$$

$$\frac{1}{24} \text{ do tanque. Em 2 s, elas enchem } \frac{2}{24} \text{ do tanque e assim}$$

sucessivamente. Como o outro recipiente tem o mesmo volume, as duas juntas encherão o recipiente em 24 s.

Resposta: c.

19. Vamos calcular a densidade demográfica de cada uma das regiões:

Centro-Oeste:

$$\frac{14\,058\,094}{1\,606\,371} \approx 9 \text{ hab./km}^2$$

Nordeste:

$$\frac{53\,081\,950}{1\,554\,257} \approx 34 \text{ hab./km}^2$$

Norte:

$$\frac{15\,864\,454}{3\,853\,327} \approx 4 \text{ hab./km}^2$$

Sudeste:

$$\frac{80\,364\,410}{924\,511} \approx 87 \text{ hab./km}^2$$

Sul:

$$\frac{27\,386\,891}{576\,409} \approx 48 \text{ hab./km}^2$$

Desse modo, com uma densidade demográfica de aproximadamente 87 hab./km², a região Sudeste é a que possui a maior densidade demográfica.

A extensão territorial do Brasil mede

$$1\,606\,371 + 1\,554\,257 + 3\,853\,327 + 924\,511 + 576\,409 = 8\,514\,875 \text{ km}^2.$$

Portanto, a região Norte corresponde a cerca de $\frac{3\,853\,327}{8\,514\,875} \cdot 100\% \approx 45\%$ do território nacional, enquanto a região Centro-Oeste corresponde a cerca de

$$\frac{1\,606\,371}{8\,514\,875} \cdot 100\% \approx 19\% \text{ do território nacional.}$$

Resposta: a.

20. árvore I: altura na malha = 9 \Rightarrow altura real = $9 \cdot 100 = 900$

árvore II: altura na malha = 9 \Rightarrow altura real = $9 \cdot 50 = 450$

árvore III: altura na malha = 6 \Rightarrow altura real = $6 \cdot 150 = 900$

árvore IV: altura na malha = entre 4 e 5 \Rightarrow altura real = entre $4 \cdot 300$ e $5 \cdot 300$, isto é 1 200 e 1 500

árvore V: altura na malha = entre 4 e 5 \Rightarrow altura real = entre $4 \cdot 150$ e $5 \cdot 150$, isto é, 600 e 750

Resposta: d.

21. $r = \frac{mv}{qB}$; como m , v e q são constantes, $r = \frac{k}{B}$ ($k \in \mathbb{R}$).

Assim, r e B são grandezas inversamente proporcionais, e o gráfico de $r \times B$ é uma hipérbole;

$w = \frac{qB}{m}$; como q e m são constantes, $w = k' \cdot B$

($k' \in \mathbb{R}$), w e B são grandezas diretamente proporcionais, e o gráfico de $r \times B$ é uma reta que passa pela origem.

Resposta: c.

22. x: número de kits vendidos

lucro (A): $10x - 1\,000$

lucro (B): $15x - 3\,000$

Devemos ter:

$$15x - 3\,000 > 10x - 1\,000 \Rightarrow 5x > 2\,000 \Rightarrow x > 400$$

Assim, o número mínimo pedido é 401.

Resposta: d.

23. vagas em janeiro = $880\,605 - 4\,300 = 876\,305$.

Assim, $y = 876\,305 + 4\,300(x - 1)$ (*).

Observe que, se $x = 1$ (janeiro), então $y = 876\,305$.

Reescrevendo (*) vem:

$$y = 876\,305 + 4\,300x - 4\,300$$

$$y = 872\,005 + 4\,300x$$

Resposta: c.

25. Observe inicialmente que, em 1991, quando foi plantada, a árvore apresentava $r = 0$. Assim, em 20 anos, o raio da base aumentou 16 cm. Admitindo crescimento linear, temos um aumento de $\frac{16}{20} = 0,8$ cm/ano.

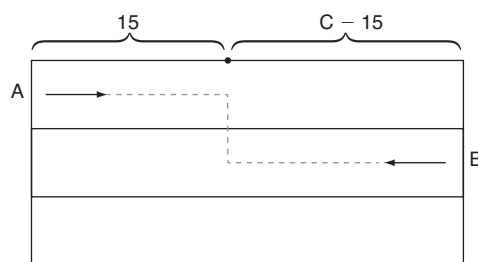
Assim, na primavera de 2026, o raio será:

$$\underbrace{16}_{\text{raio em 2011}} + \underbrace{0,8 \cdot 15}_{\text{de 2011 a 2026}} = 28 \text{ cm}$$

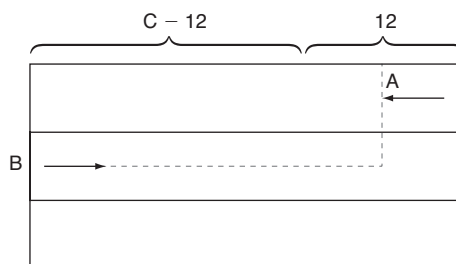
Resposta: c.

Resposta: c.

27. Seja c o comprimento da piscina



1ª vez



2ª vez

Como a velocidade é constante, podemos escrever:

$$\begin{array}{cc} \text{nadador A} & \text{nadador B} \\ \left\{ \begin{array}{l} 15 \text{ m} \quad \text{---} \quad c - 15 \text{ m} \\ (c + 12) \text{ m} \quad \text{---} \quad [c + (c - 12)] \text{ m} \end{array} \right. & \Rightarrow \frac{15}{c + 12} = \frac{c - 15}{2c - 12} \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow 30c - 180 = c^2 - 3c - 180 \xrightarrow{c > 0} c = 33 \text{ m}$$

Resposta: c.

30. Vamos determinar, inicialmente, a vazão de cada ralo.

Como o escoamento do reservatório de 900 m^3 é feito em 6 horas, por hora são escoados $900 \div 6 = 150 \text{ m}^3$. Como são 6 ralos, cada ralo escoou, por hora, $150 \div 6 = 25 \text{ m}^3$.

Seja n a quantidade de ralos pedida:

$$n \cdot 25 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} \cdot 4 \text{ h} = 500 \text{ m}^3$$

$$100 \cdot n = 500 \Rightarrow n = 5 \text{ ralos}$$

Resposta: c.

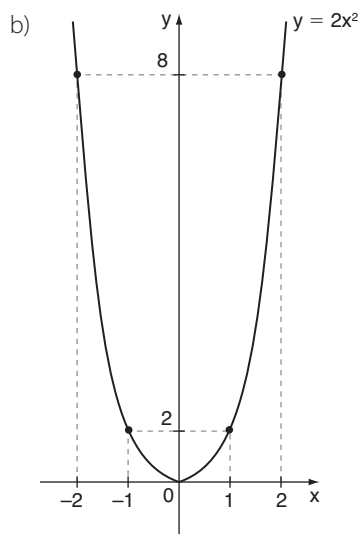
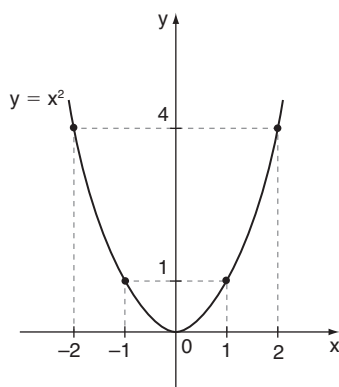
31. luz verde: $\frac{2}{3} \cdot (\text{luz vermelha}) \Rightarrow X = \frac{2}{3} \cdot (\text{luz vermelha}) \Rightarrow$
 luz vermelha: $\frac{3}{2} \cdot X$
 Devemos ter: $\frac{3}{2} \cdot X + 5 + X = Y$
 $3X + 10 + 2X = 2Y$
 $5X - 2Y + 10 = 0$
 Resposta: b .

32. (0-0) V. Para percorrer 1 km, gasta-se $\frac{1}{10}$ de litro, e o custo associado é $\frac{1}{10} \cdot R\$ 2,60 = R\$ 0,26$.
 (1-1) V. Para percorrer 1 km, gasta-se $\frac{1}{9}$ de m^3 , e o custo associado é $\frac{1}{9} \cdot R\$ 1,80 = R\$ 0,20$.
 (2-2) F. A economia ao percorrer 1 km é de $R\$ 0,26 - R\$ 0,20 = R\$ 0,06$. O número de quilômetros pedidos é $\frac{3000}{0,06} = 50000$ km.
 (3-3) F. Por dia, a economia é de $100 \cdot R\$ 0,06 = R\$ 6,00$.
 (4-4) F. Seja n o número de dias; $6 \cdot n = 3000 \Rightarrow n = 500$ dias (mais de um ano)
 Resposta: 0-0 e 1-1.

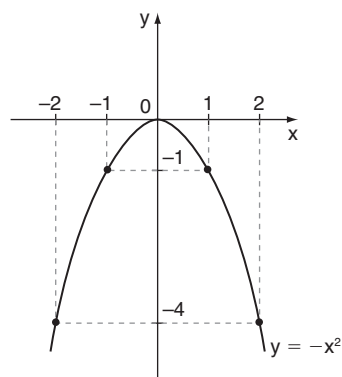
Capítulo 5 Função quadrática

Exercícios

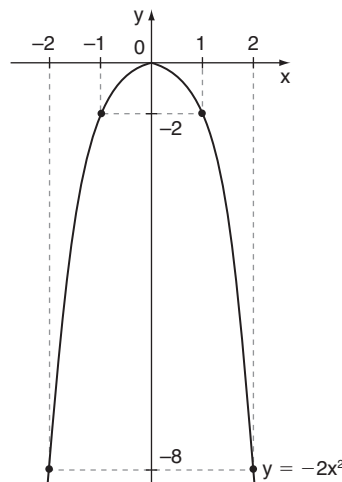
1. a)



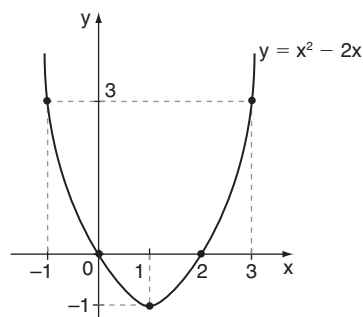
c)



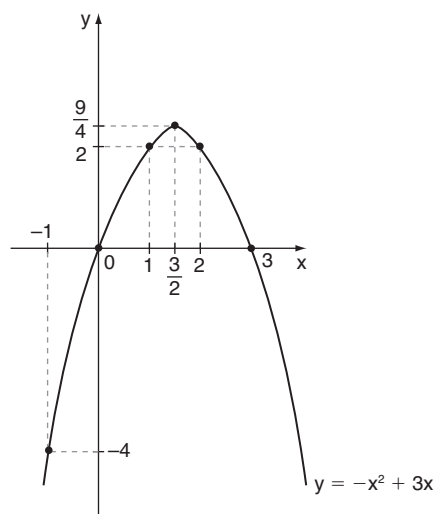
d)



2. a)



b)



g) $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-11}}{2} \notin \mathbb{R}$

f) $x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3} = \frac{0}{0} = 0$

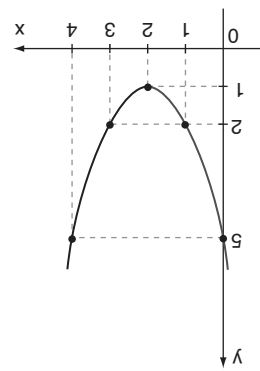
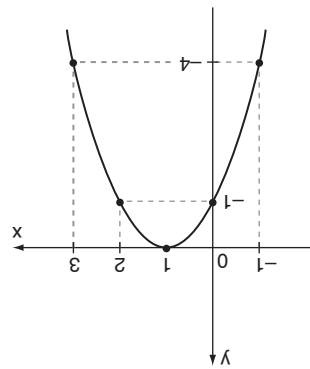
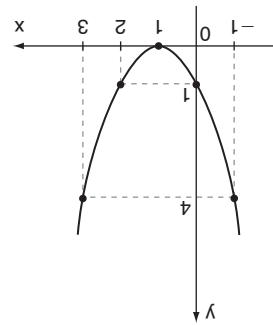
e) $x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 \pm 0}{-2} = 3$

d) $x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 9 \cdot (-1)}}{\pm 6} = \frac{\pm 6}{\pm 6}$
 $x = \frac{1}{3}$ or $x = -\frac{1}{3}$

c) $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1) \cdot 15}}{-2 \pm 8}$
 $x = 5$ or $x = -3$

b) $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}}{-4 \pm 4} = \frac{-2 \cdot (-1)}{-4 \pm 4}$
 $x = 0$ or $x = 4$

a) $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{3 \pm 1} = \frac{4}{3 \pm 1}$
 $x = 1$ or $x = \frac{1}{2}$



4. a) $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{3 \pm 1} = \frac{4}{3 \pm 1}$
 $x = 1$ or $x = \frac{1}{2}$

b) $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}}{-4 \pm 4} = \frac{-2 \cdot (-1)}{-4 \pm 4}$
 $x = 0$ or $x = 4$

c) $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1) \cdot 15}}{-2 \pm 8}$
 $x = 5$ or $x = -3$

d) $x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 9 \cdot (-1)}}{\pm 6} = \frac{\pm 6}{\pm 6}$
 $x = \frac{1}{3}$ or $x = -\frac{1}{3}$

e) $x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 \pm 0}{-2} = 3$

f) $x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3} = \frac{0}{0} = 0$

g) $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-11}}{2} \notin \mathbb{R}$

5. a) $x = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{9 \cdot 3 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{2}$
 $x = 2\sqrt{3}$ or $x = \sqrt{3}$
 $S = \{\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$

b) $9x^2 - 6x + 1 + x^2 - 4x + 4 - 25 = 0$
 $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2}$
 $x = 2$ or $x = -1$
 $S = \{-1, 2\}$

c) $2 \cdot (x^2 + 6x + 9) - 5x - 15 + 2 = 0$
 $2x^2 + 7x + 5 = 0$
 $x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{4}$
 $x = -1$ or $x = -\frac{5}{2}$
 $S = \{-1, -\frac{5}{2}\}$

d) Para $x \neq 0$, tem-se: $\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3x}{x} \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2}$
 $x = 2$ or $x = \frac{1}{2}$
 $S = \{\frac{1}{2}, 2\}$

e) $x^2 + 2x - 3 = 5 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2}$
 $x = 2$ or $x = -4$
 $S = \{-4, 2\}$

6. a) $-x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = +1$ or $x = -1$
 $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2}$
 $x = 2$ or $x = 1$
 $S = \{-1, 1, 2\}$

$$S = \{-3, 3\}$$

$$\begin{cases} y = -3 \Rightarrow x^2 = -3, \text{ não tem solução} \\ y = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3 \end{cases}$$

c) $y = x^2 \Rightarrow y^2 - 6y - 27 = 0$

$$S = \{-\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$$

$$\begin{cases} y = 5 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5} \text{ ou } x = -\sqrt{5} \\ y = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

b) $y = x^2 \Rightarrow y^2 - 8y + 15 = 0$

$$S = \{-2, -1, 1, 2\}$$

$$\begin{cases} y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ y = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

7. a) $y = x^2 \Rightarrow y^2 - 5y + 4 = 0$

$$S = \{-7, -3, 0\}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-10 \pm 4}{2} \\ &\begin{cases} x = -3 \\ x = -7 \end{cases} \\ \Rightarrow x &= \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2} = \end{aligned}$$

e) $x \cdot (x^2 + 10x + 21) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 10x + 21 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

$$S = \left\{ -\frac{3}{2}, 8 \right\}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{22 \pm 26}{6} \\ &\begin{cases} x = 8 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 4 \cdot 3 \cdot (-16)}}{6} =$$

d) $x^2 + 10x + 25 = 4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow 3x^2 - 22x - 16 = 0$

$$S = \{-5, 1\}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-4 \pm 6}{2} \\ &\begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} =$$

c) $x^2 - 3x + 2 = 2x^2 + 3x - 2x - 3 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-4) \cdot (-1)}}{-4 \pm 0} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$\begin{cases} -4x^2 + 4x - 1 = 0 \\ 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

8.

a) $f(0) = 1 \cdot (-3) = -3$

$f(1) = 3 \cdot (-2) = -6$

$f(-1) = (-1) \cdot (-4) = 4$

Dai: $\frac{-3 + (-6)}{4} = -\frac{9}{4}$

b) $(2x + 1) \cdot (x - 3) = -5 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = 2$$

9.

$x \cdot (x + 4) = 12 \Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -6$ (não serve) ou $x = 2$;
as dimensões são 2 cm e 6 cm.

10.

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x + 2 = (y + 2)^2 \Rightarrow x = y^2 + 4y + 2 \end{cases} \quad \text{①} \quad \text{②}$$

② em ① $\Rightarrow y^2 + 4y + 2 + y = 8 \Rightarrow y^2 + 5y - 6 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow y = -6$ (não serve) ou $y = 1 \Rightarrow x = 7$. As idades atuais são 1 e 7 anos.

11. Sejam:

p : preço inicial do copo

n : número inicial de copos vendidos

Temos:

① $n \cdot p = 180$

② $\left\{ (p + 0,50) \cdot (n - 18) = 180 \right.$

De ② vem:

$np - 18p + 0,5n - 9 = 180$

①

$180 - 18p + 0,5n - 9 = 180$

$n = 18 + 36p$

Substituindo em ① vem:

$(18 + 36p) \cdot p = 180$

$2p^2 + p - 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 2 \text{ e } n = 90$

a) R\$ 2,00

b) 90

c) 72

12. n : número inicial de participantes:

■ inicialmente cada um pagaria $\frac{2400}{n}$;

■ com mais 4 estudantes, coube a cada participante:

$$\frac{2400}{n+4}$$

Dai: $\frac{2400}{n} - \frac{2400}{n+4} = 30 \quad (\div 30)$

$$\frac{80}{n} - \frac{80}{n+4} = 1 \Rightarrow n^2 + 4n - 320 = 0$$

$$n = \frac{-4 \pm 36}{2} \Rightarrow n \geq 0 \Rightarrow n = 16$$

$n + 4 = 16 + 4 = 20$ pessoas foram à viagem

$$14. \Delta > 0 \Rightarrow 16 - 4 \cdot 5 \cdot m > 0 \Rightarrow m < \frac{5}{4} \\ \left\{ m \in \mathbb{R} \mid m < \frac{5}{4} \right\}$$

$$15. \Delta = 16 - 4 \cdot (m + 3) = 4 - 4m$$

2 raízes distintas se $4 - 4m > 0$, ou seja, $m < 1$.

1 única raiz se $4 - 4m = 0$, ou seja, $m = 1$.

Nenhuma raiz real se $4 - 4m < 0$, ou seja, $m > 1$.

$$16. \Delta < 0 \Rightarrow 9 - 4 \cdot 4 \cdot (p + 2) < 0 \Rightarrow p > -\frac{16}{23}$$

Como $-\frac{16}{23} = -1,4375$, o menor número inteiro que satisfaz a inequação é -1 .

17. ■ Observe que, se $m = 1$, a equação é de 1º grau: $3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$ e o conjunto solução é unitário.

■ Para $m \neq 1$, devemos ter $\Delta = 0$, isto é:

$$3^2 - 4 \cdot (m - 1) \cdot (m + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 - 4 \cdot (m^2 - 1) = 0 \Rightarrow -4m^2 + 13 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

■ Se $m = \frac{-\sqrt{13}}{2}$, chega-se à equação:

$$\left(\frac{-\sqrt{13} - 2}{2} x^2 + 3x + \left(\frac{2}{2 - \sqrt{13}} \right) \right) = 0$$

$$x = \frac{-3}{-3} = \frac{2 \left(\frac{-\sqrt{13} - 2}{2} \right) + \sqrt{13} + 2}{3} = \frac{\sqrt{13} - 2}{3}$$

$$x = \frac{9}{3 \cdot \left(\sqrt{13} - 2 \right)} = \frac{3}{\sqrt{13} - 2}; S = \left\{ \frac{3}{\sqrt{13} - 2} \right\}$$

■ Se $m = \frac{\sqrt{13}}{2}$, chega-se à equação:

$$\left(\frac{\sqrt{13} - 2}{2} x^2 + 3x + \left(\frac{2}{\sqrt{13} + 2} \right) \right) = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{13} - 2} \right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{13} + 2} \right)$$

$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm 0}{-3 \pm 0} = \frac{\cancel{2} \left(\frac{\sqrt{13} - 2}{2} \right)}{-3} = \frac{\sqrt{13} - 2}{-3} \cdot \frac{\sqrt{13} + 2}{\sqrt{13} + 2}$$

$$x = \frac{9}{-3 \cdot \left(\sqrt{13} + 2 \right)} = \frac{3}{-\sqrt{13} - 2}; S = \left\{ \frac{3}{-\sqrt{13} - 2} \right\}$$

Logo, $m = 1$ ou $m = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$.

18.

	a)	b)	c)	d)	e)
Soma	$-\frac{1}{1} = \frac{3}{1}$	$-\frac{1}{6} = 6$	$-\frac{2}{0} = 0$	$-\frac{1}{-3} = 3$	-1
Produto	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5} = 5$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{-2} = -2$	-20

$$19. a) r_1 + r_2 = \frac{-b}{-(-6)} = \frac{a}{2} = 3$$

$$b) r_1 \cdot r_2 = \frac{a}{c} = \frac{2}{3}$$

$$c) r_1 \cdot r_2 + 3r_1 + 3r_2 + 9 = \frac{2}{3} + 3 \cdot (r_1 + r_2) + 9 = \frac{2}{3} + 3 \cdot 3 + 9 = \frac{2}{39}$$

$$d) \frac{r_2 + r_1}{3} = \frac{r_1 \cdot r_2}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

$$e) (r_1 + r_2)^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 \\ 3^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow 6 = r_1^2 + r_2^2$$

$$20. a) \begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = -11 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -3 \text{ e } x_2 = -8$$

$$b) p = x_1 \cdot x_2 = 24$$

$$21. \begin{cases} x_1 + x_2 = 25 \\ x_2 = x_1 + 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 11 \text{ e } x_2 = 14$$

$$2p = x_1 \cdot x_2 = 154 \Rightarrow p = 77$$

$$22. r_1 = 3r_2 \quad ①$$

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{a}{c} = \frac{2}{3} \quad ②$$

$$\text{① em ②} \Rightarrow 3r_2 \cdot r_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow r_2^2 = \frac{2}{9} \Rightarrow r_2 = \frac{1}{3} \text{ ou } r_2 = -\frac{1}{3}$$

$$r_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow r_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Dai: } r_1 = \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$r_1 + r_2 = \frac{a}{-b} = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{2} = -1 \Rightarrow \frac{2}{2} = -2\sqrt{2}$$

$$23. \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 27 \\ x_1 = x_2^2 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 3 \text{ e } x_1 = 9 \Rightarrow p = -(x_1 + x_2) = -12$$

$$24. a) x_1 > 0; x_2 > 0 \\ S > 0 \text{ e } P > 0$$

$$b) x_1 < 0; x_2 < 0 \\ S < 0 \text{ e } P > 0$$

$$c) x_1 < 0; x_2 > 0; |x_2| > |x_1| \\ S > 0 \text{ e } P < 0$$

25. Se 0 é raiz, então:

$$0^2 + m \cdot 0 + (m^2 - m - 12) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 - m - 12 = 0 \Rightarrow m = -3 \text{ ou } m = 4$$

Como a soma das raízes é positiva (pois uma é nula e a outra é positiva) vem: $-\frac{m}{1} > 0 \Rightarrow m < 0$

Daí: $m = -3$.

26. a) raízes: 0 e 8

$$f(x) = x \cdot (x - 8)$$

b) raízes: 5 e 2

$$f(x) = (x - 5) \cdot (x - 2)$$

c) raízes: 0 e 5

$$f(x) = -2x \cdot (x - 5)$$

d) raízes: -5 e -2

$$f(x) = -(x - 5)^2$$

e) raízes: $\frac{1}{2}$ e 2

$$f(x) = 2 \cdot (x - 2) \cdot (x - 0,5) = (2x - 1)(x - 2)$$

27. Do enunciado, conclui-se que -5 e 1 são raízes;

$$f(x) = a \cdot (x + 5) \cdot (x - 1)$$

Como $(-2, -18)$ é um ponto da parábola vem:

$$-18 = a \cdot (-2 + 5) \cdot (-2 - 1)$$

$$-18 = -9a \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = 2 \cdot (x + 5) \cdot (x - 1) = 2x^2 + 8x - 10$$

$$28. a) x_v = \frac{6}{2} = 3 \text{ e } y_v = 3^2 - 6 \cdot 3 + 4 = -5 \Rightarrow V(3, -5)$$

$$b) x_v = -\frac{-1}{-4} = -\frac{1}{4} \text{ e } y_v = -2 \left(-\frac{1}{4} \right)^2 - \left(-\frac{1}{4} \right) + 3 = \frac{25}{8} \Rightarrow V \left(-\frac{1}{4}, \frac{25}{8} \right)$$

$$c) x_v = -\frac{0}{2} = 0 \text{ e } y_v = 0^2 - 9 = -9 \Rightarrow V(0, -9)$$

29. São aquelas cuja parábola tem a concavidade para baixo, ou seja, $a < 0$: b, c.

$$30. a) y_v = -\frac{3600 - 4 \cdot (-2) \cdot 0}{4 \cdot (-2)} = 450 \text{ (máximo)}$$

$$b) y_v = -\frac{16 - 4 \cdot 1 \cdot 8}{4 \cdot 1} = 4 \text{ (mínimo)}$$

$$c) y_v = -\frac{4 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}{4 \cdot (-1)} = -4 \text{ (máximo)}$$

$$d) y_v = -\frac{0 - 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = 2 \text{ (mínimo)}$$

$$31. a) y_v = -\frac{0 + 4 \cdot 1 \cdot 2}{4 \cdot 1} = -2 \text{ e } a > 0$$

$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -2\}$$

$$b) y_v = -\frac{0 - 4 \cdot (-1) \cdot 5}{4 \cdot (-1)} = 5 \text{ e } a < 0$$

$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 5\}$$

$$c) y = -x^2 + x + 2$$

$$y_v = -\frac{1 - 4 \cdot (-1) \cdot (2)}{4 \cdot (-1)} = \frac{9}{4} \text{ e } a < 0$$

$$Im = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{9}{4} \right\}$$

$$d) y = x^2 + 3x \Rightarrow y_v = -\frac{9 - 4 \cdot 1 \cdot 0}{4 \cdot 1} = -\frac{9}{4} \text{ e } a > 0$$

$$Im = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{9}{4} \right\}$$

$$32. x_v = 5 = \frac{-b}{2 \cdot (-3)} \Rightarrow b = 30 \text{ e } y = -3x^2 + 30x + c$$

$$\text{Como } y_v = 50, \text{ então } 50 = -3 \cdot 5^2 + 30 \cdot 5 + c \Rightarrow c = -25.$$

33. a) $h(1) = 35$ (metros)

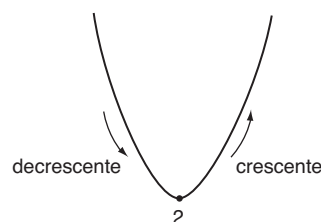
b) Se $h = 75$, tem-se $40t - 5t^2 = 75$ para $t = 3$ s e $t = 5$ s.

c) É dada pelo vértice: $y_v = 80$ (metros).

d) No instante em que a bola retorna ao solo, tem-se

$$h = 0, \text{ ou seja, } 40t - 5t^2 = 0, \text{ o que ocorre para } t = 8 \text{ s.}$$

34. a) Como $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2,4)}{2 \cdot 0,6} = 2$, concluímos que o vértice tem abscissa 2; como $a > 0$, o vértice é um ponto de mínimo, isto é,



Se $x \leq 2$, a função é decrescente.

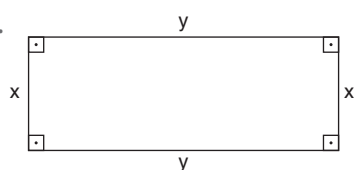
Assim, o valor do quilograma diminuiu de 2010 ($x = 0$) a 2012 ($x = 2$).

- b) $x = 2 \Rightarrow v(2) = 0,6 \cdot 2^2 - 2,4 \cdot 2 + 6$
 $v(2) = 2,4 - 4,8 + 6 = 3,6$ (3 600 reais)
- c) Se $x \in [2, 10]$, a função é crescente e, nesse intervalo, o valor máximo é atingido quando $x = 10$ (em 2020).
 $v(10) = 0,6 \cdot 10^2 - 2,4 \cdot 10 + 6$
 $v(10) = 60 - 24 + 6 = 42$ (42 000 reais)

35. Observe que a abscissa do vértice é $p = 12$.

- a) $L(7) = L(17) = 1950$, pois $p = 7$ e $p = 17$ são equidistantes de $p = 12$; (V)
- b) $L(5) = 750$; (F)
- c) $p = 12 \Rightarrow L(12) = -50 \cdot (-64) \Rightarrow L(12) = 3200 = y_v$; (V)
- d) $L(4) = L(20)$, pois $p = 4$ e $p = 20$ equidistam de $p = 12$
 $L(4) = -50 \cdot 0 = 0$; (V)

36.



- $2y + 2x = 20 \Leftrightarrow x + y = 10$
- $A = x \cdot y$
 $A = x \cdot (10 - x)$
 $A(x) = 10x - x^2$; a área é máxima se
 $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{-2} = 5$.

Se $x = 5$, $y = 5$ e o retângulo de maior área é um quadrado de lado 5 cm e área igual a 25 cm².

37. a) $\frac{1}{4} \cdot 9 - \frac{7}{2} \cdot 3 + k = 0 \Rightarrow k = \frac{33}{4}$

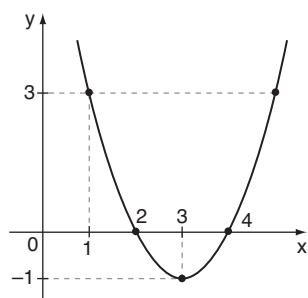
- b) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{33}{4}$, e a temperatura mínima é dada por $y_v = -4^\circ\text{C}$.

38. $x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2$

- A soma dos quadrados é $x^2 + y^2 = x^2 + (x - 2)^2 = x^2 + x^2 - 4x + 4 = 2x^2 - 4x + 4$
Assim, $S(x) = 2x^2 - 4x + 4$ é mínima quando
 $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 2}$ (daí $y = -1$)
 $S_{\min} = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 2$; observe que $1^2 + (-1)^2 = 2$.

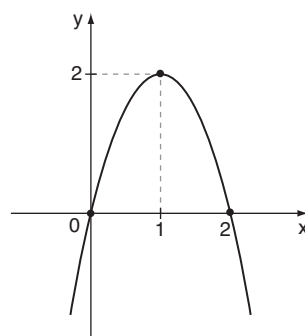
39. a) $a > 0$; raízes 2 e 4;

$V(3, -1)$; $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$



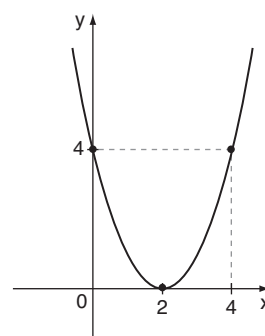
b) $a < 0$; raízes 0 e 2;

$V(1, 2)$; $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 2\}$



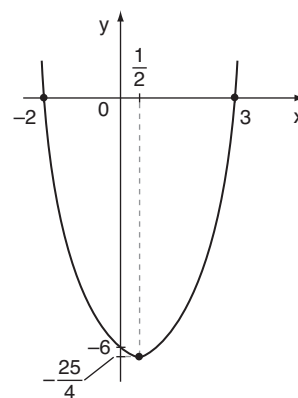
c) $a > 0$; raiz 2;

$V = (2, 0)$; $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$



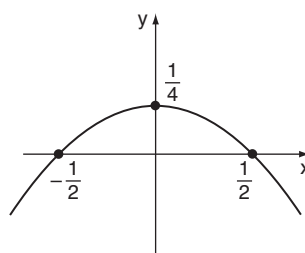
d) $y = x^2 - x - 6$; raízes 3 e -2;

$\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$; $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{25}{4}\}$

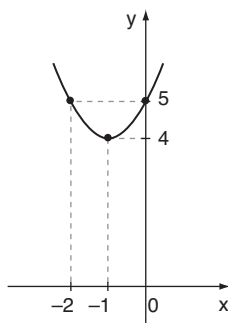


40. a) $a < 0$; raízes $+\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$;

$V\left(0, \frac{1}{4}\right)$; $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{1}{4}\}$



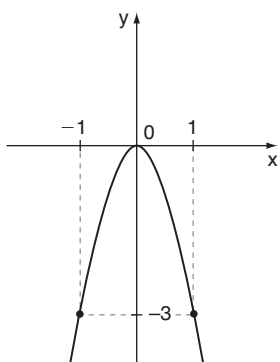
- b) $a > 0$; $\Delta = -16 < 0$ (não há raízes reais);
 $V(-1, 4)$; $x = 0 \Rightarrow y = 5$



$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 4\}$$

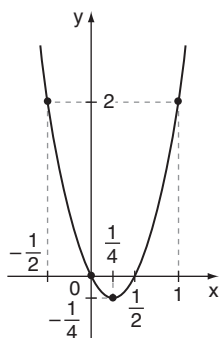
- c) $a < 0$, raiz 0;

$$V(0, 0); Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\}$$

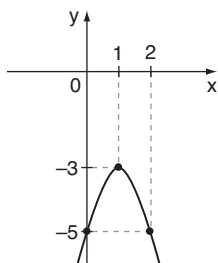


41. a) $a > 0$; raízes 0 e $\frac{1}{2}$; $V(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$;

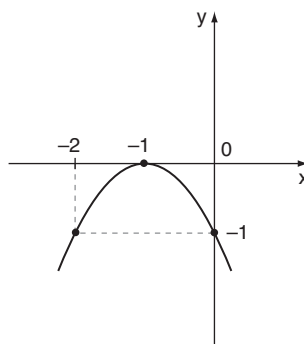
crescente para $x > \frac{1}{4}$ e decrescente para $x < \frac{1}{4}$



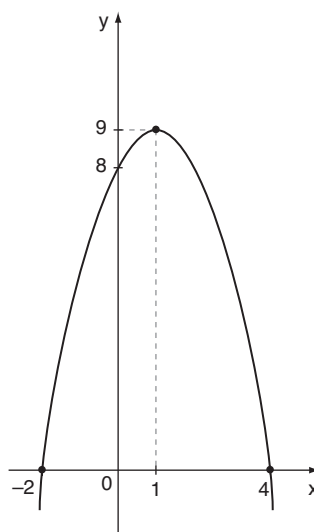
- b) $a < 0$; não tem raízes; $V(1, -3)$; crescente para $x < 1$ e decrescente para $x > 1$.



- c) $a < 0$; raiz -1; $V(-1, 0)$; crescente para $x < -1$ e decrescente para $x > -1$.



d)



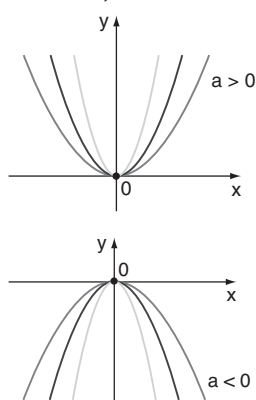
f é crescente para $x < 1$.

f é decrescente para $x > 1$.

42. a) Todas têm raiz dupla e igual a 0.

- b) Se $x = 0$, $y = 0$ e $V(0, 0)$.

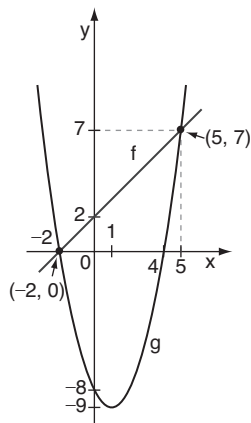
c)



43. Procuremos, por exemplo, a imagem de $x = 1$ nas três funções.

Se $y = 2x^2$, a imagem é 2; se $y = x^2$, a imagem é 1; se $y = \frac{1}{2}x^2$, a imagem é $\frac{1}{2}$. Então, I é $y = x^2$, II é $y = \frac{1}{2}x^2$ e III é $y = 2x^2$.

44. O gráfico de $f(x) = x + 2$ é uma reta que corta os eixos nos pontos $(-2, 0)$ e $(0, 2)$. O gráfico de $g(x) = x^2 - 2x - 8$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima, raízes -2 e 4 e vértice $(1, -9)$. Os pontos de interseção são representados pelos pares (x, y) que satisfazem $f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = x + 2 \Rightarrow x = 5$ e $x = -2$. Os pontos de interseção são $(-2, 0)$ e $(5, 7)$.



45. a) planta A: com 2 dias de vida, ela terá $2 \cdot 2,5 = 5$ cm;
 planta B: $y = \frac{20 \cdot 2 - 2^2}{6} = \frac{36}{6} = 6$ cm;
 A diferença pedida é 1 cm.
- b) $y = 2,5x$
- c) $\frac{20x - x^2}{6} = 2,5x \Rightarrow 20x - x^2 = 15x \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x = 0$ (data do nascimento) ou $x = 5$ (5º dia);
 $y = 2,5 \cdot 5 = 12,5$ cm
- d) planta A $\rightarrow 2,5$ cm/dia (A lei é $y = 2,5x$ e $a = 2,5$).
 planta B $\rightarrow 2,5$ cm/dia, pois:
 $x = 4 \Rightarrow y = \frac{20 \cdot 4 - 4^2}{6} = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}$
 $x = 1 \Rightarrow y = \frac{20 - 1}{6} = \frac{19}{6}$
 A taxa média é:
 $\frac{\frac{32}{3} - \frac{19}{6}}{4 - 1} = \frac{\frac{45}{6}}{3} = \frac{45}{18} = 2,5$ cm/dia

46. 1º modo:

Como a concavidade é voltada para baixo, então $a < 0$.
 Como as raízes têm sinais contrários, seu produto é negativo, ou seja, $\frac{c}{a} < 0$ e, como $a < 0$, então $c > 0$.

A soma das raízes é positiva, pois o valor absoluto da raiz positiva é maior que o da negativa. Então, $-\frac{b}{a} > 0$ e daí $b > 0$.

2º modo: $a < 0$

Como a abscissa do vértice é positiva, temos $-\frac{b}{2a} > 0$; como $a < 0$, devemos ter $-b < 0 \Rightarrow b > 0$.

$x = 0 \Rightarrow y = c$; $(0, c)$ é o ponto de interseção com o eixo y .
 Do gráfico, temos que $c > 0$.

47. a) Suas raízes são -3 e 5 e sua forma fatorada é $y = a \cdot (x + 3) \cdot (x - 5)$. Usando o ponto $(4, 7)$, determina-se $a = -1 \Rightarrow y = -x^2 + 2x + 15$.

- b) As raízes são -2 e 1 e a forma fatorada é $y = a(x + 2) \cdot (x - 1)$. Usando o ponto $(0, -4)$, determina-se $a = 2 \Rightarrow y = 2x^2 + 2x - 4$.

- c) As raízes são $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{2}$ e a forma fatorada é $y = a \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right)$. Usando o ponto $\left(\frac{3}{2}, -4\right)$, tem-se $a = 4 \Rightarrow y = 4x^2 - 12x + 5$.

48. a) $y = a \cdot (x - 4) \cdot (x + 2)$
 $9 = a \cdot (1 - 4) \cdot (1 + 2) \Rightarrow a = -1$
 $y = -1 \cdot (x - 4)(x + 2)$
 $y = -x^2 + 2x + 8$

- b) $y = a \cdot (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3})$
 Como $(0, 3)$ pertence à parábola:
 $3 = a \cdot (0 - \sqrt{3}) \cdot (0 + \sqrt{3})$
 $3 = a \cdot 3 \Rightarrow a = 1$
 $y = 1 \cdot (x - \sqrt{3})^2 = x^2 - 2x\sqrt{3} + 3$

- c) Como não são fornecidas as raízes, usaremos $y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} -4 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \\ 2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ -1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b + c = -4 & \textcircled{1} \\ a + b + c = 2 & \textcircled{2} \\ 4a + 2b + c = -1 & \textcircled{3} \end{cases}$$

Fazendo $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ vem:

$$-2b = -6 \Rightarrow b = 3$$

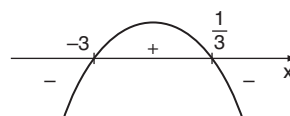
De $\textcircled{2}$ e $\textcircled{3}$ vem:

$$\begin{cases} a + 3 + c = 2 \\ 4a + 6 + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = -1 \\ 4a + c = -7 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos $a = -2$ e $c = 1$.

$$y = -2x^2 + 3x + 1$$

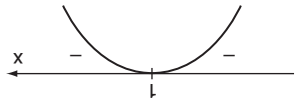
49. a) $a < 0$; raízes -3 e $\frac{1}{3}$



$$x < -3 \text{ ou } x > \frac{1}{3} \Rightarrow y < 0$$

$$-3 < x < \frac{1}{3} \Rightarrow y > 0$$

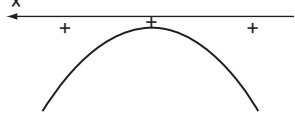
50. a) $a < 0$; raiz 1



$x \neq 1 \Rightarrow y < 0$

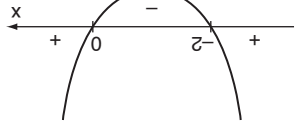
Não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y > 0$.

b) $a > 0$; não tem raízes



Qualquer $x \in \mathbb{R}, y > 0$.

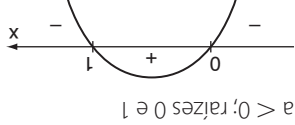
c) $a > 0$; raízes -2 e 0



$x < -2$ ou $x > 0 \Rightarrow y > 0$

$-2 < x < 0 \Rightarrow y < 0$

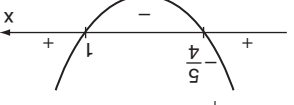
d) $a < 0$; raízes 0 e 1



$x < 0$ ou $x > 1 \Rightarrow y < 0$

$0 < x < 1 \Rightarrow y > 0$

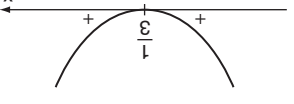
b) $a > 0$; raízes $-\frac{4}{5}$ e 1



$x < -\frac{4}{5}$ ou $x > 1 \Rightarrow y > 0$

$-\frac{4}{5} < x < 1 \Rightarrow y < 0$

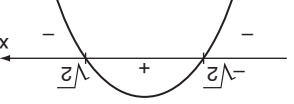
c) $a > 0$; raiz $\frac{3}{1}$



$x \neq \frac{3}{1} \Rightarrow y > 0$

Não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$.

d) $a < 0$; raízes $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$

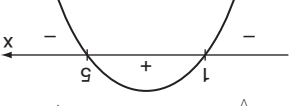


$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \Rightarrow y > 0$

$x < -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2} \Rightarrow y < 0$

51. a) $a < 0$; raiz 1

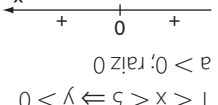
Se $x_v = 3$ e $x = 1$ é raiz, tem-se outra raiz para $x = 5$.



$x < 1$ ou $x > 5 \Rightarrow y < 0$

$1 < x < 5 \Rightarrow y > 0$

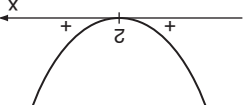
b) $a > 0$; raiz 0



$\forall x \neq 0, y > 0$

Não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$.

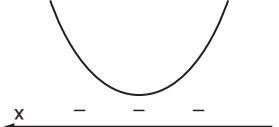
c) Se $x = 0$ e $x = 4$ têm imagens iguais, $x = 2$ é abscissa do vértice, que também é a raiz; $a > 0$.



$\forall x \neq 2, y > 0$

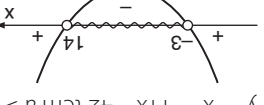
Não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$.

d) $a < 0$; não tem raízes



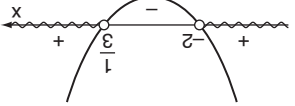
$y < 0$ para qualquer x real.

52. a) $y = x^2 - 11x - 42$ tem $a > 0$ e raízes -3 e 14 .



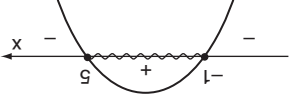
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 14\}$

b) $y = 3x^2 + 5x - 2$ tem $a > 0$ e raízes $-\frac{2}{1}$ e $\frac{3}{1}$.



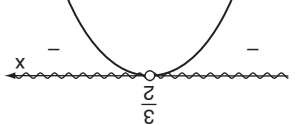
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{2}{1} \text{ ou } x > \frac{3}{1}\right\}$

c) $y = -x^2 + 4x + 5$ tem $a < 0$ e raízes -1 e 5 .



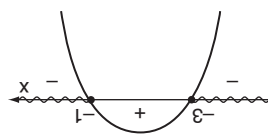
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 5\}$

d) $y = -4x^2 + 12x - 9$ tem $a < 0$ e raiz $\frac{3}{2}$.



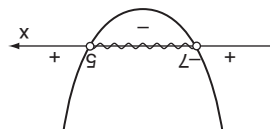
$S = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x \geq -1\}$$



e) $y = -x^2 - 4x - 3$ tem $a < 0$ e raízes -3 e -1 .

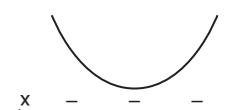
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < 5\}$$



-7 e 5 .

d) $x^2 + 2x - 35 < 0$ e $y = x^2 + 2x - 35$ tem $a > 0$ e raízes

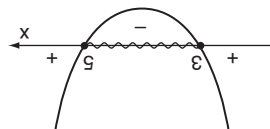
$$S = \emptyset$$



não tem raízes.

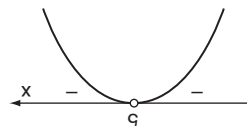
c) $-x^2 - 2x - 15 > 0$ e $y = -x^2 - 2x - 15$ tem $a < 0$ e

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$$



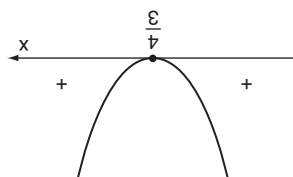
b) $y = x^2 - 8x + 15$ tem $a > 0$ e raízes 3 e 5 .

$$S = \emptyset$$



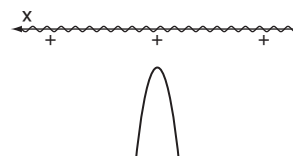
53. a) $y = -x^2 + 10x - 25$ tem $a < 0$ e raiz 5 .

$$S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$$



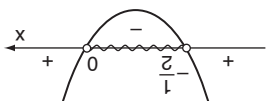
f) $y = 9x^2 - 24x + 16$ tem $a > 0$ e raiz $\frac{4}{3}$.

$$S = \mathbb{R}$$



e) $y = 3x^2 + x + 5$ tem $a > 0$ e não tem raízes.

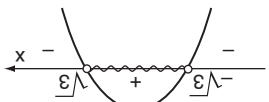
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < 0\}$$



$y = 2x^2 + x$ tem $a > 0$ e raízes $-\frac{1}{2}$ e 0 .

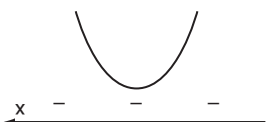
f) $x^2 + 3x < 2x - x^2 \Rightarrow 2x^2 + x < 0$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$$



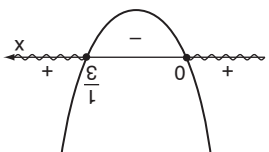
e) $3 - x^2 > 0$ e $y = 3 - x^2$ tem $a < 0$ e raízes $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$.

$$S = \mathbb{R}$$



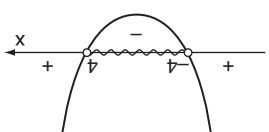
d) $-4x^2 - 9 < 0$ e $y = -4x^2 - 9$ tem $a < 0$ e não tem raízes.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq \frac{3}{1}\}$$



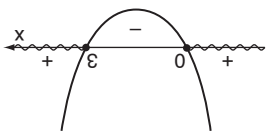
c) $9x^2 - 3x \geq 0$ e $y = 9x^2 - 3x$ tem $a > 0$ e raízes 0 e $\frac{1}{3}$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 4\}$$



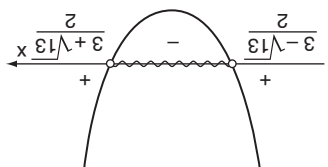
b) $x^2 - 16 < 0$ e $y = x^2 - 16$ tem $a > 0$ e raízes -4 e 4 .

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3\}$$



54. a) $x^2 - 3x \geq 0$ e $y = x^2 - 3x$ tem $a > 0$ e raízes 0 e 3 .

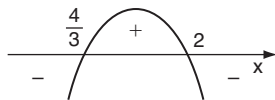
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\}$$



$$\frac{3 - \sqrt{13}}{2} \text{ e } \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

f) $x^2 - 3x - 1 < 0$ e $y = x^2 - 3x - 1$ tem $a > 0$ e raízes

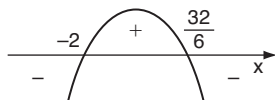
55. a) $-3x^2 + 10x - 8 > 0$



Devemos ter $\frac{4}{3} < x < 2$.

Como x representa o número de milhares de unidades, concluímos que o intervalo pedido é de 1 334 a 1 999 unidades.

b) $-3x^2 + 10x - 8 < -40$
 $-3x^2 + 10x + 32 < 0$



$x < -2$ ou $x > \frac{32}{6} = 5,3\bar{3}$

Como $x \in \mathbb{N}$, o menor natural maior que $5,333\bar{3}$ é 5 334.

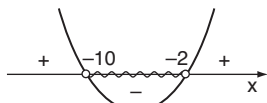
c) $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2 \cdot (-3)} = \frac{5}{3}$

$F\left(\frac{5}{3}\right) = -3 \cdot \frac{25}{9} + 10 \cdot \frac{5}{3} - 8$

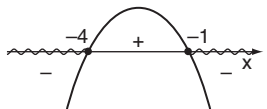
$F\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{25}{3} + \frac{50}{3} - 8$

$F\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3} = 0,333... \text{ milhão de reais, isto é, R\$ } 333\,333,33...$

56. a) $y = x^2 + 12x + 20$ tem $a > 0$ e raízes -10 e -2 .
 Em \mathbb{Z} , a solução é $\{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3\}$.



b) $y = -x^2 - 5x - 4$ tem $a < 0$ e raízes -4 e -1 .
 Em \mathbb{R} , a solução é $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \text{ ou } x \geq -1\}$.
 Em \mathbb{Z} , a solução é $\{..., -7, -6, -5, -4, -1, 0, 1, ...\}$.



57. a) Como $x_v = 1$ e uma das raízes de f é $x = 6$, por simetria, concluímos que a outra raiz de f é $1 - 5 = -4$.

b) Para f , usando a forma fatorada vem: $y = a \cdot (x - 6) \cdot (x + 4)$

Como $(0, 4)$ pertence ao gráfico de f vem:

$4 = a \cdot (0 - 6) \cdot (0 + 4) \Rightarrow -24a = 4$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{6}$; a lei de f é:

$y = -\frac{1}{6} \cdot (x - 6) \cdot (x + 4)$

$y = \frac{1}{6} \cdot (x^2 - 2x - 24)$

$y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{x}{3} + 4$

$$\begin{cases} x_v = 1 \\ y_v = -\frac{1}{6} \cdot 1^2 + \frac{1}{3} + 4 = \frac{25}{6} \\ V\left(1, \frac{25}{6}\right) \end{cases}$$

Para g , a forma fatorada é $y = a \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)$. (*)

f e g possuem, em comum, o ponto de abscissa $x = -1$.

Usando a lei de f vem:

$y = -\frac{1}{6} \cdot (-1)^2 + \frac{(-1)}{3} + 4 = \frac{7}{2}$

$y = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3} + 4 = \frac{7}{2}$

Assim, $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$ pertence ao gráfico de g ; em (*) vem:

$\frac{7}{2} = a \cdot (-1 - 1) \cdot (-1 - 4)$

$\frac{7}{2} = 10a \Rightarrow a = \frac{7}{20}$

e em (*) vem:

$y = \frac{7}{20} \cdot (x - 1) \cdot (x - 4) = \frac{7}{20}(x^2 - 5x + 4)$

$y = \frac{7}{20}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{7}{5}$

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{7}{10}} = \frac{5}{2}$

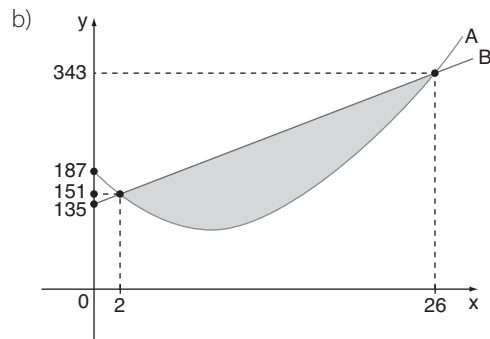
$y_v = \frac{7}{20} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{7}{4} \cdot \frac{5}{2} + \frac{7}{5}$

$y_v = \frac{-63}{80}; V\left(\frac{5}{2}, -\frac{63}{80}\right)$

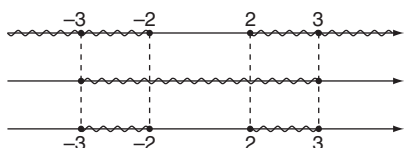
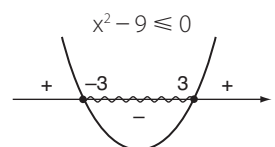
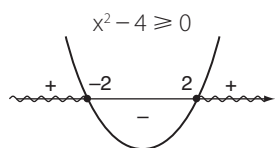
c) Do gráfico temos que $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$.

d) Do gráfico vem (lembre que a outra raiz de f é -4):
 $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 6\}$.

58. a) Para que o lucro de B supere o de A, deve-se ter
 $135 + 8x > x^2 - 20x + 187 \Rightarrow x^2 - 28x + 52 < 0$, cuja
 solução em \mathbb{R} é $2 < x < 26$. Como x é inteiro, deve
 variar de 3 a 25.

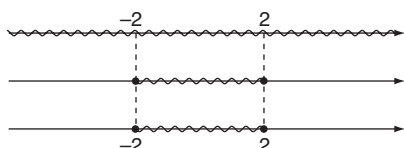
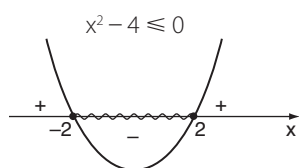
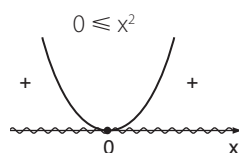


59. a) $4 \leq x^2 \leq 9$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq -2 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$$

b) $-2 \leq x^2 - 2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 4$

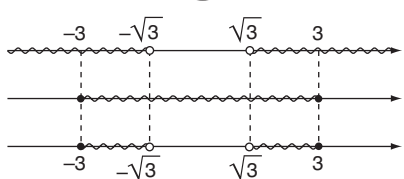
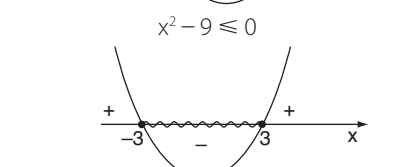
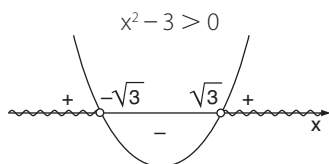


$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$$

c) $7 < 2x^2 + 1 \leq 19$

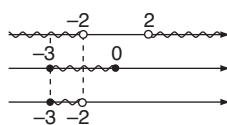
$$6 < 2x^2 \leq 18$$

$$3 < x^2 \leq 9$$



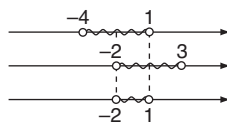
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < -\sqrt{3} \text{ ou } \sqrt{3} < x \leq 3\}$$

60. a) $\begin{cases} -2x^2 + 8 < 0 \Rightarrow x^2 - 4 > 0 \\ x^2 + 3x \leq 0 \end{cases}$



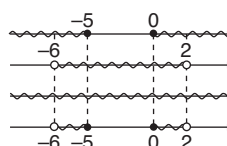
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < -2\}$$

b) $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 < 0 \\ -x^2 + x + 6 > 0 \end{cases}$



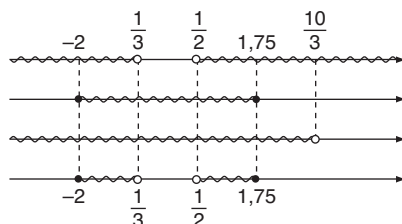
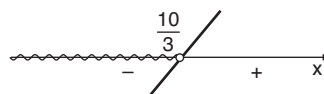
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$$

c) $\begin{cases} x^2 + 5x \geq 0 \\ x^2 + 4x - 12 < 0 \\ 5x^2 + 2 > 0; \text{observe que } y = 5x^2 + 2 \text{ não tem raízes reais.} \end{cases}$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x \leq -5 \text{ ou } 0 \leq x < 2\}$$

61. $\begin{cases} 6x^2 - 5x + 1 > 0 \\ 4x^2 + x - 14 \leq 0 \\ -3x + 10 > 0 \Rightarrow 3x - 10 < 0 \end{cases}$



As soluções inteiras são $-2, -1, 0$ e 1 .

62. a) Como $a > 0$, a função admite um ponto de mínimo dado pelas coordenadas do vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2 \cdot 0,8} = 5$$

$$y_v = \frac{4}{5} \cdot 5^2 - 8 \cdot 5 + 80 = 60$$

Assim, em 2015, a dívida atingiu o valor mínimo, que é de 60 milhões de reais.

b) $140 \leq y \leq 185 \Rightarrow 140 \leq \frac{4}{5}x^2 - 8x + 80 \leq 185$

(I) $140 \leq \frac{4}{5}x^2 - 8x + 80 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x^2 - 8x - 60 \geq 0$

$$\Delta = 64 - 4 \cdot \frac{4}{5} \cdot (-60) = 256$$

$$x = \frac{8 \pm 16}{1,6} \begin{cases} -5 \\ 15 \end{cases}$$



Como $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 15$. (*)

(II) $\frac{4}{5}x^2 - 8x + 80 \leq 185$

$$\frac{4}{5}x^2 - 8x - 105 \leq 0$$

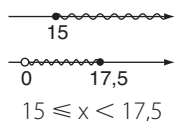
$$\Delta = 64 - 4 \cdot \frac{4}{5} \cdot (-105) = 400$$

$$x = \frac{8 \pm 20}{2 \cdot 0,8} \begin{cases} 17,5 \\ -7,5 \end{cases}$$



Como $x \in \mathbb{N}$, temos que $0 < x < 17,5$. (**)

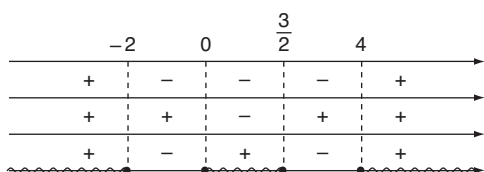
(*) \cap (**) vem:



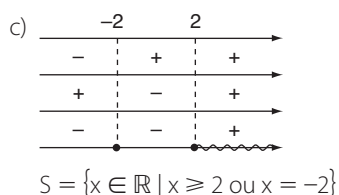
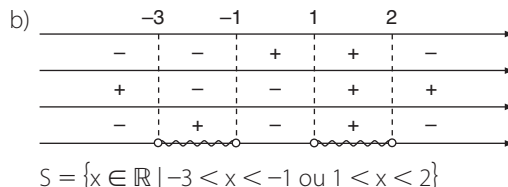
Como $x \in \mathbb{N}$, $x = 15$ ou $x = 16$ ou $x = 17$.

Assim, em 2025, 2026 e 2027 não será necessária ajuda da União.

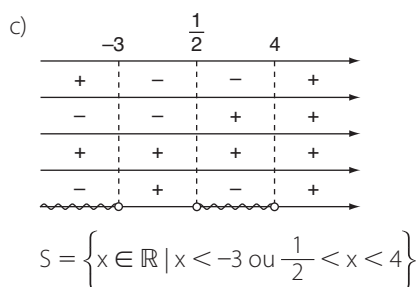
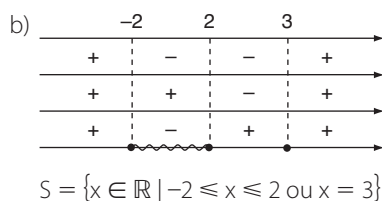
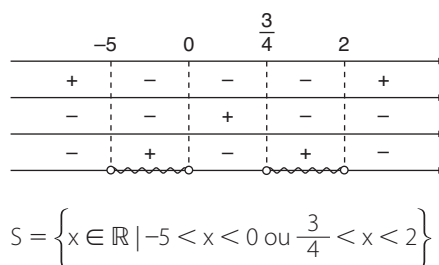
63. a)



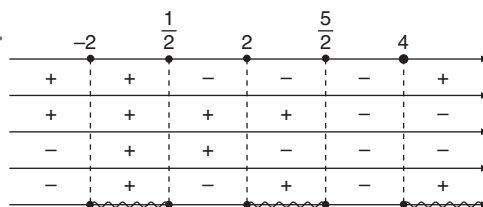
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \text{ ou } x \geq 4 \right\}$$



64. a)

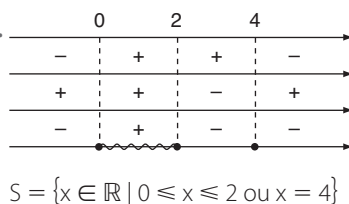


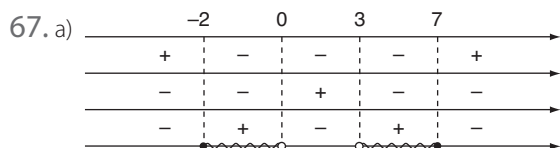
65.



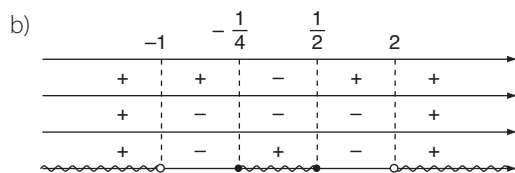
Dois números inteiros negativos: -2 e -1. Infinitos números inteiros positivos.

66.

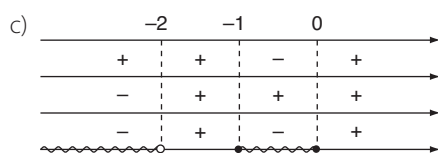




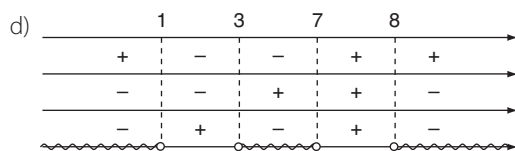
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 0 \text{ ou } 3 < x \leq 7\}$$



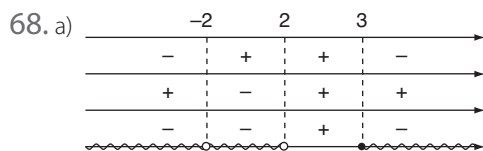
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$$



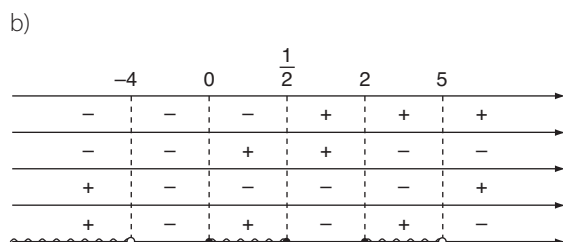
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 \leq x \leq 0\}$$



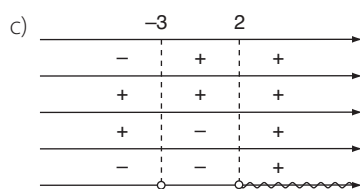
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } 3 < x < 7 \text{ ou } x > 8\}$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -2 < x < 2 \text{ ou } x \geq 3\}$$



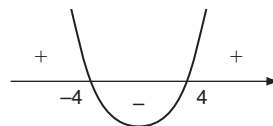
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } 2 \leq x < 5\right\}$$



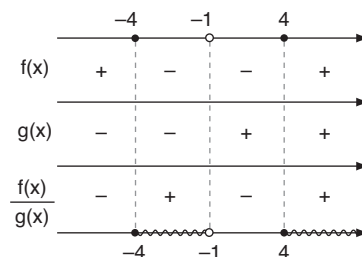
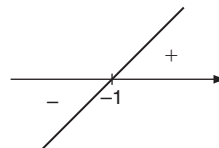
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$$

69. a) Devemos ter: $\frac{x^2 - 16}{x + 1} \geq 0$

$$f(x) = x^2 - 16$$



$$g(x) = x + 1$$



$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < -1 \text{ ou } x \geq 4\}$$

b) ■ Observe que $\forall x \in \mathbb{R}$, existe $\sqrt[3]{x}$.

Assim, para que $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}$ esteja definida em \mathbb{R} é preciso que $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ (I)

■ Devemos ter ainda:

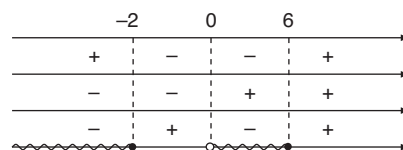
$$9 - x^2 \geq 0$$

isto é, $-3 \leq x \leq 3$ (II)

De (I) \cap (II), segue:

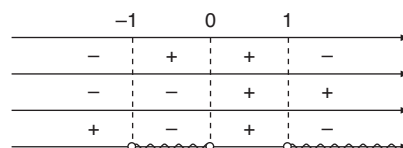
$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3 \text{ e } x \neq 2\}$$

70. a) $x - 4 \leq \frac{12}{x} \Rightarrow \frac{x^2 - 4x - 12}{x} \leq 0$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } 0 < x \leq 6\}$$

b) $\frac{1}{x} < x \Rightarrow \frac{1 - x^2}{x} < 0$



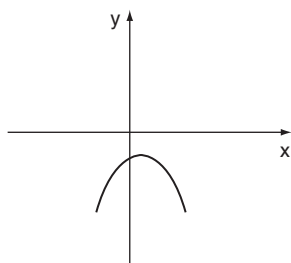
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x > 1\}$$

$$c) \frac{x-3}{x-2} \leq x-1 \Rightarrow \frac{x-3}{x-2} - x + 1 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2 + 4x - 5}{x-2} \leq 0$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$$

71. O gráfico de f deve ser:



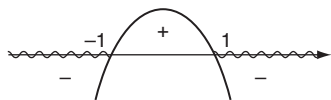
Devemos ter:

$$\begin{cases} \textcircled{1} & a < 0 \\ \textcircled{2} & \Delta < 0 \end{cases}$$

De $\textcircled{1}$ vem: $m < 0$ (*)

$$\text{De } \textcircled{2} \text{ vem: } (-2)^2 - 4 \cdot m \cdot m < 0$$

$$4 - 4m^2 < 0$$



Daí, $m < -1$ ou $m > 1$ (**)

Da interseção de (*) e (**) vem: $m < -1$

72. Observando que $a = 1 > 0$, devemos ter $\Delta < 0$, isto é,

$$m^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0 \Rightarrow -2 < m < 2$$

73. As raízes de g são $x = 2$ ou $x = 7$. Para $x = 0$, $g(0) = 14$. Assim, a reta passa por $(7, 0)$ e $(0, 14)$ e sua equação é $y = ax + 14$.

$$0 = a \cdot 7 + 14 \Rightarrow a = -2$$

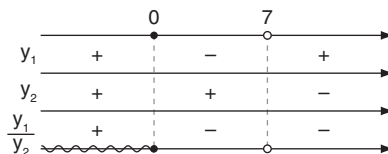
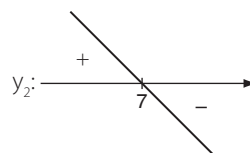
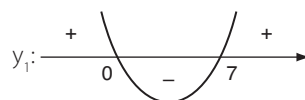
$$\text{Daí, } f(x) = -2x + 14$$

$$h(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 9x + 14}{-2x + 14}} - 1 =$$

$$= \sqrt{\frac{x^2 - 9x + 14 - (-2x + 14)}{-2x + 14}}$$

$$h(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 7x}{-2x + 14}}$$

$$\text{Devemos impor: } \frac{\overbrace{x^2 - 7x}^{y_1}}{\underbrace{-2x + 14}_{y_2}} \geq 0$$



$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$$

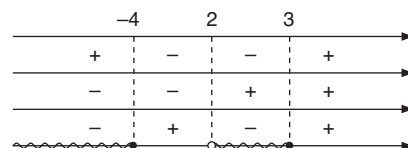
74. Há um erro na 1ª passagem: Não podemos multiplicar os dois lados por $x - 2$, pois não sabemos o sinal de $x - 2$, que pode ser positivo ou negativo. Se for positivo, o sinal da desigualdade se manterá; se for negativo, o sinal se inverterá.

Na resolução apresentada, como houve manutenção do sinal, admitiu-se que $x - 2 > 0$, isto é, $x > 2$.

A resolução correta é:

$$x + 3 \leq \frac{6}{x-2} \Rightarrow x + 3 - \frac{6}{x-2} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + x - 12}{x-2} \leq 0$$



A solução da inequação em \mathbb{R} é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \text{ ou } 2 < x \leq 3\}$$

Desafio

Seja μ a quantidade diária de ração consumida por uma vaca; o total de ração disponível é $24 \cdot 60 \cdot \mu$.

Temos:

- consumo nos 10 primeiros dias: $10 \cdot 24 \cdot \mu = 240\mu$
- consumo nos 10 dias seguintes: $10 \cdot 30 \cdot \mu = 300\mu$
- consumo nos n dias restantes: $n \cdot 10 \cdot \mu = 10n\mu$

Daí:

$$240\mu + 300\mu + 10n\mu = 24 \cdot 60\mu$$

$$\mu(240 + 300 + 10n) = 24 \cdot 60\mu$$

$$10n = 1440 - 540$$

$$10n = 900$$

$$n = 90 \text{ dias}$$

Exercícios complementares

1. a) Cada aluno que foi ao evento pagou R\$ 40,00 + R\$ 2,50 · 20 (número de lugares vagos), isto é, R\$ 90,00; o total arrecadado foi R\$ 90,00 · 180 = R\$ 16 200,00.

- b) Se x alunos compareceram, $200 - x$ lugares ficaram vagos.

■ Cada um dos alunos que foram ao evento pagou $40,00 + (200 - x) \cdot 2,50 = 40 + 500 - 2,5x = 540 - 2,5x$

■ O total arrecadado foi: $x \cdot (540 - 2,5x) = -2,5x^2 + 540x$

- c) Devemos determinar x para o qual $y = -2,5x^2 + 540x$ é máximo:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-540}{2 \cdot (-2,5)} = \frac{-540}{-5} = 108; 108 \text{ pessoas}$$

2. Sejam x_1 e x_2 as raízes de $x^2 - 3x + a = 0$ e x_1 e x_3 as de $x^2 + x + 5a = 0$.

Sabe-se que $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 & \textcircled{1} \\ x_1 \cdot x_2 = a & \textcircled{2} \end{cases}$ e $\begin{cases} x_1 + x_3 = -1 & \textcircled{3} \\ x_1 \cdot x_3 = 5a & \textcircled{4} \end{cases}$

De $\textcircled{1}$, $x_2 = 3 - x_1$ e, em $\textcircled{2}$, tem-se: $x_1 \cdot (3 - x_1) = a$ $\textcircled{5}$

De $\textcircled{3}$, $x_3 = -1 - x_1$ e, em $\textcircled{4}$, tem-se:

$$x_1 \cdot (-1 - x_1) = 5a \textcircled{6}$$

Substituindo $\textcircled{5}$ em $\textcircled{6}$, tem-se:

$$-x_1 \cdot (1 + x_1) = 5x_1 \cdot (3 - x_1) \Rightarrow 4x_1^2 - 16x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ ou } x_1 = 4. \text{ Substituindo } x \text{ em } \textcircled{5}, x_1 = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ (não serve) e } x_1 = 4 \Rightarrow a = -4.$$

a) $a = -4$

b) $x_1 = 4$

3. ■ O preço de custo de um desses artigos é $\frac{1200}{n}$.

■ O preço de venda de cada um dos artigos é $\frac{1200}{n} + 10$; como foram vendidos $n - 5$ artigos, o total arrecadado foi $(n - 5) \cdot \left(\frac{1200}{n} + 10\right)$.

Daí:

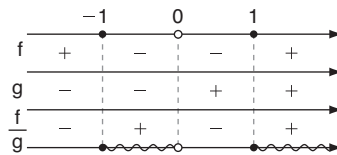
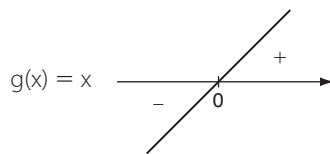
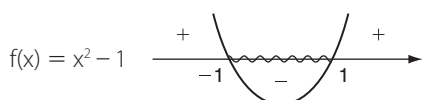
$$(n - 5) \cdot \left(\frac{1200}{n} + 10\right) - 1200 = 450$$

$$1200 + 10n - \frac{6000}{n} - 50 - 1200 = 450$$

$$10n^2 - 500n - 6000 = 0 \Rightarrow$$

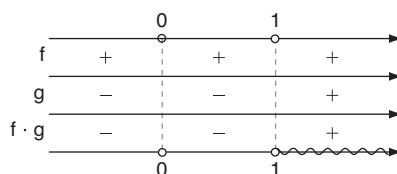
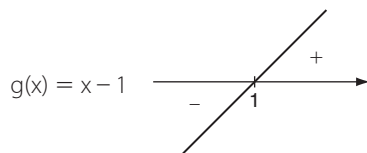
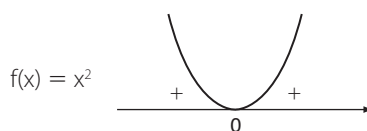
$$\Rightarrow n^2 - 50n - 600 = 0 \Rightarrow n = 60$$

4. a) $x - \frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} \geq 0$



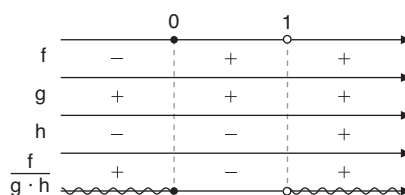
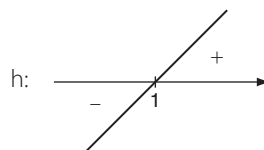
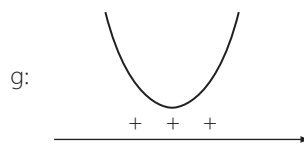
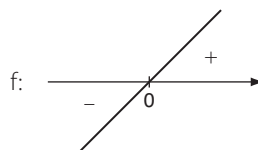
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 0 \text{ ou } x \geq 1\}$$

b) $x^3 - x^2 > 0 \Rightarrow \underbrace{x^2}_f \cdot \underbrace{(x-1)}_g > 0$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

c) $\frac{x}{x^2 \cdot (x-1) + 1 \cdot (x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\underbrace{x}_f}{\underbrace{(x^2+1)}_g \cdot \underbrace{(x-1)}_h} \geq 0$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x > 1\}$$

5. a) $P \in \text{parábola} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - b + c = 2 \quad (1)$$

$Q \in \text{parábola} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + b + c = 2 \quad (2)$$

$R \in \text{parábola} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 5 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a + 2b + c = 5 \quad (3)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow -2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

Em (1) e (3) vem:

$$\begin{cases} a - 0 + c = 2 \\ 4a + 0 + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ 4a + c = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 1 \text{ e } c = 1$$

A função é $y = x^2 + 1$.

b) $y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} -1 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \\ 3 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 5 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = -1 & (1) \\ a + b + c = 3 & (2) \\ 4a + 2b + c = 5 & (3) \end{cases}$$

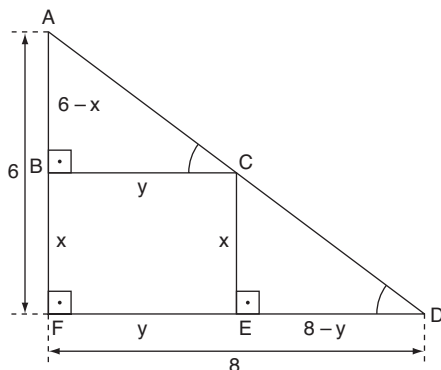
$$(1) - (2) \Rightarrow -2b = -4 \Rightarrow b = 2$$

$$(1) \text{ e } (3) \xrightarrow{b=2} \begin{cases} a + c = 1 \\ 4a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ e } c = 1$$

Como a deve ser diferente de zero, concluímos que a parábola não pode passar por esses pontos.

6. Sejam x e y as dimensões desse retângulo, conforme mostra a figura abaixo:



$$\triangle ABC \sim \triangle CED$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CE}{ED} \Rightarrow \frac{6-x}{y} = \frac{x}{8-y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy = 48 - 6y - 8x + xy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x + 6y = 48 \Rightarrow 6y = -8x + 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + 8 \quad (*)$$

A área do retângulo é $A = x \cdot y$; por (*) vem:

$$A = x \cdot \left(-\frac{4}{3}x + 8\right)$$

$$A = -\frac{4}{3}x^2 + 8x$$

Como a área é máxima, x deve coincidir com a abscissa do vértice:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{-8}{-\frac{8}{3}} = 3$$

Se $x = 3$, por (*) vem $y = -\frac{4}{3} \cdot 3 + 8 = 4$; trata-se de um retângulo de base (horizontal) 4 e altura (vertical) 3.

7. ■ As raízes de f são as abscissas dos pontos em que f intercepta o eixo x : $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 3$.

Temos duas possibilidades:

O ponto é $A(1, 0)$ ou $B(3, 0)$.

■ O ponto em que f intercepta o eixo y é obtido fazendo-se $x = 0 \Rightarrow y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 \Rightarrow y = 3$; o ponto é $C(0, 3)$. Assim, o gráfico de g passa por $(A \text{ e } C)$ ou $(B \text{ e } C)$. Em qualquer um dos casos temos $x = 0$ e $y = 3$:

$$3 = 0^2 - b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 3; g(x) = -x^2 - bx + 3$$

■ Se A pertence ao gráfico de $g \Rightarrow 0 = -1^2 - b \cdot 1 + 3 \Rightarrow b = 2$

■ Se B pertence ao gráfico de $g \Rightarrow 0 = -3^2 - b \cdot 3 + 3 \Rightarrow b = -2$

$$\text{Logo, } b^4 \cdot c = (\pm 2)^4 \cdot 3 = 16 \cdot 3 = 48.$$

8. Como a reta $y = 5$ tangencia a parábola e esta intercepta o eixo x nos pontos $(r, 0)$ e $(-r, 0)$, o ponto $(0, 5)$ é ponto de máximo e a equação da parábola é:

$$y = a(x - r)(x + r)$$

$$\text{Para } x = \sqrt{40}, \text{ temos } y = 3, \text{ então } 3 = a(\sqrt{40} - r)(\sqrt{40} + r) \text{ e daí } 3 = a(40 - r^2) \quad (1)$$

Por outro lado, para $x = 0$ temos $y = 5$, então:

$$5 = a(0 - r)(0 + r) \text{ e daí } 5 = a(-r^2) \quad (2)$$

$$\text{De (1) e (2) vem } \frac{3}{40 - r^2} = \frac{5}{-r^2} \text{ e } r = \pm 10.$$

9. a) As raízes de $y = -4x^2 + 8x + 12$ seguem da equação $-4x^2 + 8x + 12 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 3$.

Assim, $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$.

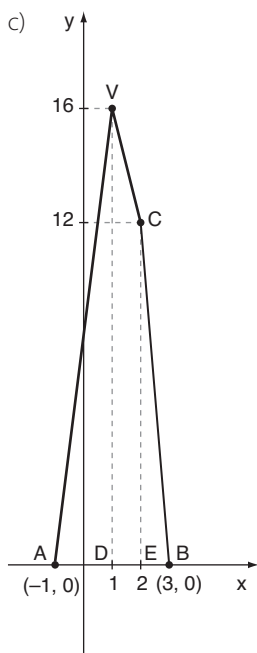
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{-8} = 1 \Rightarrow y_v = -4 + 8 + 12 = 16;$$

$$V(1, 16)$$

$$\text{b) } P \cap r \Leftrightarrow -4x^2 + 8x + 12 = 3x + 6 \Rightarrow$$

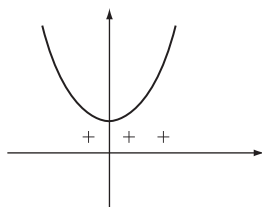
$$\Rightarrow -4x^2 + 5x + 6 = 0 \xrightarrow{x > 0} x = 2$$

Se $x = 2$, $y = 3 \cdot 2 + 6 = 12$. Assim, $C(2, 12)$.



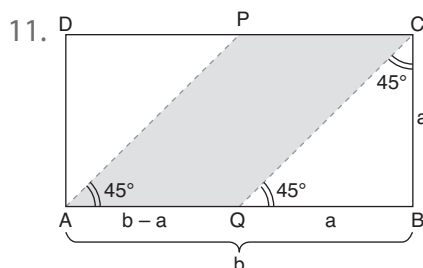
- Área $\triangle VAD = \frac{2 \cdot 16}{2} = 16$ u.a.
- Área trapézio $VDEC = \frac{(16 + 12) \cdot 1}{2} = 14$ u.a.
- Área $\triangle CEB = \frac{1 \cdot 12}{2} = 6$ u.a.
- Área pedida = $16 + 14 + 6 = 36$ u.a.

10. f está definida quando $2x^2 - mx + m > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
Essa condição é satisfeita quando $a > 0$ ($2 > 0$) e $\Delta < 0$:



Daí:

$$(-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot m < 0 \Rightarrow m^2 - 8m < 0 \Rightarrow 0 < m < 8$$



- $2a + 2b = 800 \Rightarrow a + b = 400$ ①
- \overline{PA} pertence à bissetriz de $\widehat{DAB} \Rightarrow \widehat{PAB} = 45^\circ$; analogamente, $\widehat{BCQ} = 45^\circ$
- $\triangle CBQ$ é isósceles $\Rightarrow BQ = a$
- Área do paralelogramo:
 $S = AQ \cdot BC = (b - a) \cdot a$
 $S = ba - a^2$

Por ①, escrevemos:

$$S = (400 - a) \cdot a - a^2$$

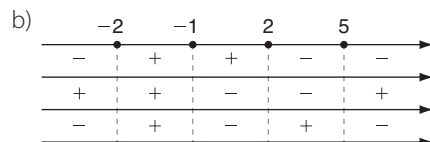
$$S = 400a - 2a^2$$

S é máximo quando $a = \frac{-400}{2 \cdot (-2)}$, isto é, $a = 100$.

$$S_{\max} = 400 \cdot 100 - 2 \cdot 100^2$$

$$S_{\max} = 40\,000 - 20\,000 = 20\,000 \text{ m}^2$$

12. a) As raízes de f são -1 e 5 ; as de g são -2 e 2 .



$h(x) > 0$ quando $-2 < x < -1$ ou $2 < x < 5$

$h(x) < 0$ quando $x < -2$ ou $-1 < x < 2$ ou $x > 5$

- c) Pelo quadro do item anterior:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 < x < 2 \text{ ou } x > 5\}$$

- d) O quadro de sinais de $\frac{f(x)}{g(x)}$ é o mesmo de $f(x) \cdot g(x)$, incluindo a condição $g(x) \neq 0$.

Assim, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq -1 \text{ ou } 2 < x \leq 5\}$.

- e) $f(x) = a \cdot (x + 1) \cdot (x - 5)$

$$-3 = a \cdot (2 + 1) \cdot (2 - 5)$$

$$-3 = -9a \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^2 - 4x - 5)$$

$$g(x) = a \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$$

$$4 = a \cdot (0 + 2) \cdot (0 - 2)$$

$$4 = a \cdot (-4) \Rightarrow a = -1$$

$$g(x) = -(x^2 - 4) = -x^2 + 4$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 - \frac{4x}{3} - \frac{5}{3} = -x^2 + 4$$

$$\frac{4x}{3}x^2 - \frac{4x}{3} - \frac{17}{3} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 4x - 17 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm 12\sqrt{2}}{8} = \frac{1 \pm 3\sqrt{2}}{2}$$

13. Observe a tabela:

Dias de atraso da entrega	Lucro unitário (em reais)
0	6,00
1	$6,00 - 0,20 = 5,80$
2	$6,00 - 2 \cdot 0,20 = 5,60$
3	$6,00 - 3 \cdot 0,20 = 5,40$
\vdots	\vdots
x	$6,00 - 0,2 \cdot x$

Desse modo, se o produto for entregue depois de x dias (a contar a partir de hoje), o número de unidades será

$$\underbrace{2000}_{\text{estoque}} + \underbrace{100 \cdot x}_{\text{produção diária}}$$

Assim, o lucro da empresa será dado por:

$$L(x) = (\text{número de unidades vendidas}) \cdot (\text{lucro unitário})$$

$$L(x) = (2000 + 100 \cdot x) \cdot (6 - 0,2x)$$

$$L(x) = 12000 - 400x + 600x - 20x^2$$

$$L(x) = -20x^2 + 200x + 12000$$

$$L_{\text{máx}} = y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(40000 + 960000)}{-80} = 12500 \text{ reais}$$

Soma dos dígitos: $1 + 2 + 5 + 0 + 0 = 8$

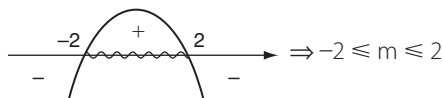
14. a) $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-m}{2}$

$$y_v = \left(-\frac{m}{2}\right)^2 + m \cdot \left(-\frac{m}{2}\right) + 2 = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + 2 = -\frac{m^2}{4} + 2$$

$$V\left(-\frac{m}{2}, -\frac{m^2}{4} + 2\right)$$

b) Como $a = 1 > 0$, f admite ponto de mínimo e seu conjunto imagem é $y \geq y_v$.

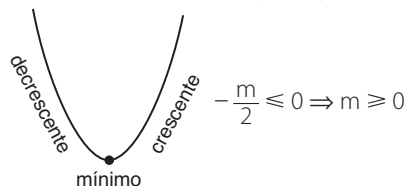
Como $y_v = -\frac{m^2}{4} + 2$ e o conjunto imagem de f contém $[1, +\infty[$, devemos ter $-\frac{m^2}{4} + 2 \geq 1 \Rightarrow \frac{8-m^2}{4} \geq 1 \Rightarrow 8-m^2 \geq 4 \Rightarrow -m^2 + 4 \geq 0$



c) Se $\text{Im}(f) = [1, +\infty[$, devemos ter:

$$-\frac{m^2}{4} + 2 = 1 \Rightarrow m = \pm 2$$

Como f é crescente em $[0, +\infty[$, devemos ter $x_v \leq 0$:



Assim devemos ter $m = 2$.

Observe que, se $x_v > 0$, f seria decrescente em $[0, x_v[$ e a condição de ser crescente em $[0, +\infty[$ não seria satisfeita.

d) $m = 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 2$

$$f(x) = y \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = y \Rightarrow x^2 + 2x = y - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = y - 2 + 1$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 = y - 1 \Rightarrow x + 1 = \pm \sqrt{y - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{y - 1}$$

$$\text{Como } y \geq 2, y - 1 \geq 1 \text{ e } \sqrt{y - 1} \geq 1.$$

Daí, o único valor de $x \geq 0$ é $x = -1 + \sqrt{y - 1}$.

15. x : número inicial de trabalhadores

$$\text{valor inicial para cada trabalhador: } \frac{10800}{x}$$

$$\text{valor final recebido por trabalhador: } \frac{10800}{x-3}$$

Devemos ter:

$$\frac{10800}{x-3} - \frac{10800}{x} = 600 \Rightarrow 10800 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x} \right) = 600 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{1}{18} \Rightarrow 18[x - (x-3)] = x(x-3) \Rightarrow \Rightarrow 54 = x^2 - 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 54 = 0 \Rightarrow x = 9$$

a) $9 - 3 = 6$ trabalhadores

b) $10800 \div 6 = 1800$ reais

16. a) $f(x) = x - 1$

x	y
0	-1
1	0

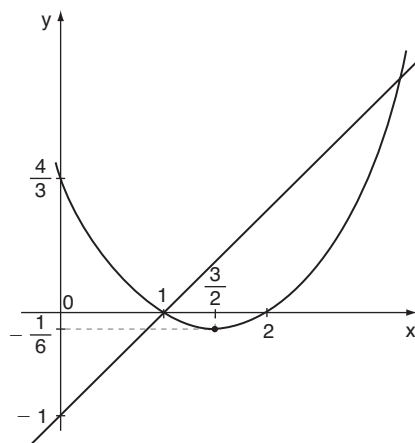
$$g(x) = \frac{2}{3} \cdot (x-1) \cdot (x-2)$$

Como g está na forma fatorada, suas raízes são 1 e 2.

$$x_v = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y_v = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - 2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_v = -\frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{6}}$$

$$\text{Se } x = 0, \text{ obtemos } g(0) = \frac{2}{3} \cdot (0-1) \cdot (0-2) = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$



b) $f(x) = g(x) \Rightarrow x - 1 = \frac{2}{3} \cdot (x-1)(x-2)$

$$(x-1) - \frac{2}{3}(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow (x-1) \cdot \left[1 - \frac{2}{3}(x-2)\right] =$$

$$= 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } \frac{2}{3}(x-2) = 1 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

Se $x = 1$, $f(1) = 1 - 1 = 0$; o ponto é $(1, 0)$.

Se $x = \frac{7}{2}$, $f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2}$; o ponto é $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

17. a) Como $x_A = x_D = 3$ e A pertence à parábola, temos:

$$y_A = \frac{x_A^2}{6} - \frac{11}{6}x_A + 3 \Rightarrow y_A = \frac{1}{6} \cdot 3^2 - \frac{11}{6} \cdot 3 + 3 = -1$$

Logo, $A(3, -1)$.

b) Como $y_B = y_A = -1$ e B pertence à parábola, temos:

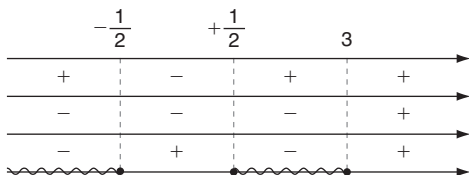
$$-1 = \frac{x^2}{6} - \frac{11x}{6} + 3 \Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0 \Rightarrow x = 3$$

(abscissa de D) ou $x = 8$ (abscissa de C). Assim, $C(8, 0)$.

c) A base do retângulo mede $x_C - x_D = 8 - 3 = 5$ e sua altura é $|y_A| = 1$.

Assim, a área é $5 \cdot 1 = 5$ u.a.

18. a) $4x^2 \cdot (x-3) - (x-3) = 0 \Rightarrow (4x^2 - 1) \cdot (x-3) \leq 0$

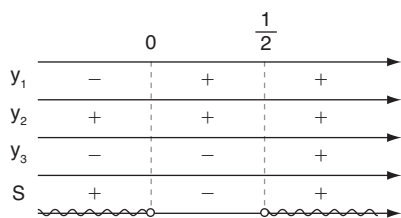


$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } \frac{1}{2} \leq x \leq 3 \right\}$$

b) $3x^3 \cdot (2x-1) + 2x \cdot (2x-1) > 0$

$$(3x^3 + 2x) \cdot (2x-1) > 0$$

$$\underbrace{x}_{y_1} \cdot \underbrace{(3x^2 + 2)}_{y_2} \cdot \underbrace{(2x-1)}_{y_3} > 0$$



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > \frac{1}{2} \right\}$$

19. a) $\frac{x}{x+12} \cdot a = \frac{x+1}{24} \cdot a \Rightarrow x^2 + 13x + 12 = 24x \Rightarrow x^2 - 11x + 12 = 0 \Rightarrow \frac{11 \pm \sqrt{73}}{2}$

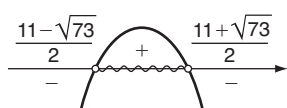
Como $\sqrt{73} \approx 8,55$, obtemos $x \approx 9,8$ anos ou $x \approx 1,2$ ano.

b) $\frac{x}{x+12} \cdot a > \frac{x+1}{24} \cdot a \Rightarrow \frac{x}{x+12} - \frac{x+1}{24} > 0 \Rightarrow \frac{24x - (x^2 + 13x + 12)}{24(x+12)} > 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 11x - 12}{24 \cdot (x+12)} > 0$

Como $x > 0$, podemos multiplicar os dois membros da desigualdade por $x+12 > 0$ e obtemos: $-x^2 + 11x - 12 > 0$

$$f(x) = -x^2 + 11x - 12$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{73}}{2}$$



Como devemos ter $2 \leq x \leq 13$, os valores de x são tais que $2 \leq x < \frac{11 + \sqrt{73}}{2}$.

c) Para $x = 5$, obtemos:

$$\text{Young: } c = \frac{5}{5+12} \cdot a = \frac{5a}{17}$$

$$\text{Cowling: } c = \frac{5+1}{24} \cdot a = \frac{a}{4} < \frac{5a}{17}, \text{ se } a > 0$$

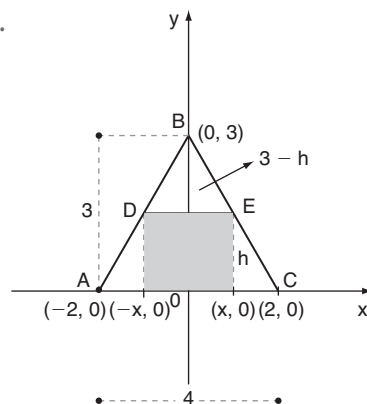
$$\text{A porcentagem pedida é } \frac{\frac{a}{4}}{\frac{5a}{17}} = \frac{17}{20} = 0,85 = 85\%.$$

20. a) $x - 14 > -x^2 + 6x - 8 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 > 0 \Rightarrow x < -1$ ou $x > 6$

b) $f(x) + k \geq g(x) \Rightarrow x - 14 + k \geq -x^2 + 6x - 8 \Rightarrow x^2 - 5x + (k-6) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Devemos ter $\Delta \leq 0$, isto é, $(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k-6) \leq 0 \Rightarrow 25 - 4k + 24 \leq 0 \Rightarrow \frac{49}{4} \leq k \Rightarrow k \geq \frac{49}{4}$ e o menor número real k é $\frac{49}{4}$.

21.



$$\triangle ABC \sim \triangle DBE$$

A base e a altura do $\triangle ABC$ medem, respectivamente, 4 e 3.

A base e a altura do $\triangle DBE$ são, respectivamente, $2x$ e $3-h$.

Temos:

$$\frac{4}{2x} = \frac{3}{3-h} \Rightarrow 6x = 12 - 4h \Rightarrow h = \frac{12-6x}{4} = 3 - \frac{3}{2}x$$

A área (A) do retângulo sombreado é $A = 2x \cdot h \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = 2x \cdot \left(3 - \frac{3}{2}x\right) \Rightarrow A = -3x^2 + 6x.$$

$$\text{A é máximo se } x = x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-3)} = 1.$$

Assim, $x = 1$ é a resposta procurada.

22. a) $\begin{cases} 1 \ell \text{ — } 13,5 \text{ km} \\ x \text{ — } 378 \text{ km} \end{cases} \Rightarrow x = 28 \ell$

Assim, a quantidade de CO_2 emitida é $28 \cdot 2,7 \text{ kg} = 75,6 \text{ kg}$.

b) $c(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$

$$\begin{cases} 400 = a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c & \textcircled{1} \\ 250 = a \cdot 30^2 + b \cdot 30 + c & \textcircled{2} \\ 200 = a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + c & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 400 = a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c & \textcircled{1} \\ 250 = a \cdot 30^2 + b \cdot 30 + c & \textcircled{2} \\ 200 = a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + c & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow 150 = -500a - 10b$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} \Rightarrow 50 = -700a - 10b$$

$$\text{Fazendo } \textcircled{4} - \textcircled{5}, \text{ obtemos: } 100 = 200a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Em ④: $150 = -500 \cdot \frac{1}{2} - 10b \Rightarrow 10b = -400 \Rightarrow b = -40$
 Em ①: $400 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot (-40) + c = 400 \Rightarrow c = 1000$

Logo, $c(v) = \frac{1}{2}v^2 - 40v + 1000$.

23. (01) V. O coeficiente angular de p é $-10 < 0$.

(02) V. $n = 1 \Rightarrow p(1) = 1600 - 10 = 1590$

$n = 2 \Rightarrow p(2) = 1600 - 20 = 1580$

$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$

$n = 90 \Rightarrow p(90) = 1600 - 900 = 700$

Como p é decrescente, $p(n) \in [700, 1590]$.

(04) F. $1352 = 1600 - 10n \Rightarrow n = 24,8 \notin \mathbb{N}$.

08) F. $r(n) = -10n^2 + 1600n$. O gráfico de r é uma parábola cuja abscissa do vértice é $x_v = \frac{-1600}{2 \cdot (-10)} = 80$ e r é crescente se $n < 80$.

(16) F. $r(n+1) = 1600(n+1) - 10(n+1)^2 = 1600n + 1600 - 10n^2 - 20n - 10$

$r(n+1) - r(n) = 1600 - 20n - 10$;

o acréscimo não é constante.

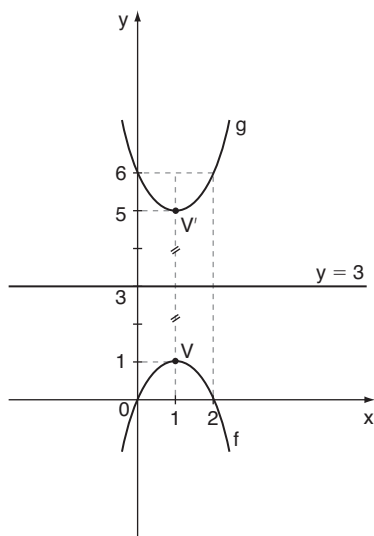
(32) F. $63000 = 1600n - 10n^2 \Rightarrow n^2 - 160n + 6300 = 0 \Rightarrow n = 180 \notin \mathbb{A}$.

(64) V. r é máximo se $n = \frac{-1600}{2 \cdot (-10)} = 80$.

Resposta: (01) + (02) + (64) = 67

24. raízes de $f: 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

vértice da parábola: $x_v = \frac{0+2}{2} = 1 \Rightarrow y_v = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$
 $V(1, 1)$



A lei que define g é $y = ax^2 + bx + 6$.

$x_v = 1 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$

$y_v = 5 \Rightarrow 5 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 6 \Rightarrow a + b = -1$

Como $b = -2a$:

$a + (-2a) = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -2$

$g(x) = x^2 - 2x + 6$

25. (0-0) V. Observe que:

$$p(x) = \underbrace{(200 + 4x)}_{\text{número de imóveis alugados}} \cdot \underbrace{(400 - 5x)}_{\text{preço do aluguel}}$$

$p(x) = -20x^2 + 600x + 80000$

(1-1) F. $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-600}{2 \cdot (-20)} = 15$

$p(15) = -20 \cdot 15^2 + 600 \cdot 15 + 80000 = 84500$ reais

(2-2) F. $x_v = 15$ significa que o preço do aluguel é $400 - 5 \cdot 15 = 325$ reais

(3-3) V

(4-4) F. $x_v = 15 \Rightarrow$ número de imóveis alugados é $200 + 4 \cdot 15 = 260$

26. ■ $t = 0$ corresponde a $v = 60$: $60 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 60$

■ $t = 20$ corresponde a $v = 50$: $50 = a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + 60 \Rightarrow 40a + 2b = -1$

■ Se $t = 24$, teríamos $v = 60$: $60 = a \cdot 24^2 + b \cdot 24 + 60 \Rightarrow 24a + b = 0$

$\begin{cases} 40a + 2b = -1 \\ 24a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{8} \text{ e } b = -3$

$V(t) = \frac{1}{8}t^2 - 3t + 60$

a) A abscissa do vértice da parábola é $\frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2 \cdot \frac{1}{8}} = 12$ s.

b) $V(12) = \frac{1}{8} \cdot 12^2 - 3 \cdot 12 + 60$

$V(12) = 42$ litros

27. a) Observe que devemos ter $x \neq -1$.

Temos: $\frac{8x-1}{x+1} = x \Rightarrow x^2 + x = 8x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 7x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$ (2 raízes reais).

b) $mx^2 + mx = 8x - 1 \Rightarrow mx^2 + (m-8)x + 1 = 0$

■ Se $m = 0$, a equação é de 1º grau:

$-8x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{8}$ (uma raiz real) (*)

■ Se $m \neq 0$, a equação é de 2º grau, e devemos impor a condição $\Delta \geq 0$, isto é:

$(m-8)^2 - 4 \cdot m \cdot 1 \geq 0 \Rightarrow m^2 - 20m + 64 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m \leq 4 \text{ ou } m \geq 16$ (**)

Observe, em (*), que $m = 0$ satisfaz (**).

Assim, devemos ter $m \leq 4$ ou $m \geq 16$.

28. a) Desconto de 1 real \Rightarrow lucro por pacote = $2 - 1 = 1$ real e o número de pacotes vendidos por semana = $400 + 400 \cdot 1 = 800$, o que proporciona um lucro de $800 \cdot R\$1,00 = R\$ 800,00$.

b) Desconto de x reais \Rightarrow lucro por pacote = $(2 - x)$ reais e o número de pacotes vendidos na semana = $400 + 400 \cdot x = 400 \cdot (1 + x)$.

Assim, o lucro (L) semanal é:

$400 \cdot (1 + x) \cdot (2 - x) \Rightarrow L(x) = 400 \cdot (-x^2 + x + 2)$

L é máximo se $x = \frac{-b}{2a}$, isto é, $x = \frac{-1 \cdot 400}{2 \cdot (-400)} = \frac{1}{2}$

(desconto de R\$ 0,50 no preço do pacote).

O preço será R\$ 6,00 - R\$ 0,50 = R\$ 5,50.

29. Temos:

$$x_A = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

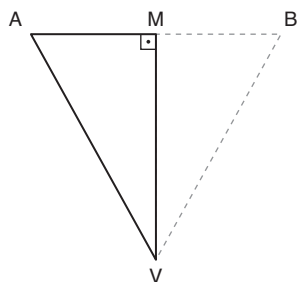
$$x_B = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\blacksquare \text{ A base } (\overline{AB}) \text{ do triângulo mede } x_B - x_A = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) - \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}.$$

Como o $\triangle AVB$ é equilátero, $AV = AB = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$.

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

Lembrando que no triângulo equilátero a altura é também mediana, temos, no $\triangle AMV$:



$$(AV)^2 = (AM)^2 + (MV)^2$$

$$\text{Como } AM = MB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}:$$

$$\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a} \right)^2 \xrightarrow{\Delta > 0}$$

$$\xrightarrow{\Delta > 0} \frac{\Delta}{a^2} = \frac{\Delta}{4a^2} + \frac{\Delta^2}{16a^2} \Rightarrow 16\Delta = 4\Delta + \Delta^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta^2 - 12\Delta = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \Delta = 12$$

30. $\blacksquare x = 3 \text{ e } Q = 7,5 \Rightarrow 7,5 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \quad (1)$

$\blacksquare \text{ Se } x = 4, Q \text{ é máximo} \Rightarrow 4 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow b = -8a \quad (2)$

$\blacksquare x = 8 \text{ e } Q = 0 \Rightarrow 0 = a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c \quad (3)$

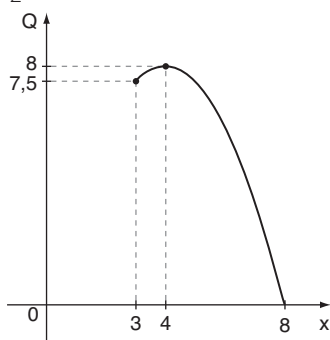
$(2) \text{ em } (1) \Rightarrow 9a + 3 \cdot (-8a) + c = 7,5 \Rightarrow -15a + c = 7,5$

$(2) \text{ em } (3) \Rightarrow 0 = 64a + 8 \cdot (-8a) + c \Rightarrow 0 = c \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

Em (2) vem: $b = -8 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = 4$

$$Q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$$

$$Q(4) = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 = 8$$



(01) F. Se $3 \leq x \leq 4$, isso não ocorre.

(02) V. $Q(5) = -\frac{1}{2} \cdot 25 + 4 \cdot 5 = -12,5 + 20 = 7,5$

(04) V. $\frac{b}{a} = \frac{4}{-\frac{1}{2}} = -8$

(08) V. Veja o gráfico.

(16) F. $Q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$

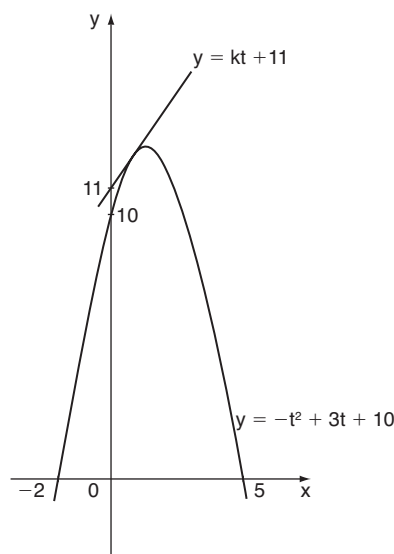
Resposta: (02) + (04) + (08) = 14

31. a) $S_A(t) = S_B(t) \Rightarrow (t, -t^2 + 3t + 10) = (t, 2t + 9) \Rightarrow -t^2 + 3t + 10 = 2t + 9 \Rightarrow t^2 - t - 1 = 0 \xrightarrow{t \geq 0} t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

b) As raízes de $y = -x^2 + 3x + 10$ são -2 e 5 e o gráfico dessa função intercepta o eixo y em $(0, 10)$.

A função dada por $y = kx + 11$ é crescente (pois $k > 0$) e seu gráfico é uma reta que intercepta o eixo y em $(0, 11)$.

Fazendo $S_A(t) = S_C(t)$ vem: $-t^2 + 3t + 10 = kt + 11 \Rightarrow -t^2 + (3-k)t - 1 = 0 \Rightarrow t^2 + (k-3)t + 1 = 0$



O maior valor possível para k corresponde à reta tangente à parábola, e isso ocorre quando $\Delta = 0$ (um único ponto de interseção):

$$(k-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow k = 1 \text{ ou } k = 5$$

Se $k = 1$, obtemos $t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$.

Se $k = 5$, obtemos $t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1$ (não ocorre).

Assim, o maior valor de k é 1.

32. a) $2600 \cdot R\$1,60 = R\$ 4160,00$

b) Como o desconto no preço do litro é de R\$ 0,20, a quantidade de litros vendidos *a mais* é de $20 \cdot 25 = 500 \ell$, totalizando $500 + 2600 = 3100$ litros, o que gera uma receita de $3100 \cdot R\$ 1,40 = R\$ 4340,00$.

c) Seja x o número de descontos de R\$ 0,01. Temos:

$$R(x) = (2600 + 25 \cdot x) \cdot (1,60 - x \cdot 0,01)$$

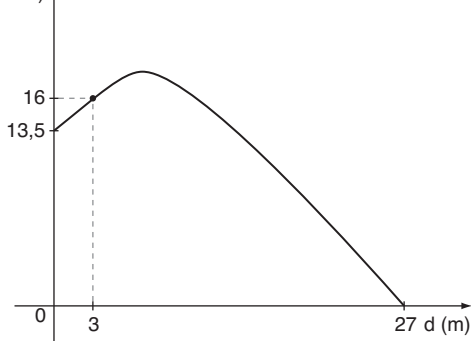
$$R(x) = 4160 - 26x + 40x - 0,25x^2$$

$$R(x) = -0,25x^2 + 14x + 4160$$

$$R \text{ é máximo se } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-14}{2 \cdot (-0,25)} = 28$$

Assim, o preço do litro de leite é R\$ 1,60 - R\$ 0,28 = R\$ 1,32, e a receita obtida é $(2600 + 25 \cdot 28) \cdot \text{R\$ } 1,32 = \text{R\$ } 4356,00$.

33. y (mastro)



Seja $y = ax^2 + bx + 13,5$:

$$x = 3 \text{ e } y = 16 \Rightarrow 16 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 13,5 \Rightarrow$$

$$x = 27 \text{ e } y = 0 \Rightarrow 0 = a \cdot 27^2 + b \cdot 27 + 13,5 \Rightarrow$$

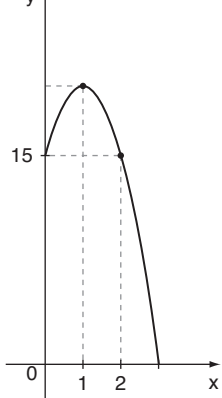
$$\Rightarrow \begin{cases} 9a + 3b = 2,5 \\ 729a + 27b = -13,5 \end{cases} \Rightarrow b = 1 \text{ e } a = -\frac{1}{18}$$

$$y = -\frac{1}{18}x^2 + x + 13,5$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot (-\frac{1}{18})} = 9$$

$$y_v = -\frac{1}{18} \cdot 9^2 + 9 + 13,5 = -4,5 + 9 + 13,5 = 18 \text{ m (altura máxima)}$$

34. y



■ y é máximo se $t = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2(-5)} = 1$.

Se $t = 1$, $y(1) = -5 + 10 + 15 = 20$ (20 m é a altura máxima).

■ $y(t) = 0 \Rightarrow -5t^2 + 10t + 15 = 0 \Rightarrow t = 3$

Daí, $x(3) = 10 \cdot \sqrt{3} \cdot 3 = 30\sqrt{3}$ (alcance de $30\sqrt{3}$ metros).

Testes

2. ■ Como a raiz é dupla, devemos ter $\Delta = 0$, isto é, $b^2 - 4ac = 0$. Logo, a alternativa **b** é correta.

■ Como $x = 1$ é raiz, temos:

$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$. Assim, a alternativa **a** é correta.

■ A soma das raízes é $1 + 1 = \frac{-b}{a} \Rightarrow -b = 2a$ (*) e o produto é $1 \cdot 1 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a$ (**)

Como $a < 0$ (concavidade voltada para baixo), temos, por (*), $b > 0$ e, por (**), $c < 0$. Logo $a \cdot b \cdot c > 0$. A alternativa **d** é correta.

Por fim, como o eixo de simetria da parábola é a reta $x = 1$, temos que $f(0) = f(2) = c$. A alternativa **c** é correta.

Resposta: **e**.

7. $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

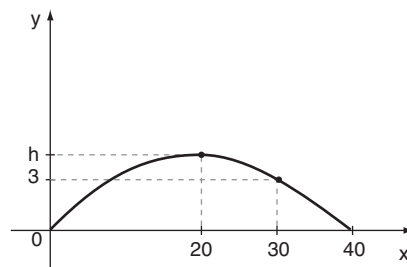
A equação equivale a $1 + \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = x \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 + \frac{x}{x+1} = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 = \frac{x}{x+1} \Rightarrow x^2 - 1 = x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Resposta: **a**.

8. Vamos adotar a posição do jogador ao bater a falta como a origem de um sistema cartesiano, com x e y em metros:



Usando a forma fatorada de f escrevemos:

$$y = a \cdot (x - 0) \cdot (x - 40)$$

Como $(30, 3)$ pertence à parábola, temos:

$$3 = a \cdot 30 \cdot (30 - 40) \Rightarrow -300a = 3 \Rightarrow a = -\frac{1}{100}$$

$$\text{Assim, } y = -\frac{1}{100} \cdot x \cdot (x - 40).$$

$$\text{Quando } x = 20, \text{ temos } h \text{ máximo} = -\frac{1}{100} \cdot 20 \cdot (-20) = 4 \text{ m.}$$

Resposta: **b**.

10. ■ $a > 0$ (concavidade voltada para cima)

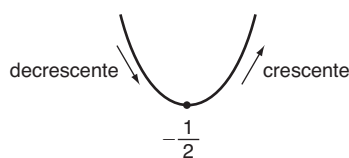
■ $x_v > 0 \Rightarrow \frac{-b}{2a} > 0$; como $a > 0$, devemos ter $-b > 0 \Rightarrow b < 0$

■ $c < 0$ (a ordenada do ponto em que a parábola corta o eixo y é negativa)

Resposta: **a**.

11. a) $F \cdot x = 0 \Rightarrow y = 41$ e 41 é primo.

b) $V \cdot x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2}$



Assim, se $0 \leq x \leq 39$, f é crescente.

c) $F \cdot g(x) = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$. A parábola não corta o eixo x .

d) $F \cdot x_v = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

Resposta: b.

13. Para obter a interseção dos gráficos de f e g , fazemos:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 4 - x^2 = x^2 - 4x + m \Rightarrow 2x^2 - 4x + (m - 4) = 0$$

Como f e g se interceptam em um único ponto, devemos ter $\Delta = 0$, isto é, $(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m - 4) = 0 \Rightarrow m = 6$.

Assim, $2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$, isto é, $k = 1$.

Logo, $m + k = 7$.

Resposta: d.

15. Situação inicial: cada filho recebe $\frac{200\,000}{x}$.

Após a renúncia: cada filho recebe $\frac{200\,000}{x-3}$.

De acordo com o enunciado, temos:

$$\frac{200\,000}{x-3} = \frac{200\,000}{x} + 15\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200\,000x = 200\,000(x-3) + 15\,000x(x-3)$$

$$200x = 200(x-3) + 15x(x-3)$$

$$0 = -600 + 15x^2 - 45x \Rightarrow x^2 - 3x - 40 = 0$$

$$\stackrel{x > 0}{\Rightarrow} x = 8$$

Resposta: a.

16. $400 = 0,4t^2 + 6t \stackrel{t > 0}{\Rightarrow} t = 25$

$$V_m = \frac{400 \text{ m}}{25 \text{ s}} = 16 \text{ m/s}$$

Resposta: a.

17. Temos:

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (8 - m) = 0 \Rightarrow m^2 + 4m - 32 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 4 \text{ ou } m = -8$$

A ordenada do ponto em que a parábola corta o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0 \Rightarrow y = 8 - m = p > 0$

Assim, temos:

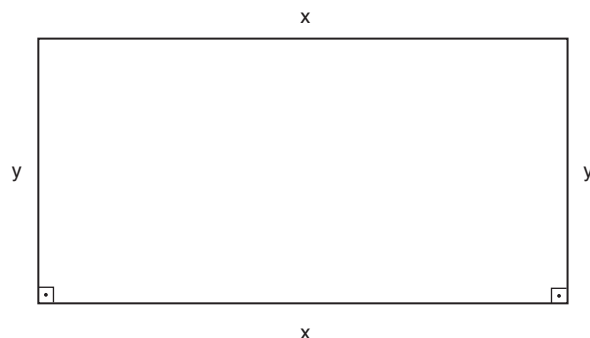
■ Se $m = 4$, $y = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow k = -2$ e

$$p = 8 - 4 = 4 > 0. \text{ Logo, } k + p = -2 + 4 = 2.$$

■ Se $m = -8$, $y = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x = 4$ (não serve, pois a raiz dessa função é negativa, isto é, $k < 0$).

Resposta: b.

18.



$$2x + 2y = 100 \Rightarrow x + y = 50$$

$$\text{A área (A) da base do galpão é } A = x \cdot y = x \cdot (50 - x) = 50x - x^2$$

A área máxima possível é dada por

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-2\,500}{4 \cdot (-1)} = 625$$

Resposta: c.

21. O custo de produção de $800 - 4p$ artigos é igual a $200 + 10 \cdot (800 - 4p) = 8\,200 - 40p$. ($p \leq 200$)

$$\text{A receita obtida é: } p \cdot (800 - 4p) = 800p - 4p^2$$

O lucro (L) é dado pela diferença: $(800p - 4p^2) - (8\,200 - 40p)$, isto é, $L(p) = -4p^2 + 840p - 8\,200$.

L é máximo se $p =$ abscissa do vértice $= \frac{-840}{2 \cdot (-4)}$, isto é, se $p = 105$.

Resposta: b.

22. Salário atual: $380 + \frac{1}{5} \cdot (50 \cdot 0^2 - 50 \cdot 0 + 100) = 400$

Devemos determinar t correspondente a um salário de 600 reais. Descontando a parte fixa, temos $600 - 380 = 220$, que corresponde à quinta parte da produção $p(t)$, isto é, $p(t) = 5 \cdot 220 = 1\,100$.

Assim:

$$1\,100 = 50t^2 - 50t + 100 \Rightarrow t^2 - t - 20 = 0 \stackrel{t > 0}{\Rightarrow} t = 5$$

Resposta: e.

29. Seja n a quantidade de perfumes vendidos em dezembro e p o preço unitário do perfume.

Temos:

$$\begin{cases} n \cdot p = 900 & \textcircled{1} \\ (n + 5) \cdot (p - 10) = 1\,000 \Rightarrow np - 10n + 5p - 50 = 1\,000 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{ em } \textcircled{2} \Rightarrow 900 - 10n + 5p = 1\,050 \Rightarrow p - 2n = 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 2n + 30$$

Em $\textcircled{1}$:

$$n \cdot (2n + 30) = 900 \Rightarrow 2n^2 + 30n - 900 = 0 \stackrel{n \geq 0}{\Rightarrow} n = 15$$

$$\text{e } p = 60 \text{ reais.}$$

Resposta: b.

32. Seja n o número de passagens vendidas, e $n \leq 200$.

O número de lugares vagos é $200 - n$.

A receita arrecadada pela empresa é:

$$R(n) = n \cdot [500 + 10 \cdot (200 - n)]$$

$$R(n) = n \cdot (2500 - 10n) = -10n^2 + 2500n$$

$$R \text{ é máximo se } n = \frac{-b}{2a} = \frac{-2500}{2 \cdot (-10)} = 125.$$

Resposta: b .

33. Temos:

$$2x + y = 80 \Rightarrow y = 80 - 2x \quad (1)$$

A área da pipa é igual à soma das áreas do retângulo e do triângulo, a saber:

$$A = \underbrace{x \cdot \frac{1}{4}y}_{\text{A retângulo}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{3}{4}y}_{\text{A triângulo}}$$

$$A = \frac{xy}{4} + \frac{3xy}{8} = \frac{5xy}{8} \quad (2)$$

Por (1), podemos escrever:

$$A = \frac{5}{8} \cdot x \cdot (80 - 2x) = 50x - \frac{5}{4}x^2$$

$$\begin{aligned} \text{O maior valor possível para } A \text{ ocorre quando } x &= \frac{-b}{2a} = \\ &= \frac{-50}{2 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)} = 20 \Rightarrow y = 40. \end{aligned}$$

$$\text{O maior valor de } A \text{ é, por (2): } \frac{5}{8} \cdot 20 \cdot 40 = 500.$$

Resposta: d .

34. Temos:

$$P = R \cdot i^2 \quad (1)$$

$$\frac{E}{P} = k \quad (2)$$

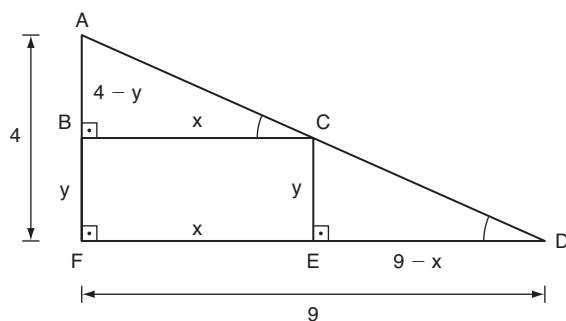
$$(1) \text{ em } (2) \Rightarrow \frac{E}{R \cdot i^2} = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = k \cdot R \cdot i^2$$

Como k é constante e R também é constante (a resistência de um determinado chuveiro é constante), temos que $E = k' \cdot i^2$ e o gráfico que melhor representa $E \times i$ é dado em d .

Resposta: d .

35.



$$\triangle ABC \sim \triangle CED$$

$$\frac{4-y}{y} = \frac{x}{9-x} \Rightarrow \cancel{xy} = 36 - 4x - 9y + \cancel{xy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + 9y = 36 \quad (\div 36)$$

$$\frac{x}{9} + \frac{y}{4} = 1 \quad (*)$$

A área (A) do jardim é $x \cdot y$:

$$A = x \cdot y = x \cdot 4 \left(1 - \frac{x}{9}\right) = 4x - \frac{4x^2}{9}$$

O valor de x que maximiza A é dado por:

$$x = x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)} = \frac{9}{2}$$

$$\text{Por } (*), \text{ obtemos } y = 4 \cdot \left(1 - \frac{\frac{9}{2}}{9}\right) = 2.$$

Resposta: a .

36.

nº de sanduíches	preço do sanduíche
200	3,00
220	2,90
240	2,80
\vdots	\vdots

Considerando x o número de descontos de 0,10, temos que o número de sanduíches vendidos é $200 + 20 \cdot x$, ao preço unitário de $3 - 0,1 \cdot x$. A receita da lanchonete é, nessas condições, $(200 + 20x) \cdot (3 - 0,1x) = 600 + 40x - 2x^2$.

O custo de produção de $200 + 20x$ sanduíches é igual a $1,50 \cdot (200 + 20x) = 300 + 30x$.

$$\text{O lucro é, portanto, } L(x) = (600 + 40x - 2x^2) - (300 + 30x) \Rightarrow L(x) = -2x^2 + 10x + 300.$$

$$L \text{ é máximo se } x = x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2 \cdot (-2)} = 2,5 \text{ (desconto de R\$ 0,25) e, nesse caso, o preço de venda é } 3 - 0,1 \cdot 2,5 = 3 - 0,25 = 2,75.$$

Resposta: c .

37. Sabemos que:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{-a} = -\frac{3}{7}$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{a}{c} = -\frac{3}{18}$$

Dai:

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta = \alpha\beta(\alpha + \beta) - 1 \cdot (\alpha + \beta) = (\alpha\beta - 1) \cdot (\alpha + \beta) = (-6 - 1) \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) = (-7) \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{3}{1}$$

Resposta: b.

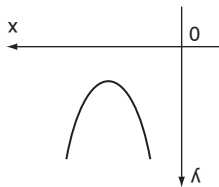
38. O gráfico de f deve ser o representado ao lado.

Isso ocorre quando:

$$\textcircled{1} a > 0 \Rightarrow \mu > 0$$

$$\textcircled{2} \Delta < 0 \Rightarrow 10^2 - 4 \cdot \mu \cdot 5 < 0 \Rightarrow 100 - 20\mu < 0 \Rightarrow \mu > 5$$

Resposta: b.

39. As raízes de $y = -\frac{x^2}{2x} + \frac{5}{2x}$ são $x = 0$ ou $x = 30$ (abscissa do ponto A).Como a abscissa do vértice da outra parábola é $x_v = 35$, concluímos que a outra raiz que essa função possui é $x = 35 + 5 = 40$ (abscissa de B) e a distância pedida é 40 metros.

Resposta: b.

40. Seja ℓ o lado do quadrado e 4ℓ seu perímetro. O lado do hexágono regular é $\frac{6}{C-4\ell}$.A área do quadrado é ℓ^2 ; a do hexágono regular é 6.

$$A \text{ soma das áreas é: } \left(\frac{6}{C-4\ell}\right)^2 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$S(\ell) = \ell^2 + \frac{36}{6} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot (C-4\ell)^2$$

$$S(\ell) = \ell^2 + \frac{24}{\sqrt{3}} \cdot (C^2 - 8C\ell + 16\ell^2)$$

$$S(\ell) = \ell^2 \cdot \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) - \frac{3}{\sqrt{3}} \ell \cdot C + \frac{24}{\sqrt{3}} C^2$$

$$S \text{ é mínimo se } \ell = \frac{-b}{-2a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} C}{2 \cdot \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)} = C \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{6 + 4\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= C \cdot \frac{\sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}} \cdot \frac{6 - 4\sqrt{3}}{6 - 4\sqrt{3}} = C \cdot \frac{6\sqrt{3} - 12}{36 - 48} = C \cdot \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\text{O perímetro do hexágono é } 6 \cdot \left(\frac{C - 4\ell}{6}\right) =$$

$$= C - 4 \cdot C \cdot \frac{(2 - \sqrt{3})}{2} = (2\sqrt{3} - 3) \cdot C$$

Resposta: a.

41. Observando que a parábola tangencia o eixo x , podemos concluir que ela admite uma única raiz real, isto é, $\Delta = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (-6)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot C = 0 \Rightarrow C = 6.$$

Resposta: e.

Capítulo 6 Função modular

Exercícios

1. a) -1 b) -1 c) -1 d) 1 e) 1

$$2. \text{ a) } 1 \geq 0; f(1) = -2 \cdot 1 + 3 = 1$$

$$\text{ b) } -1 < 0; f(-1) = 4 \cdot (-1)^2 - (-1) + 5 =$$

$$= 4 + 1 + 5 = 10$$

$$\text{ c) } 3 \geq 0; f(3) = -2 \cdot 3 + 3 = -3$$

$$= -3 < 0; f(-3) =$$

$$= 4 \cdot (-3)^2 - (-3) + 5 = 44$$

$$\begin{cases} -6 + 3 = -3 \\ -6 + 3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 + 44 = 41 \end{cases}$$

$$3. \text{ a) } -3 < -2; f(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$$

$$-2 \leq 0 < 1; f(0) = 0 + 3 = 3$$

$$\sqrt{3} > 1; f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 5 = -2$$

$$\begin{cases} -2 \leq -1 < 1; f(-1) = -1 + 3 = 2 \\ -2 - 2 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leq -2 < 1; f(-2) = -2 + 3 = 1 \\ 2 \geq 1; f(2) = 2^2 - 5 = -1 \end{cases} \Rightarrow 1 \cdot (-1) = -1$$

4. a) Se $x < 1$, $f(x) = 0$ equivale a:

$$-2x - 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} < 1$$

$$\text{ Se } x \geq 1, f(x) = 0 \text{ equivale a:}$$

$$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \geq 1$$

b) Se $x < 1$, $f(x) = -3$ equivale a:

$$-2x - 5 = 3 \Rightarrow x = -1 < 1$$

Se $x \geq 1$, $f(x) = -3$ equivale a:

$$2x - 3 = -3 \Rightarrow x = 0 < 1$$

Logo, $x = 0$ não pode ser aceito.5. a) irmão A: $4 \cdot 90 = 360$ reais

$$\text{ irmão B: } 4 \cdot 90 + 5(90 - 15) = 735 \text{ reais}$$

$$\text{ irmão C: } 4 \cdot 90 + 8(90 - 15) = 960 \text{ reais}$$

$$\text{ b) irmão A: } \frac{4}{360} = 90 \text{ reais}$$

$$\text{ irmão B: } \frac{9}{735} \approx 81,6 \text{ reais}$$

$$\text{ irmão C: } \frac{12}{960} = 80 \text{ reais}$$

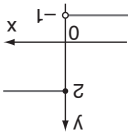
c) Se $x \leq 4$, o valor a ser pago é 90x.Se $x > 4$, os quatro meses iniciais custam $4 \cdot 90 = 360$ e os $(x - 4)$ meses excedentes custam:

$$(x - 4) \cdot (90 - 15) = 75x - 300$$

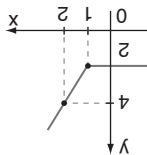
O gasto total nesse caso é:

l. R. de Joice: $0,225 \cdot 3600 - 602,96 = 810,00 - 602,96 = 207,04$ (reais)
 Valor líquido = $3600 - 207,04 = 3392,96$ (reais)
 A opção que Joice defende está equivocada.

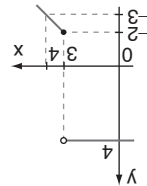
10. a) $\text{Im} = \{-1, 2\}$



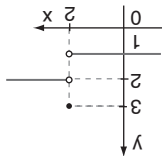
b) $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$



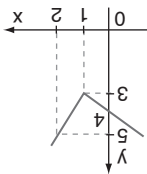
c) $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 4 \text{ ou } y \leq -2\}$



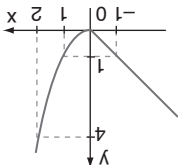
11. a) $\text{Im} = \{1, 2, 3\}$



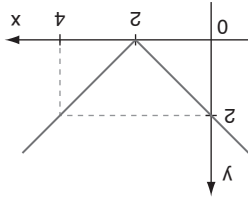
b) $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\}$



c) $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$



12. a)



$$360 + 75x - 300 = 75x + 60$$

Então:

$$y = \begin{cases} 90x; & \text{se } x \leq 4 \\ 75x + 60; & \text{se } 4 < x \leq 12 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{N})$$

6. a) R\$ 80,00 por 150 minutos.

Por 300 minutos, o gasto será: $80 + 100 \cdot 1,2 = 200$

reais.

$$b) y = \begin{cases} 80; & \text{se } 0 < x \leq 200 \\ 80 + (x - 200) \cdot 1,2; & \text{se } x > 200 \end{cases}$$

ou

$$y = \begin{cases} 80; & \text{se } 0 < x \leq 200 \\ 1,2x - 160; & \text{se } x > 200 \end{cases}$$

7. a) $0,1 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow f(0,1) = \frac{0,1}{1} = 10$

$$b) \frac{\sqrt{5}}{1} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{5}}{1}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{1}\right) = \frac{5}{1}$$

$$c) 0,6 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(0,6) = f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{f\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$d) \begin{cases} f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2 \\ f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^2 = 2 \end{cases} \text{ a soma é } 4$$

$$e) \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36} = 6 \in \mathbb{Q}$$

$$f(6) = \frac{6}{1}$$

$$f) \begin{cases} f(\sqrt{12}) = (\sqrt{12})^2 = 12 \\ f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3 \end{cases} \text{ o produto é } 36$$

8. a) $100 \cdot 0,10 + 30 \cdot 0,07 = 10 + 2,10 = 12,10$ (reais)

$$b) p(x) = \begin{cases} 0,1x; & \text{se } 0 < x \leq 100 \\ 100 \cdot 0,1 + (x - 100) \cdot 0,07 = 3 + 0,07x; & \text{se } x > 100 \end{cases}$$

c) parte (a) $130 \cdot 0,07 = 9,10$ (reais)

$$\text{parte (b)} p(x) = \begin{cases} 0,1x; & \text{se } 0 < x \leq 100 \\ 0,07x; & \text{se } x > 100 \end{cases}$$

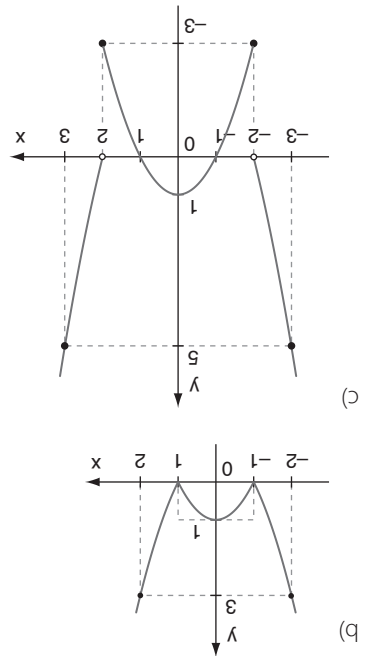
9. a) $3000 \rightarrow 0,15 \cdot 3000 - 335,03 = 450 - 335,03 = 114,97$ (reais)

$$5500 \rightarrow 0,275 \cdot 5500 - 826,15 = 1512,50 - 826,15 = 686,35 \text{ (reais)}$$

$$10000 \rightarrow 0,275 \cdot 10000 - 826,15 = 2750 - 826,15 = 1923,85 \text{ (reais)}$$

$$b) \text{I. R. de Júlia: } 0,15 \cdot 3500 - 335,03 = 525,00 - 335,03 = 189,97 \text{ (reais)}$$

$$\text{Valor líquido} = 3500 - 189,97 = 3310,03 \text{ (reais)}$$



$$13. a) y = \begin{cases} 3, & \text{se } x \geq -1 \\ -2, & \text{se } x < -1 \end{cases} \quad b) y = \begin{cases} 3x, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

No item b, observe que a reta correspondente a $x \geq 0$ passa por $(0, 0)$ e $(1, 3)$ e sua lei é $y = 3x$ (função linear).

14. a) Se $x < 1$, a função é de 1° grau e a reta passa por $(0, 4)$ e $(-1, 6)$.

$$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 4 = a \cdot 0 + b \\ 6 = a \cdot (-1) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = b \\ 6 = -a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow y = -2x + 4$$

Se $x \geq 1$, a função é de 1° grau e a reta passa por $(1, 2)$ e $(2, 3)$.

$$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 2 = a \cdot 1 + b \\ 3 = a \cdot 2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = a + b \\ 3 = 2a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = x + 1$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq 1 \\ -2x + 4, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$b) \text{ Se } x \leq 1, f(x) = 5 \text{ equivale a } -2x + 4 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} \leq 1$$

$$\text{Se } x \geq 1, f(x) = 5 \text{ equivale a } x + 1 = 5 \Rightarrow x = 4 \geq 1.$$

$$S = \left\{4, -\frac{1}{2}\right\}$$

c) Geometricamente, é preciso determinar k de modo que o gráfico de f intercepte a reta horizontal que passa por $(0, k)$, que é o gráfico da função constante $y = k$.

Como $\text{Im}(f) = [2, +\infty)$, k deve ser, no mínimo, igual a 2, isto é, $k \geq 2$.

$$15. a) f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3$$

$$f(-3) = -3$$

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$$

$$\text{Dai: } \frac{3 + (-3)}{3 + (-1)} = 0$$

$$b) \text{ Se } x \geq 0, \text{ temos:}$$

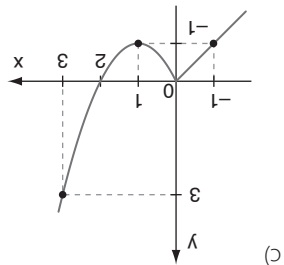
$$x^2 - 2x = 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x = 4 \text{ ou } x = -2 \text{ (não serve)}$$

$$\text{Se } x < 0, \text{ temos}$$

$$x = 8 \text{ (não serve)}$$

$$S = \{4\}$$



$$16. a) 9 \quad b) \frac{3}{5} \quad c) \frac{2}{1} \quad d) \frac{2}{5}$$

$$e) \sqrt{2} \quad f) 0,83 \quad g) \frac{9}{2}$$

$$h) 8 \quad i) \frac{9}{2}$$

$$f) \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}$$

$$g) -\sqrt{7}$$

$$h) 8$$

$$i) 8$$

$$e) \left| -\frac{5}{2} \right| = \frac{5}{2}$$

$$d) |-0,2| = 0,2$$

$$c) |0,2| = 0,2$$

$$b) |-6| = 6$$

$$17. a) |-13| = 13$$

$$18. a) \begin{cases} 3 - \sqrt{5} & \text{positivo} \\ \sqrt{5} - 3 & \text{negativo} \end{cases} = 3 - \sqrt{5}$$

$$\begin{cases} \sqrt{5} - 3 & \text{positivo} \\ -\sqrt{5} + 3 & \text{negativo} \end{cases} = -\sqrt{5} + 3$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 1 & \text{negativo} \\ 1 - \sqrt{2} & \text{negativo} \end{cases} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 1 & \text{negativo} \\ 1 - \sqrt{2} & \text{negativo} \end{cases} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 1 & \text{negativo} \\ 1 - \sqrt{2} & \text{negativo} \end{cases} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 1 & \text{negativo} \\ 1 - \sqrt{2} & \text{negativo} \end{cases} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 1 & \text{negativo} \\ 1 - \sqrt{2} & \text{negativo} \end{cases} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 1 & \text{negativo} \\ 1 - \sqrt{2} & \text{negativo} \end{cases} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 1 & \text{negativo} \\ 1 - \sqrt{2} & \text{negativo} \end{cases} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 1 & \text{negativo} \\ 1 - \sqrt{2} & \text{negativo} \end{cases} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 1 & \text{negativo} \\ 1 - \sqrt{2} & \text{negativo} \end{cases} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 1 & \text{negativo} \\ 1 - \sqrt{2} & \text{negativo} \end{cases} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 1 & \text{negativo} \\ 1 - \sqrt{2} & \text{negativo} \end{cases} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 1 & \text{negativo} \\ 1 - \sqrt{2} & \text{negativo} \end{cases} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 1 & \text{negativo} \\ 1 - \sqrt{2} & \text{negativo} \end{cases} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 1 & \text{negativo} \\ 1 - \sqrt{2} & \text{negativo} \end{cases} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 1 & \text{negativo} \\ 1 - \sqrt{2} & \text{negativo} \end{cases} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 1 & \text{negativo} \\ 1 - \sqrt{2} & \text{negativo} \end{cases} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 1 & \text{negativo} \\ 1 - \sqrt{2} & \text{negativo} \end{cases} = 1 - \sqrt{2}$$

20. Se $x > 4$ temos: $\underbrace{|x-4|}_{\text{positivo}} = x-4$ e $\underbrace{|x|}_{\text{positivo}} = x$

a) $\frac{x-4}{4-x} = -1$

b) $3 + \frac{x-4}{x-4} = 3 + 1 = 4$

c) $\frac{x}{x} + \frac{x-4}{x-4} = 1 + 1 = 2$

21. a) F; $|x+3| = x+3$ para $x \geq -3$

b) V

c) V; $|5x-1| = -(5x-1) = 1-5x$ se $5x-1 < 0$, isto é,
se $x < \frac{1}{5}$

d) F; $|x| \geq 5 \Rightarrow x \leq -5$ ou $x \geq 5$

e) F; tome $x = -2 \Rightarrow |-2|^3 = 2^3 = 8 \neq (-2)^3 = -8$

f) F; $|x| < 4 \Rightarrow -4 < x < 4$

g) V

22. (I) é falsa; considere, por exemplo:

se $x = -5$ e $y = 4$, temos: $|-5| + |4| = 9$ e $|-5+4| = |-1| = 1$

(II) é falso; considere, por exemplo:

se $x = -5$ e $y = 4$, temos: $|-5| - |4| = 1$ e $|-5-4| = |-9| = 9$

(III) é verdadeiro.

Demonstração:

1º modo:

■ Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$; $x \cdot y \geq 0$

$$|x| \cdot |y| = x \cdot y$$

$$\underbrace{|x \cdot y|}_{>0} = x \cdot y$$

■ Se $x < 0$ e $y < 0$; $x \cdot y > 0$

$$|x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y) = x \cdot y = |x \cdot y|$$

■ Se $x \geq 0$ e $y < 0$; $x \cdot y \leq 0$

$$|x| \cdot |y| = x \cdot (-y) = -x \cdot y$$

$$\underbrace{|x \cdot y|}_{<0} = -x \cdot y$$

■ Se $x < 0$ e $y \geq 0$; $x \cdot y \leq 0$

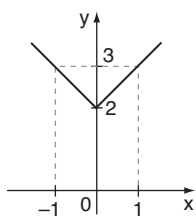
$$|x| \cdot |y| = (-x) \cdot y = -x \cdot y$$

$$\underbrace{|x \cdot y|}_{<0} = -x \cdot y$$

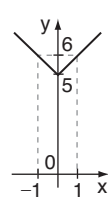
2º modo:

$$|x| \cdot |y| = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = \sqrt{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{(xy)^2} = |x \cdot y|$$

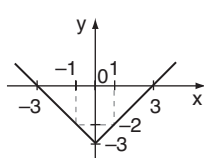
23. a)



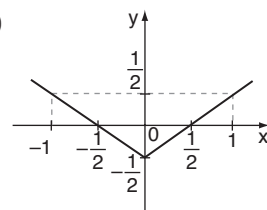
c)



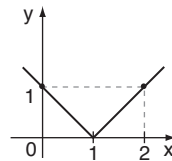
b)



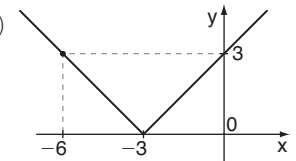
d)



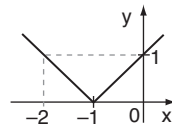
24. a)



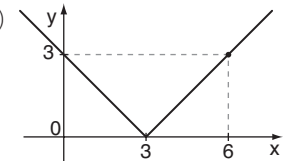
c)



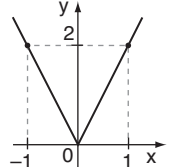
b)



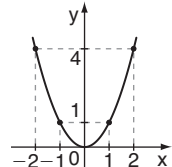
d)



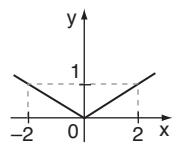
25. a)



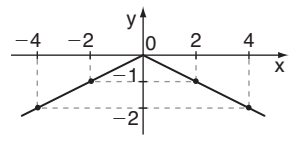
c)



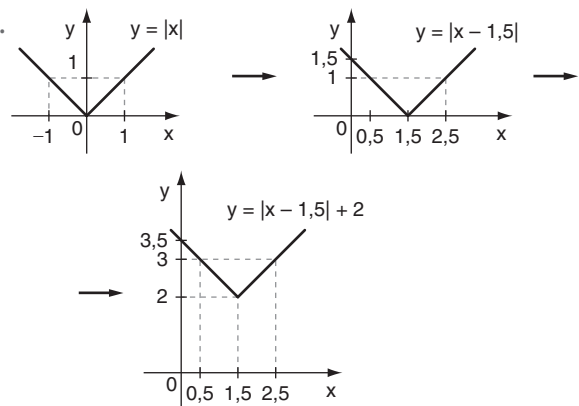
b)



d)



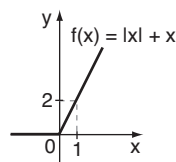
26.



27. a)

Se $x \geq 0$, $|x| = x$ e $y = x + x = 2x$

Se $x < 0$, $|x| = -x$ e $y = -x + x = 0$

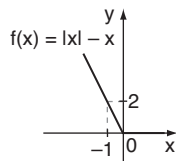


$\text{Im} = \mathbb{R}_+$

b)

Se $x \geq 0$, $|x| = x$ e $y = x - x = 0$

Se $x < 0$, $|x| = -x$ e $y = -x - x = -2x$



$\text{Im} = \mathbb{R}_+$

c)

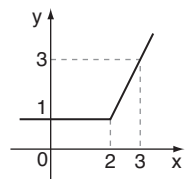
Se $x \geq 2$, $|x-2| = x-2$

$y = x-2 + x-1 = 2x-3$

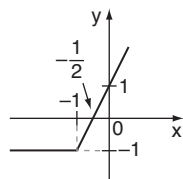
Se $x < 2$, $|x-2| = -x+2$

$y = -x+2 + x-1 = 1$

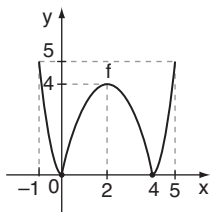
$\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$



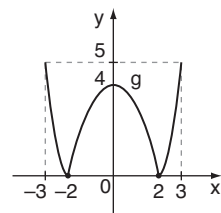
d) Se $x \geq -1$, $|x + 1| = x + 1$
 $y = x + 1 + x = 2x + 1$
 Se $x < -1$, $|x + 1| = -x - 1$
 $y = -x - 1 + x = -1$
 $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$



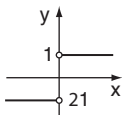
28. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x; & \text{se } x^2 - 4x \geq 0, \\ \text{isto é, se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 4 \\ -x^2 + 4x; & \text{se } x^2 - 4x < 0, \\ \text{isto é, se } 0 < x < 4 \end{cases}$



$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 4; & \text{se } -x^2 + 4 \geq 0, \\ \text{isto é, se } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4; & \text{se } -x^2 + 4 < 0, \\ \text{isto é, se } x < -2 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$



Se $x > 0$, $|x| = x$ e $y = 1$
 Se $x < 0$, $|x| = -x$ e $y = -1$



29. a) $f(0) = |-4| + 3 = 7$
 $f(1) = |-2| + 3 = 5$

A soma pedida é 12.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, |2x - 4| \geq 0$

$|2x - 4| + 3 \geq 0 + 3$, isto é, $y \geq 3$

$\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\}$

30. a) $S = \{-4, 4\}$

d) $S = \emptyset$

b) $S = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

e) $S = \emptyset$

c) $S = \{0\}$

f) $S = \{-3, 3\}$

31. a) $3x - 2 = 1$ ou $3x - 2 = -1$

\Downarrow

$x = 1$

\Downarrow

$x = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \left\{1, \frac{1}{3}\right\}$

b) $x + 6 = 4$ ou $x + 6 = -4$

\Downarrow

$x = -2$

\Downarrow

$x = -10; S = \{-2, -10\}$

c) $x^2 - 2x - 5 = 3$ ou $x^2 - 2x - 5 = -3$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$x^2 - 2x - 2 = 0$

\Downarrow

$x = -2$ ou

$x = 1 - \sqrt{3}$ ou

$x = 4$

$x = 1 + \sqrt{3}$

$S = \{-2, 4, 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$

d) $x^2 - 4 = 5$ ou $x^2 - 4 = -5$

$x^2 = 9$

$x^2 = -1$

\Downarrow

$x = \pm 3$

\Downarrow

$x \notin \mathbb{R}; S = \{-3, 3\}$

32. a) Devemos ter $x \geq 0$ (*)

$-2x + 5 = x$ ou $-2x + 5 = -x$

$-3x = -5$

$5 = x$, satisfaz (*)

$x = \frac{5}{3}$, satisfaz (*)

$S = \left\{\frac{5}{3}, 5\right\}$

b) Devemos ter $x \geq -2$ (*)

$3x - 1 = x + 2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, satisfaz (*)

$3x - 1 = -x - 2 \Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$, satisfaz (*)

$S = \left\{\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right\}$

c) Devemos ter $2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$ (*)

$10 - 2x = 2x - 5 \Rightarrow -4x = -15 \Rightarrow x = \frac{15}{4}$, satisfaz (*)

$10 - 2x = -2x + 5 \Rightarrow 0 \cdot x = -5 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$ que satisfaz (*);

$S = \left\{\frac{15}{4}\right\}$

d) Devemos ter $x^2 \geq 0$, que é satisfeito para $\forall x \in \mathbb{R}$

$3x - 4 = x^2 \Rightarrow x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$

$3x - 4 = -x^2 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -4$;

$S = \{1, -4\}$

e) Uma solução alternativa às apresentadas nos itens anteriores é notar que, se $|2x - 1| = 2x - 1$, então, obrigatoriamente,

$2x - 1 \geq 0$, isto é, $x \geq \frac{1}{2}$; $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{2}\right\}$.

f) $|x - 3| = 3 - x$ (oposto de $x - 3$), quando $x - 3 \leq 0$, isto é, $x \leq 3$; $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$.

33. a) Façamos $|x| = y \Rightarrow y^2 - 3y - 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 5$ ou $y = -2$

$|x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5$

$|x| = -2 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

b) Façamos $|x| = y \Rightarrow y^2 - 10y + 24 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 6$ ou $y = 4$

$|x| = 6 \Rightarrow x = \pm 6$

$|x| = 4 \Rightarrow x = \pm 4$

$S = \{-4, -6, 4, 6\}$

34. Devemos ter $p - 3 \geq 0 \Leftrightarrow p \geq 3$

$\{p \in \mathbb{R} \mid p \geq 3\}$

35. a) $n(2) = 20|-23| + 300 = 760$

b) $x = ? \Leftrightarrow n(x) = 400$

Temos:

$400 = 20 \cdot |x - 25| + 300$

$100 = 20|x - 25| \Rightarrow |x - 25| = 5$, em que

$\begin{cases} x - 25 = 5 \Rightarrow x = 30 \text{ (dia 30)} \text{ ou} \\ x - 25 = -5 \Rightarrow x = 20 \text{ (dia 20)} \end{cases}$

c) $n(x)$ é mínimo se $|x - 25| = 0$, isto é, $x = 25$ (dia 25).

Nesse caso, $n(x)_{\min} = 20 \cdot 0 + 300 = 300$ pessoas.

36. a) $\|2x - 1| - 5| = 0 \Rightarrow |2x - 1| - 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |2x - 1| = 5 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -2$

$S = \{3, -2\}$

37. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } x > 6\}$
 b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 4\}$
 c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{7}{1} < x < \frac{2}{1}\right\}$
 d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\sqrt{2} \text{ ou } x \geq \sqrt{2}\}$
 e) Como $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$, a inequação $|x| > -2$ é satisfeita para todo $x \in \mathbb{R}, S = \mathbb{R}$.
 f) $|x| \leq -2 \Rightarrow \emptyset$, que satisfaz; $S = \emptyset$.
 g) $|x| \leq 0$ só ocorre quando $|x| = 0$, isto é, $x = 0$; $S = \{0\}$.
 h) $|x| \geq 0$ é sempre satisfeita, $\forall x \in \mathbb{R}, S = \mathbb{R}$.

38. a) $x + 3 < -7$ ou $x + 3 > 7$
 $\uparrow \uparrow$
 $x < -10$ ou $x > 4$
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -10 \text{ ou } x > 4\}$
 b) $-3 \leq 2x - 1 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2$.
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$
 c) $-x + 1 \leq -1$
 $2 \leq x$, isto é, $x \geq 2$
 ou
 $-x + 1 \geq 1$
 $0 \geq x$, isto é, $x \leq 0$
 $\Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$
 d) $-12 < 5x - 3 < 12 \Rightarrow -9 < 5x < 15 \Rightarrow$
 $\Rightarrow -\frac{9}{5} < x < 3 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{9}{5} < x < 3\right\}$

39. a) De $|x^2 - x - 4| \leq 2$ vem:
 $-2 \leq x^2 - x - 4 \leq 2$, que equivale ao sistema:
 $\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 & \textcircled{1} \\ x^2 - x - 6 \leq 0 & \textcircled{2} \end{cases}$
 De $\textcircled{1}$ vem: $x \leq -1$ ou $x \geq 2$ $\textcircled{3}$
 De $\textcircled{2}$ vem: $-2 \leq x \leq 3$ $\textcircled{4}$
 Da interseção de $\textcircled{3}$ e $\textcircled{4}$ obtemos:
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq -1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$
 b) De $|x^2 - 5x| > 6$ vem:
 $x^2 - 5x < -6$ $\textcircled{1}$ ou $x^2 - 5x > 6$ $\textcircled{2}$
 $\uparrow \uparrow$
 $x^2 - 5x + 6 < 0$ ou $x^2 - 5x - 6 > 0$
 $\uparrow \uparrow$
 $2 < x < 3$ ou $x < -1$ ou $x > 6$
 Donde segue a solução:
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 2 < x < 3 \text{ ou } x > 6\}$
 c) $|x^2 - 1| < 4 \Rightarrow -4 < x^2 - 1 < 4 \Rightarrow -3 < x^2 < 5$
 $\textcircled{1} -3 < x^2 \Rightarrow x^2 > -3$ é satisfeita para todo $x \in \mathbb{R}$, pois $x^2 \geq 0$.
 $\textcircled{2} x^2 < 5 \Rightarrow x^2 - 5 < 0 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$
 $\textcircled{1} \cap \textcircled{2} \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\}$
 40. a) $f(x) > 5 \Rightarrow 3 + \frac{|x-6|}{2} > 5$
 $\frac{|x-6|}{2} > 2 \Rightarrow |x-6| > 4$
 $(x-6 < -4 \text{ ou } x-6 > 4)$
 $(x < 2 \text{ ou } x > 10)$. Assim, os meses são: janeiro ($x = 1$), novembro ($x = 11$) e dezembro ($x = 12$).
 b) $f(x)$ é mínimo quando $|x - 6| = 0$, isto é, quando $x = 6$ (junho).
 Nesse caso, a nota mínima é: $3 + \frac{2}{0} = 3$.
 41. a) 1º caso: $x \geq 1$ $\textcircled{1}$
 Temos:
 $x - 1 \leq 3x - 7$
 $6 \leq 2x$
 $x \geq 3$ $\textcircled{2}$
 $\textcircled{1} \cap \textcircled{2} \Rightarrow x \geq 3$ (*)
 2º caso: $x < 1$ $\textcircled{3}$
 Temos:
 $-x + 1 \leq 3x - 7$
 $8 \leq 4x$
 $2 \leq x$ $\textcircled{4}$
 $\textcircled{3} \cap \textcircled{4} \Rightarrow \emptyset$ (**)
 De (*) \cup (**) vem $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$
 b) 1º caso: $x \geq -\frac{1}{2}$ $\textcircled{1}$
 Temos:
 $2x + 1 + 4 - 3x > 0$
 $-x + 5 > 0 \Rightarrow x < 5$ $\textcircled{2}$
 $\textcircled{1} \cap \textcircled{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 5$ (*)
 2º caso: $x < -\frac{1}{2}$

$$2^\circ \text{ caso: } x < -\frac{1}{2} \quad (3)$$

Temos:

$$-2x - 1 + 4 - 3x > 0$$

$$-5x + 3 > 0 \Rightarrow x < \frac{3}{5} \quad (4)$$

$$(3) \cap (4) \quad x < -\frac{1}{2} \quad (**)$$

De (*) \cup (**) obtemos $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

c) $1^\circ \text{ caso: } x \geq 0 \quad (1)$

Temos:

$$x^2 \leq x \Rightarrow x^2 - x \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \quad (*)$$

$$2^\circ \text{ caso: } x < 0 \quad (3)$$

Temos:

$$x^2 \leq -x \Rightarrow x^2 + x \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 0 \quad (4)$$

$$(3) \cap (4) \Rightarrow -1 \leq x < 0 \quad (**)$$

Da união entre (*) e (**) obtemos

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$$

42. a) Devemos ter:

$$|x| - 2 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 2 \Rightarrow x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\}$$

b) Devemos ter:

$$|x - 1| \geq 0;$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \geq 0$. Logo $D = \mathbb{R}$.

Desafio

Na situação descrita, temos a proporção de um gato para cada rato. Desse modo, cada gato come, separadamente, seu respectivo rato em 3 minutos.

Exercícios complementares

1. Sabemos que:

$$|x| = \begin{cases} x; & \text{se } x \geq 0 \\ -x; & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{se } x - 2 \geq 0, \text{ isto é, se } x \geq 2 \\ -x + 2, & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Consideremos, desse modo, três intervalos ($x < 0$, $0 \leq x < 2$ e $x \geq 2$); para cada um deles representamos, no esquema abaixo, o valor dos módulos envolvidos:

$ x $	$\xrightarrow{\quad 0 \quad}$	$\xrightarrow{\quad 2 \quad}$	$\xrightarrow{\quad}$
$-x$	x	x	x
$ x - 2 $	$-x + 2$	$-x + 2$	$x - 2$

1° caso: Se $x < 0$, a equação dada equivale a:

$$-x + (-x + 2) = 6 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = -2 \text{ (serve, pois } -2 < 0)$$

2° caso: Se $0 \leq x < 2$, a equação dada equivale a:

$$x + (-x + 2) = 6 \Rightarrow 2 = 6 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}, \text{ que satisfaz a equação.}$$

3° caso: Se $x \geq 2$, a equação dada equivale a:

$$x + (x - 2) = 6 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \text{ (serve, pois } 4 \geq 2)$$

Resumindo os três casos, obtemos: $S = \{-2, 4\}$

2. Inicialmente, observamos que devemos ter $x \neq 0$ e $x \neq 1$:

$ x $	$\xrightarrow{\quad 0 \quad}$	$\xrightarrow{\quad 1 \quad}$	$\xrightarrow{\quad}$
$-x$	x	x	x
$ x - 1 $	$-x + 1$	$-x + 1$	$x - 1$

$1^\circ \text{ caso: } x < 0$

$$\frac{-x}{x} = \frac{-x + 1}{x - 1}$$

$$-1 = -1 \quad (V)$$

$$S_1: x < 0$$

$2^\circ \text{ caso: } 0 < x < 1$

$$\frac{x}{x} = \frac{-x + 1}{x - 1}$$

$$1 = -1 \quad (F)$$

$$S_2 = \emptyset$$

$3^\circ \text{ caso: } x > 1$

$$\frac{x}{x} = \frac{x - 1}{x - 1}$$

$$1 = 1 \quad (V)$$

$$S_3: x > 1$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 1\}$$

$$3. \left| 2 - \frac{3}{x} \right| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2 - \frac{3}{x} \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 \leq -\frac{3}{x} \leq 0 \Rightarrow 4 \geq \underbrace{\frac{3}{x}}_{\textcircled{1}} \geq 0$$

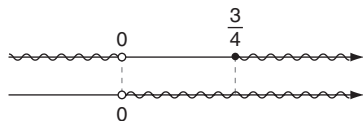
$$\textcircled{1}: 4 \geq \frac{3}{x} \Rightarrow 4 - \frac{3}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{\overbrace{4x-3}^{y_1}}{\underbrace{x}_{y_2}} \geq 0$$

$y_1:$	$\xrightarrow{\quad 3/4 \quad}$	$\xrightarrow{\quad}$
$-$	$+$	$+$
$y_2:$	$\xrightarrow{\quad 0 \quad}$	$\xrightarrow{\quad 3/4 \quad}$
$-$	$-$	$+$
y_1	$-$	$+$
y_2	$+$	$+$
y_1	$+$	$+$
y_2	$-$	$+$

$$\text{Então, } x < 0 \text{ ou } x \geq \frac{3}{4} \quad \textcircled{4}$$

$\textcircled{2}: \frac{3}{x} \geq 0$; como o numerador é positivo, o denominador deve ser positivo a fim de que o quociente resulte em positivo, isto é, $x > 0$. $\textcircled{5}$

Fazendo ④ \cap ⑤, obtemos:



$$\Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{4}\}; \text{ o menor inteiro que satisfaz é } x = 1.$$

4. a) 350 g: $1,5 \cdot 3,50 = 5,25$ (reais)
720 g: $1,00 \cdot 7,20 = 7,20$ (reais)

b) Sejam x e $x + 250$ as massas em gramas consumidas por Macabéa e Raimundo, respectivamente. Note que Macabéa comeu menos de 600 g e Raimundo, mais que 600 g. Temos:

$$\text{Valor pago por Macabéa: } \frac{1,5 \cdot x}{100} (*)$$

$$\text{Valor pago por Raimundo: } \frac{1,0 \cdot (x + 250)}{100}$$

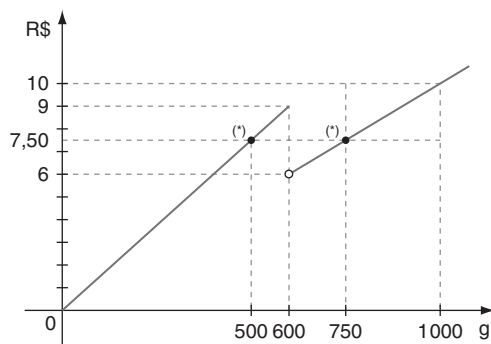
Daí:

$$\frac{1,5 \cdot x}{100} = \frac{1,0 \cdot (x + 250)}{100} \Rightarrow 0,5x = 250 \Rightarrow x = 500 \text{ g}$$

$$\text{Em } (*), \frac{1,5 \cdot 500}{100} = 7,50 \text{ (reais).}$$

c) Note que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1,5 \cdot x}{100}, & \text{se } x \leq 600 \\ \frac{1,0 \cdot x}{100}, & \text{se } x > 600 \end{cases}$$



5. a) Devemos ter: $|x - 2| > 0 \Rightarrow x \neq 2$, pois para todo $x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| \geq 0$; $D = \mathbb{R} - \{2\}$

b) Devemos ter:

$$① \quad x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

$$\begin{aligned} ② \quad |2x - 1| - 3 \neq 0 &\Rightarrow |2x - 1| \neq 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (2x - 1 \neq 3 \text{ e } 2x - 1 \neq -3) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x \neq 2 \text{ e } x \neq -1) \end{aligned}$$

$$① \cap ② \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1 \text{ e } x \neq 2\}$$

c) Devemos ter:

$$|5 - 2x| - 7 \geq 0$$

$$|5 - 2x| \geq 7 \Rightarrow (5 - 2x \geq 7 \text{ ou } 5 - 2x \leq -7) \Rightarrow (-2 \geq 2x \text{ ou } 12 \leq 2x) \Rightarrow x \leq -1 \text{ ou } x \geq 6$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 6\}$$

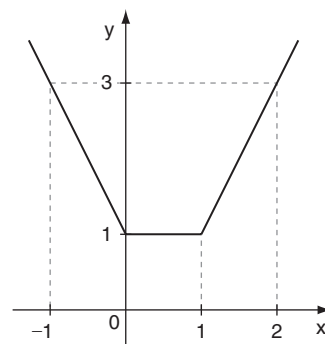
$$6. \text{ Como } |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{e } |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \geq 1 \\ -x + 1, & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

vamos considerar três intervalos: $x \leq 0$, $0 \leq x \leq 1$ e $x \geq 1$.

	0	1
$ x $	$-x$	x
$ x - 1 $	$-x + 1$	$x - 1$
$f(x) = x + x - 1 $	$-2x + 1$	$2x - 1$

$$\text{Logo, a lei que define } f \text{ é: } \begin{cases} -2x + 1, & \text{se } x \leq 0 \\ 1, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



$$\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$$

$$7. \text{ a) } f\left(\frac{1}{2}\right) = ||1 - 2| - 4| = |-1| - 4 = |-3| = 3$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = |-1 - 2| - 4 = |-3| - 4 = |-1| = 1$$

$$\text{Assim, } f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$$

$$\text{b) } ||2x - 2| - 4| = 0 \Rightarrow |2x - 2| - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |2x - 2| = 4;$$

$$\text{daí: } (2x - 2 = 4 \text{ ou } 2x - 2 = -4)$$

$$\Rightarrow (2x = 6 \text{ ou } 2x = -2) \Rightarrow (x = 3 \text{ ou } x = -1)$$

c) Inicialmente construímos o gráfico de $g(x) = |2x - 2| - 4$.

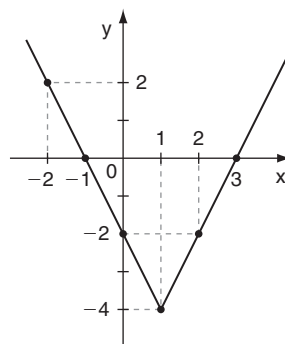
Temos:

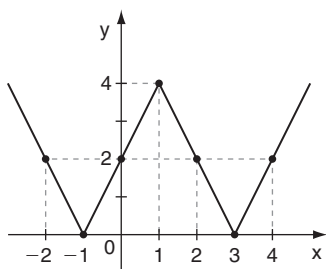
$$\blacksquare \quad x \geq 1$$

$$g(x) = 2x - 2 - 4 = 2x - 6$$

$$\blacksquare \quad x < 1$$

$$g(x) = -2x + 2 - 4 = -2x - 2$$





Agora, $f(x) = |g(x)|$.

Se $g(x) \geq 0$;

$f(x) = g(x)$.

Se $g(x) < 0$;

$f(x) = -g(x)$.

8. a) Se $500 \leq x \leq 1000$:

$$\text{Lucro} = \text{Receita} - \text{Custo} = 90 \cdot x - (60x + 10000) = 30x - 10000$$

Se $1000 < x \leq 3000$:

$$L = (100 - 0,01x) \cdot x - (60x + 10000) = -0,01x^2 + 40x - 10000$$

b) ■ Se $500 \leq x \leq 1000$, o lucro é expresso por uma função afim crescente, pois $a = 30 > 0$. Logo, o lucro é máximo quando $x = 1000$:

$$L_{\text{máx}} = 30 \cdot 1000 - 10000 = 20000 \text{ reais; o preço unitário é R\$ } 90,00$$

■ Se $1000 < x \leq 3000$, o lucro é máximo quando

$$x = x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{-0,02} = 2000;$$

$$L(2000) = -0,01 \cdot 2000^2 + 40 \cdot 2000 - 10000 = 30000 \text{ reais}$$

$$\text{Como } p = 100 - 0,01 \cdot x, \text{ vem: } p = 100 - 0,01 \cdot 2000 \Rightarrow p = 100 - 20 = 80 \text{ reais}$$

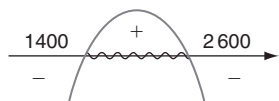
Como nesse 2º caso o lucro é maior ($30000 > 20000$), a resposta é 80 reais.

c) Se $500 \leq x \leq 1000$ (*), temos que $L(x) \geq 26400 \Rightarrow 30x - 10000 \geq 26400$

$$\Rightarrow x \geq 1213,3; \text{ não ocorre por (*).}$$

Se $1000 \leq x \leq 3000$, temos:

$$L(x) \geq 26400 \Rightarrow -0,01x^2 + 40x - 10000 \geq 26400 \Rightarrow -0,01x^2 + 40x - 36400 \geq 0$$



Assim, a encomenda deve ter, no mínimo, 1 400 unidades.

9. a) $|x + 2| = 2 \cdot |x - 2|$

■ 1º caso: $x < -2$; $|x + 2| = -x - 2$ e $|x - 2| = -x + 2$

Segue a equação:

$$-x - 2 = 2 \cdot (-x + 2) \Rightarrow -x - 2 = -2x + 4 \Rightarrow x = 6 \text{ (não serve, pois } 6 > -2)$$

■ 2º caso: $-2 \leq x < 2$; $|x + 2| = x + 2$ e

$$|x - 2| = -x + 2$$

Segue a equação:

$$x + 2 = 2 \cdot (-x + 2) \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ (convém)}$$

■ 3º caso: $x \geq 2$; $|x + 2| = x + 2$ e $|x - 2| = x - 2$

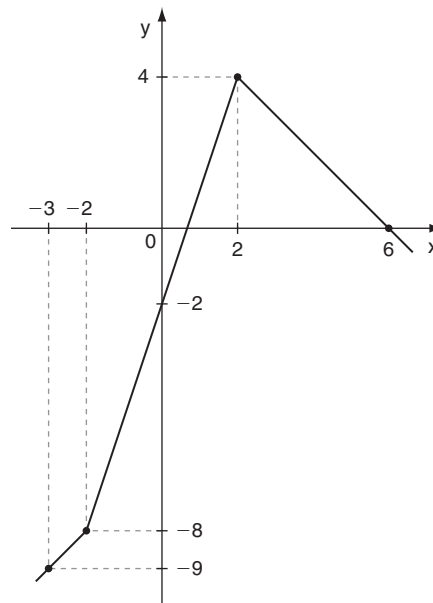
$$x + 2 = 2 \cdot (x - 2) \Rightarrow -x = -6 \Rightarrow x = 6 \text{ (convém)}$$

$$S = \left\{ \frac{2}{3}, 6 \right\}$$

b) $x < -2 \rightarrow h(x) = -x - 2 - 2 \cdot (-x + 2) = x - 6$

$$-2 \leq x < 2 \rightarrow h(x) = x + 2 - 2 \cdot (-x + 2) = 3x - 2$$

$$x \geq 2 \rightarrow h(x) = x + 2 - 2(x - 2) = -x + 6$$



10. a) $C(9) = 5 + 9 \cdot 3 = 32$;

$$C(15) = -\frac{3}{2} \cdot 15 + 40 = 17,50$$

O custo total, em reais, é: $32 + 17,50 = 49,50$.

b) Se $0 \leq x \leq 10$, $C(x) = 5 + 12x - x^2$ atinge seu valor máximo quando:

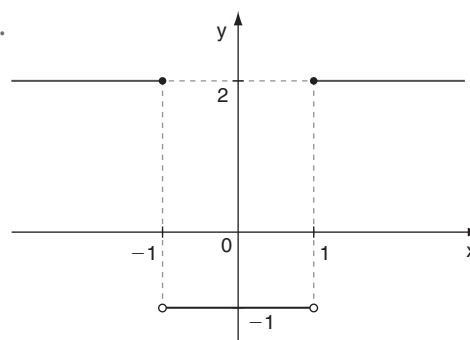
$$x = x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-12}{2 \cdot (-1)} = 6 \text{ (unidades)}$$

$$C_{\text{máx}} = 5 + 12 \cdot 6 - 6^2 = 41$$

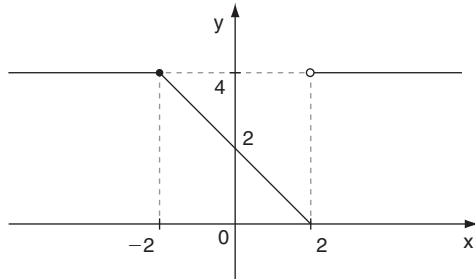
Se $10 < x \leq 20$, $C(x) = -\frac{3}{2}x + 40$ é uma função afim decrescente que assume valores menores que $-\frac{3}{2} \cdot 10 + 40 = 25$.

Assim, $C_{\text{máx}} = 41$ quando $x = 6$.

11.



12. ■ $|x| > 2 \Leftrightarrow x < -2$ ou $x > 2$; nesses intervalos, a função é constante e igual a 4.
- $|x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$; nesse intervalo, $f(x) = |x - 2|$. É preciso construir o gráfico de $y = |x - 2|$, restrito a esse intervalo; (*) observe que $f(-2) = |-4| = 4$ e $f(2) = |2 - 2| = 0$; $f(0) = |0 - 2| = 2$



(*) Como $x \leq 2$, $|x - 2| = -x + 2$

13. a) Plano I

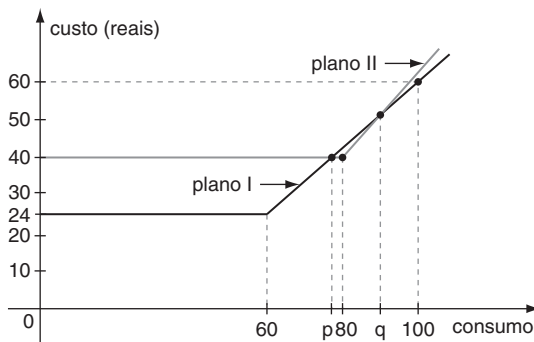
A função custo (c) é:

$$c(x) = \begin{cases} 24, & \text{se } x \leq 60 \\ 24 + 0,9 \cdot (x - 60), & \text{se } x \geq 60 \end{cases}$$

Plano II

A função custo (c) é:

$$c(x) = \begin{cases} 40, & \text{se } x \leq 80 \\ 40 + 1,1 \cdot (x - 80), & \text{se } x \geq 80 \end{cases}$$



- b) O plano II será mais vantajoso se o seu custo for menor. O gráfico acima nos mostra que a reta referente ao plano II está abaixo da reta do plano I no intervalo $p < x < q$.

- Como $60 < p < 80$:

① $c(x) = 24 + 0,9(x - 60)$

② $c(x) = 40$

$$24 + 0,9(x - 60) = 40$$

$$0,9x - 54 = 16$$

$$x = \frac{70}{0,9} \approx 77,8 \text{ kWh}$$

- Como $80 < q < 100$:

(I) $c(x) = 24 + 0,9(x - 60)$

(II) $c(x) = 40 + 1,1(x - 80)$

$$24 + 0,9(x - 60) = 40 + 1,1(x - 80)$$

$$24 + 0,9x - 54 = 40 + 1,1x - 88$$

$$-0,2x = -18$$

$$x = 90$$

Logo, a faixa de consumo (em kWh) em que o plano ② é mais vantajoso é $77,8 < x < 90$.

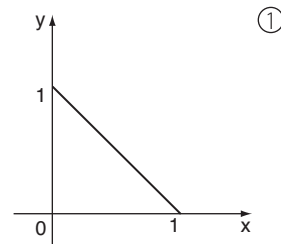
14. Como $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e $|y| = \begin{cases} y, & \text{se } y \geq 0 \\ -y, & \text{se } y < 0 \end{cases}$,

é preciso considerar quatro casos:

- Para $x > 0$ e $y > 0$:

$$|x| + |y| = 1 \Rightarrow x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$$

O gráfico é um segmento de reta no 1º quadrante ($x > 0$ e $y > 0$).

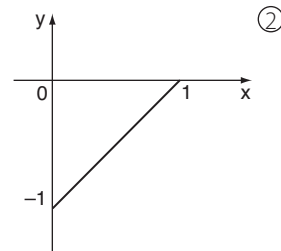


- Para $x > 0$ e $y < 0$:

$$|x| + |y| = 1 \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1$$

$$\Rightarrow y = x - 1$$

O gráfico é um segmento de reta no 4º quadrante ($x > 0$ e $y < 0$).

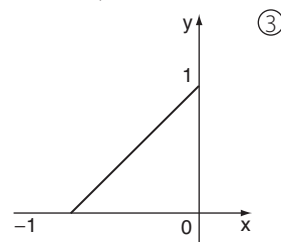


- Para $x < 0$ e $y > 0$:

$$|x| + |y| = 1 \Rightarrow -x + y = 1 \Rightarrow y = 1 + x$$

$$\Rightarrow y = 1 + x$$

O gráfico é um segmento de reta no 2º quadrante ($x < 0$ e $y > 0$).

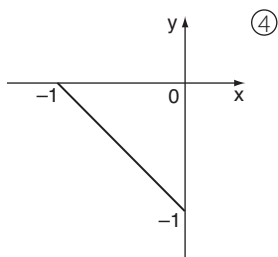


- Para $x < 0$ e $y < 0$:

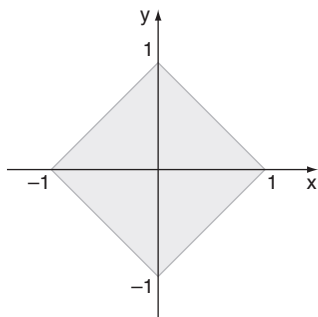
$$|x| + |y| = 1 \Rightarrow -x - y = 1 \Rightarrow y = -x - 1$$

$$\Rightarrow y = -x - 1$$

O gráfico é um segmento de reta no 3º quadrante ($x < 0$ e $y < 0$).



Reunindo ①, ②, ③ e ④, obtemos:



O quadrado sombreado tem diagonal medindo 2. Logo, $\ell = \sqrt{2}$ e a área do quadrado é: $\ell^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$ u.a.

15. a) Multiplicando os dois membros da igualdade por -1 , vem:

$$|-x| = -x$$

Ora, o módulo de um número real é igual a ele próprio quando "ele for positivo", isto é, $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$

$$b) |-x| = \begin{cases} -x, & \text{se } -x \geq 0, \text{ isto é, } x \leq 0 \\ x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

1º caso: $x \leq 0$ (*)

$$-x \leq x^2 \Rightarrow x^2 + x \geq 0$$

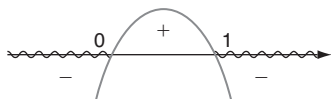


Fazendo a interseção com (*), obtemos:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x = 0\}$$

2º caso: $x > 0$ (**)

$$x \leq x^2 \Rightarrow -x^2 + x \leq 0$$



Fazendo a interseção com (**), vem: $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \text{ ou } x = 0\}$$

16. a)

$ x $	0	1
$ x-1 $	$-x+1$	$x-1$
$ x+1 $	$-x-1$	$x+1$

1º caso: Se $x < 0$, a equação proposta é:

$$2 \cdot (-x) + 3 \cdot (-x+1) = 5 \Rightarrow x = -\frac{2}{5} < 0$$

2º caso: $0 \leq x < 1$, a equação proposta é:

$$2 \cdot x + 3 \cdot (-x+1) = 5 \Rightarrow x = -2 \text{ (não serve)}$$

3º caso: Se $x \geq 1$, a equação proposta é:

$$2x + 3 \cdot (x-1) = 5 \Rightarrow x = \frac{8}{5} > 1$$

$$S = \left\{-\frac{2}{5}, \frac{8}{5}\right\}$$

b)

	-1	1
$ x-1 $	$-x+1$	$x-1$
$ x+1 $	$-x-1$	$x+1$
$ x-1 + x+1 $	$-2x$	$2x$

1º caso: Se $x < -1$, a equação é:

$$-2x = 4x - 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (não serve)}$$

2º caso: Se $-1 \leq x < 1$, a equação é:

$$2 = 4x - 3 \Rightarrow x = \frac{5}{4} \text{ (não serve)}$$

3º caso: Se $x \geq 1$, a equação é:

$$2x = 4x - 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (serve)}$$

$$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$c) |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1: & \text{se } x^2 - 1 \geq 0, \text{ isto é, se } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ -x^2 + 1: & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

1º caso: Se $x \leq -1$ ou $x \geq 1$ (*)

$$\text{A equação é: } x^2 - 1 = 2x + 7 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 4 \text{ (ambos satisfazem (*))}$$

2º caso: Se $-1 < x < 1$

$$\text{A equação é: } -x^2 + 1 = 2x + 7 \Rightarrow x^2 + 2x + 6 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$$

$$S = \{-2, 4\}$$

- 17.

$$\left| \frac{2x-3}{3x-1} \right| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-3}{3x-1} < -2 & \text{①} \\ \text{ou} \\ \frac{2x-3}{3x-1} > 2 & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{① } \frac{2x-3}{3x-1} < -2 \Rightarrow \frac{8x-5}{3x-1} < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{5}{8}$$

$$\text{② } \frac{2x-3}{3x-1} > 2 \Rightarrow \frac{-4x-1}{3x-1} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$$

Fazendo a reunião de ① e ②, vem:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} < x < \frac{5}{8} \text{ e } x \neq \frac{1}{3}\right\}$$

O único número inteiro que satisfaz é 0.

18. a)

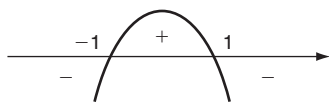
	1	2
$ x-1 $	$-x+1$	$x-1$
$ x-2 $	$-x+2$	$x-2$
$ x-1 + x-2 $	$-2x+3$	$2x-3$

- 1º caso: $x \leq 1$ ①
A inequação é: $-2x + 3 \leq x$
 $-3x \leq -3 \Rightarrow x \geq 1$ ②
De (1) \cap (2), obtemos $S_1 = \{1\}$.
- 2º caso: $1 \leq x \leq 2$ ③
A inequação é: $1 \leq x$ ④
De (3) \cap (4), segue $S_2: 1 \leq x \leq 2$
- 3º caso: $x \geq 2$ ⑤
A inequação é: $2x - 3 \leq x \Rightarrow x \leq 3$ ⑥
De (5) \cap (6), segue $S_3: 2 \leq x \leq 3$
A solução da inequação é
 $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$

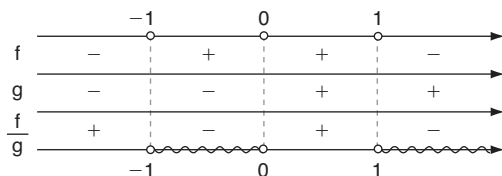
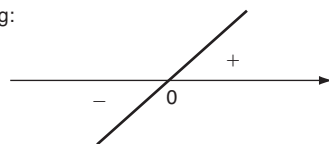
b) 1º caso: $x > 0$ ①; a inequação equivale a:

$$\frac{1}{x} < x \Rightarrow \frac{1}{x} - x < 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{x} < 0$$

f:



g:



$$-1 < x < 0 \text{ ou } x > 1 \quad ②$$

$$① \cap ② \Rightarrow S_1 =]1, +\infty[$$

$$2^\circ \text{ caso: } x < 0 \quad ③$$

$$\text{A inequação proposta é: } \frac{1}{x} < -x \Rightarrow \frac{1}{x} + x < 0 \Rightarrow \frac{1+x^2}{x} < 0$$

Como $1+x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, a inequação é satisfeita se $x < 0$ ④

$$③ \cap ④ \Rightarrow S_2 =]-\infty, 0[$$

$$\text{Assim, } S = S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 1\}.$$

$$c) |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x: \text{ se } x^2 - 2x \geq 0, \text{ isto é, se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2 \\ -x^2 + 2x: \text{ se } 0 < x < 2 \end{cases}$$

$$1^\circ \text{ caso: } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2 \quad ①$$

$$\text{A inequação equivale a: } x^2 - 2x \leq -3x + 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 1 \quad ②$$

$$① \cap ② \Rightarrow S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$$

$$2^\circ \text{ caso: } 0 < x < 2 \quad ③$$

$$\text{A inequação equivale a: } -x^2 + 2x \leq -3x + 2 \Rightarrow -x^2 + 5x - 2 \leq 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{5-\sqrt{17}}{2}$$

$$(\approx 0,44) \text{ ou } x \geq \frac{5+\sqrt{17}}{2} (\approx 4,56) \quad ④$$

$$③ \cap ④ \Rightarrow S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right\}$$

19. Como $|x|^2 = x^2$ e $|x|^4 = x^4$, a equação equivale a $2x^4 + 6x^2 + 4 = 0$. Como, em \mathbb{R} , $x^2 \geq 0$ e $x^4 \geq 0$, para todo x real, a equação não admite soluções.

20. Devemos determinar x tal que $f(x) = 23$.

$$1^\circ \text{ caso: } x > 5$$

$$x^2 - 4x + 2 = 23 \Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -3 \text{ ou } x = 7$$

Observe que apenas $x = 7$ serve.

$$2^\circ \text{ caso: } x \leq 5$$

$$-3x + 8 = 23 \Rightarrow -3x = 15 \Rightarrow x = -5 \text{ (serve)}$$

21. Como $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, a equação equivale a:

$$\sqrt{(x-3)^2} = 2x \Rightarrow |x-3| = 2x$$

A equação tem solução se $x > 0$.

Temos: $(x-3) = 2x$ ou $x-3 = -2x \Rightarrow x = -3$ (não convém) ou $x = 1$ (convém).

$$S = \{1\}$$

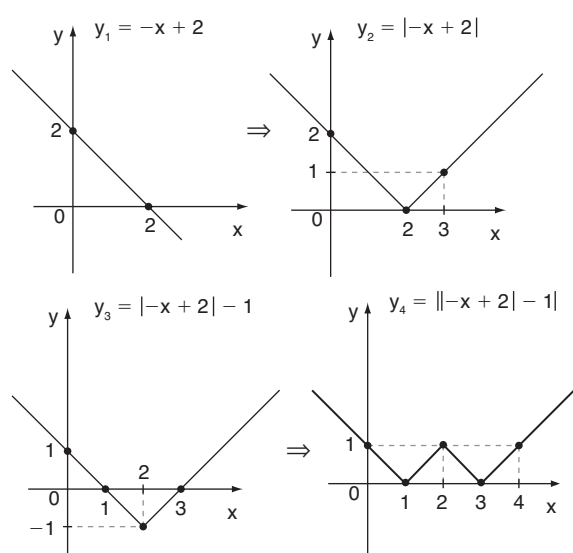
$$22. a) f(2) = ||-2+2|-1| = |-1| = 1$$

$$f(-2) = ||2+2|-1| = |3| = 3 \quad \text{A soma é 4.}$$

$$b) f(x) = 0 \Rightarrow ||-x+2|-1| = 0 \Rightarrow |-x+2|-1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |-x+2| = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3.$$

c)



$$d) ||-x+2|-1| < 2 \Rightarrow -2 < |-x+2|-1 < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 < |-x+2| < 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |-x+2| > -1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \text{ satisfaz, pois} \\ |-x+2| > 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \\ |-x+2| < 3 \Rightarrow -3 < -x+2 < 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow -5 < -x < 1 \Rightarrow 5 > x > -1 \end{cases}$$

Da interseção dos dois intervalos, segue que:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5\}$$

23. a)

	-2	$\frac{3}{2}$	
$ 2x-3 $	$-2x+3$	$-2x+3$	$2x-3$
$ x+2 $	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$ 2x-3 + x+2 $	$-3x+1$	$-x+5$	$3x-1$

- 1º caso: $x < -2$
 $-3x + 1 = 4 \Rightarrow x = -1$ (não serve, pois $-1 > -2$)

- 2º caso: $-2 < x < \frac{3}{2}$
 $-x + 5 = 4 \Rightarrow x = 1$ (convém)

- 3º caso: $x > \frac{3}{2}$
 $3x - 1 = 4 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ (convém)

$$S = \left\{1, \frac{5}{3}\right\}$$

$$b) |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4: & \text{se } x^2 - 4 \geq 0, \text{ isto é, se } x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2 \\ -x^2 + 4: & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$|x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x: & \text{se } x^2 - 2x \geq 0, \text{ isto é, se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2 \\ -x^2 + 2x: & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$$

Vamos analisar quatro intervalos: $x < -2$, $-2 \leq x < 0$, $0 \leq x < 2$ ou $x \geq 2$

	-2	0	2	
$ x^2 - 4 $	$x^2 - 4$	$-x^2 + 4$	$-x^2 + 4$	$x^2 - 4$
$ x^2 - 2x $	$x^2 - 2x$	$x^2 - 2x$	$-x^2 + 2x$	$x^2 - 2x$

1º caso: $x < -2$ ①

A inequação é: $x^2 - 4 \leq x^2 - 2x \Rightarrow -4 \leq -2x \Rightarrow x \leq 2$ ②

$$\textcircled{1} \cap \textcircled{2} \Rightarrow x < -2 \quad (S_1)$$

2º caso: $-2 \leq x < 0$ ③

A inequação é: $-x^2 + 4 \leq x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2$ ④

$$\textcircled{3} \cap \textcircled{4} \Rightarrow -2 \leq x \leq -1 \quad (S_2)$$

3º caso: $0 \leq x < 2$ ⑤

A inequação é: $-x^2 + 4 \leq -x^2 + 2x \Rightarrow x \geq 2$ ⑥

$$\textcircled{5} \cap \textcircled{6} \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \quad (S_3)$$

4º caso: $x \geq 2$ ⑦

A inequação é: $x^2 - 4 \leq x^2 - 2x \Rightarrow x \leq 2$ ⑧

$$\textcircled{7} \cap \textcircled{8} \Rightarrow x = 2 \quad (S_4)$$

Da união de S_1, S_2, S_3 e S_4 , obtemos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x = 2\}$$

24. (01) V. Se $x \leq 100$, $f(x) = x$ (função linear) e x (quantidade ingerida) é diretamente proporcional a $f(x)$ (quantidade absorvida).

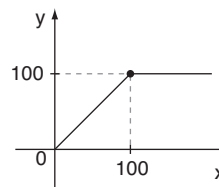
(02) V. Como a quantidade máxima possível de ser absorvida é 100 mg, o percentual é $\frac{100}{x}$ e, se x aumenta, o percentual diminui.

(04) F. 1º dia: 80 mg absorvidos, 2º dia: 100 mg absorvidos. A média é 90 mg.

(08) F. A razão só é igual a 1 se $x \leq 100$.

(16) V

(32) F. O gráfico correto é:



A soma é: (01) + (02) + (16) = 19.

25. gastos em janeiro: $10 \cdot 0,50 + 10 \cdot 1,00 + 10 \cdot 1,5 + 8 \cdot 2,00 = 46,00$

gasto em fevereiro: $10 \cdot 0,50 + 8 \cdot 1,00 = 13,00$

$x = 59$ reais

gastos em julho: $10 \cdot 0,50 + 10 \cdot 1,00 + 6 \cdot 1,50 = 24,00$

gastos em agosto: $10 \cdot 0,50 + 10 \cdot 1,00 + 10 \cdot 1,50 = 30,00$

$y = 54$ reais

$x - y = 5$ reais

$$26. \text{■ } L_B > L_A \Rightarrow 10x + 20 > \frac{10}{9}x^2 - \frac{130}{9}x + \frac{580}{9} \Rightarrow 90x + 180 > 10x^2 - 130x + 580 \Rightarrow x^2 - 22x + 40 < 0 \Rightarrow 2 < x < 20 \quad \textcircled{1}$$

■ $L_B > L_C$. Vamos analisar dois casos:

1º) $x < 15$ (*)

Temos: $10x + 20 > 120 \Rightarrow 10x > 100 \Rightarrow x > 10$.

Fazendo interseção com (*), obtemos $10 < x < 15$. ②

2º) $x \geq 15$ (**)

Temos: $10x + 20 > 10x - 30 \Rightarrow 20 > -30$ é satisfeita para todo $x \in \mathbb{R}$.

Fazendo $\mathbb{R} \cap (**)$, obtemos $x \geq 15$. ③

Fazendo $\textcircled{2} \cup \textcircled{3}$, obtemos $x > 10$. ④

Por fim, o lucro de B supera o de A e o de C simultaneamente se o número de unidades (x) pertence a $\textcircled{1} \cap \textcircled{4}$, isto é, se $10 < x < 20$, ou $x \in]10, 20[$.

$$27. |x^2 - 10x + 21| = \begin{cases} x^2 - 10x + 21: & \text{se } x^2 - 10x + 21 \geq 0, \\ \text{isto é, se } x \leq 3 \text{ ou } x \geq 7. \\ -x^2 + 10x - 21: & \text{se } 3 < x < 7. \end{cases}$$

$$|3x - 15| = \begin{cases} 3x - 15: & \text{se } x \geq 5 \\ -3x + 15: & \text{se } x < 5 \end{cases}$$

1º caso: $x \leq 3$ ①

Temos: $x^2 - 10x + 21 \leq -3x + 15 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 6$ ②

$$\textcircled{1} \cap \textcircled{2} \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \quad \text{(I)}$$

2º caso: $3 < x < 5$ ③

Temos: $-x^2 + 10x - 21 \leq -3x + 15 \Rightarrow -x^2 + 13x - 36 \leq 0 \Rightarrow x \leq 4 \text{ ou } x \geq 9$ ④

$$\textcircled{3} \cap \textcircled{4} \Rightarrow 3 < x \leq 4 \quad \text{(II)}$$

3º caso: $5 \leq x < 7$ ⑤

Temos: $-x^2 + 10x - 21 \leq 3x - 15 \Rightarrow -x^2 + 7x - 6 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1 \text{ ou } x \geq 6$ ⑥

$$\textcircled{5} \cap \textcircled{6} \Rightarrow 6 \leq x < 7 \quad \text{(III)}$$

4º caso: $x \geq 7$ ⑦

Temos: $x^2 - 10x + 21 \leq 3x - 15 \Rightarrow x^2 - 13x + 36 \leq 0 \Rightarrow 4 \leq x \leq 9$ ⑧

⑦ \cap ⑧ $\Rightarrow 7 \leq x \leq 9$ (IV)

Da união das soluções obtidas em I, II, III e IV, segue que $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4 \text{ ou } 6 \leq x \leq 9\}$.

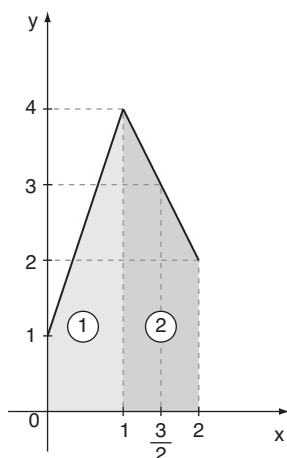
28. a) $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow y = 3x + 1$

x	y
0	1
$\frac{1}{3}$	2
1	4

$1 < x < 2 \Rightarrow y = -2x + 6$

x	y	Se x estivesse definida em $x = 1$ e $x = 2$, teríamos:
$\frac{3}{2}$	3	$x = 1 \Rightarrow y = -2 \cdot 1 + 6 = 4 = f(1)$
$\frac{7}{4}$	2,5	$x = 2 \Rightarrow y = -2 \cdot 2 + 6 = 2 = f(2)$

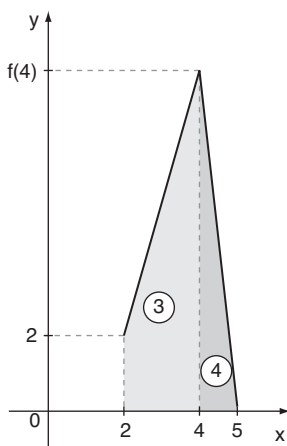
Assim, a função é contínua para $x = 1$ e para $x = 2$.



$$b) A_1 = \frac{(4+1) \cdot 1}{2} = \frac{5}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{a área pedida é } \frac{5}{2} + 3 = \\ \frac{11}{2} \text{ u.a.} \end{array}$$

$$A_2 = \frac{(4+2) \cdot 1}{2} = 3$$

c) A área sob o gráfico em $[2, 5]$ vale $3 \cdot \frac{11}{2} = \frac{33}{2}$ u.a.



$$A_3 = \frac{(f(4) + 2) \cdot 2}{2} = f(4) + 2$$

$$A_4 = \frac{1 \cdot f(4)}{2} = \frac{f(4)}{2}$$

$$A_3 + A_4 = \frac{33}{2} \Rightarrow \frac{3f(4)}{2} + 2 = \frac{33}{2}$$

$$\Rightarrow 3f(4) = 29 \Rightarrow f(4) = \frac{29}{3}$$

29. a) $f(1) = 2 \Rightarrow 2 \cdot 1 + |1 + p| = 2 \Rightarrow |1 + p| = 0 \Rightarrow 1 + p = 0 \Rightarrow p = -1$

b) $f(x) = 12 \Rightarrow 2x + |x - 3| = 12 \Rightarrow |x - 3| = 12 - 2x$

A equação apresenta solução se $12 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 6$ (*)

Podemos ter:

$$\begin{cases} x - 3 = 12 - 2x \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5, \text{ satisfaz (*)} \\ \text{ou} \\ x - 3 = -12 + 2x \Rightarrow 9 = x; \text{ não satisfaz (*)} \end{cases}$$

Assim, $x = 5$.

$$30. a) A(x) = \begin{cases} 18, & \text{se } x \leq 10 \\ 18 + 2 \cdot (x - 10), & \text{se } x > 10 \end{cases} = 2x - 2$$

b) Se $x \leq 10$, então $B(x) < A(x)$.

Se $x > 10$, devemos ter $B(x) > A(x)$, isto é:

$$2,1x - 4 > 2x - 2 \Rightarrow 0,1x > 2 \Rightarrow x > 20.$$

31. ■ Se $a > 0$ e $b > 0$, então $a \cdot b > 0$.

$$|a| = a, |b| = b \text{ e } |ab| = ab$$

$$E = \frac{a}{a} + \frac{2 \cdot b}{b} + \frac{|3| \cdot |ab|}{ab} = 1 + 2 + 3 = 6$$

■ Se $a > 0$ e $b < 0$, então $a \cdot b < 0$.

$$|a| = a, |b| = -b \text{ e } |a \cdot b| = -ab$$

$$E = \frac{a}{a} + 2 \cdot \left(\frac{-b}{b}\right) + 3 \cdot \left(\frac{-ab}{ab}\right) = 1 - 2 - 3 = -4$$

■ Se $a < 0$ e $b > 0$, então $a \cdot b < 0$.

$$|a| = -a, |b| = b \text{ e } |a \cdot b| = -ab$$

$$E = -\frac{a}{a} + 2 \cdot \frac{b}{b} + 3 \cdot \left(\frac{-ab}{ab}\right) = -1 + 2 - 3 = -2$$

■ Se $a < 0$ e $b < 0$, então $a \cdot b > 0$.

$$|a| = -a, |b| = -b \text{ e } |a \cdot b| = ab$$

$$E = -\frac{a}{a} + \frac{2 \cdot (-b)}{b} + 3 \cdot \frac{ab}{ab} = -1 - 2 + 3 = 0$$

Os possíveis valores são: -4, -2, 0 e 6.

Testes

$$1. \quad 65 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{primeiros} \\ 10 \text{ m}^3}}{(10)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{de } 11 \\ \text{a } 20 \text{ m}^3}}{(2 \cdot 10)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n}^\circ \text{ de m}^3 \text{ acima} \\ \text{de } 20}}{(3,5 \cdot x)} \Rightarrow 35 = 3,5x \Rightarrow x = 10$$

Assim, o consumo foi $10 + 10 + 10 = 30 \text{ m}^3$.

Resposta: a.

7. $|f(x)| = 1 \Rightarrow f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$

■ $f(x) = 1 \Rightarrow x_1 = 2$ ou x_2 , com $-1 < x_2 < 0$ ou x_4 , com $-4 < x_4 < -3$.

■ $f(x) = -1 \Rightarrow x_3$, com $-2 < x_3 < -1$ ou x_4 , com $-3 < x_4 < -2$.

Assim, há 5 valores que satisfazem.

Resposta: b.

25. De C a D, temos uma função do tipo $y = ax + b$. A taxa de variação (a) dessa função é:

$$a = \frac{4237,50 - 2100}{47000 - 37500} = \frac{2137,50}{9500} = 0,225 = \frac{9}{40}$$

Assim, $y = 0,225x + b$.

Como C(37 500, 2 100) pertence à reta, temos:

$$2100 = 0,225 \cdot 37500 + b \Rightarrow b = -6337,50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 0,225x - 6337,50 \left(\text{ou } y = \frac{9}{40}x - 6337,50 \right)$$

$$\text{Temos: } x = 43800 \Rightarrow y = \frac{9}{40} \cdot 43800 - 6337,50 = 3517,50$$

$$x = 44800 \Rightarrow y = \frac{9}{40} \cdot 44800 - 6337,50 = 3742,50$$

A diferença é $3742,50 - 3517,50 = 225$ reais.

Outra resolução possível:

$$f(x) = 0,225x + b$$

$$\text{O acréscimo pedido é } f(x + 1000) - f(x) =$$

$$= [0,225 \cdot (x + 1000) + b] - [0,225x + b] =$$

$$= 225$$

Resposta: c.

26. Na 1ª condição, temos:

$$x = p \Rightarrow f(p) = -\frac{p}{p} + \frac{9}{4} = \frac{5}{4}$$

Na 2ª condição, temos:

$$p^2 - 2p = \frac{5}{4} \Rightarrow p = \frac{5}{2}$$

$$x = p \Rightarrow p \cdot p - 2p$$

Resposta: e.

27. 1º caso: $x \geq 0$ e $y \geq 0$ (1º quadrante)

$$|3x| = 3x; |4y| = 4y \Rightarrow 3x + 4y = 12$$

x	y
0	3
4	0

2º caso: $x \geq 0$ e $y \leq 0$ (4º quadrante)

$$|3x| = 3x \text{ e } |4y| = -4y \Rightarrow 3x - 4y = 12$$

x	y
4	0
0	-3

3º caso: $x \leq 0$ e $y \geq 0$ (2º quadrante)

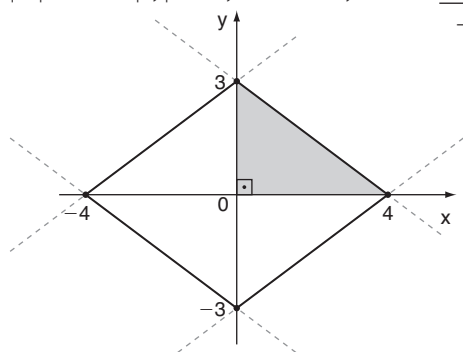
$$|3x| = -3x \text{ e } |4y| = 4y \Rightarrow -3x + 4y = 12$$

x	y
0	3
-4	0

4º caso: $x \leq 0$ e $y \leq 0$ (3º quadrante)

$$|3x| = -3x \text{ e } |4y| = -4y \Rightarrow -3x - 4y = 12$$

x	y
-4	0
0	-3



A área do triângulo sombreado é $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. A área pedida é $4 \cdot 6 = 24$.

Resposta: d.

- 28.

	0	5	x
$ x $	-x	x	x
$ x-5 $	-x+5	-x+5	x-5
$ x \cdot x-5 $	x^2-5x	$-x^2+5x$	x^2-5x

1º caso: $x < 0$ ou $x \geq 5$ (*)

A inequação se reduz a $x^2 - 5x \geq 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \leq -1 \text{ ou } x \geq 6 \quad (**)$$

De (*) \cap (**) segue que $x \leq -1$ ou $x \geq 6$ ①

2º caso: $0 \leq x < 5$ (*)

A inequação se reduz a $-x^2 + 5x \geq 6 \Rightarrow -x^2 + 5x - 6 \geq$

$$0 \Rightarrow 2 \leq x \leq 3 \quad (**)$$

$$(*) \cap (**) \Rightarrow 2 \leq x \leq 3 \quad ②$$

Reunindo ① e ②, segue: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3 \text{ ou } x \geq 6\}$

Resposta: c.

30. x: número de minutos utilizados por mês

y: valor pago, em reais

Plano K

$$y = \begin{cases} 29,90; & \text{se } x \leq 200 \\ 29,90 + (x-200) \cdot 0,20; & \text{se } x > 200 \end{cases}$$

$0,20x - 10,1$

Plano Z

$$y = \begin{cases} 49,90; & \text{se } x \leq 300 \\ 49,90 + 0,10 \cdot (x-300); & \text{se } x > 300 \end{cases}$$

$0,10x + 19,90$

Resposta: d.

31. A média dos valores é:

$$\frac{1000 \cdot 2,00 + 4000 \cdot 1,80 + 3000 \cdot 1,60}{8000} = \frac{14000}{8000} = 1,75$$

Resposta: d.

32. $2 \cdot 1000 + 1,80 \cdot 4000 + 1,6 \cdot (n - 5000) < 1,8 \cdot n$

$$2000 + 7200 + 1,6n - 8000 < 1,8n$$

$$1200 < 0,2n \Rightarrow n > 6000$$

Resposta: a.

Capítulo 7 Função exponencial

Exercícios

- 125
 - 125
 - $\frac{1}{125}$
 - $-\frac{8}{27}$
 - 2500
 - 1
 - $\frac{3}{2}$
 - 1
 - 32
 - 100
 - $\frac{1}{1000}$
 - 4

2. a) 0,04 g) 1,728
 b) 10 h) 10,24
 c) 3,4 i) 0,216
 d) 1 j) 12,5
 e) 400 k) $-\frac{10}{3}$
 f) 0,8 l) 10 000

3. a) $A = \frac{9}{16} \cdot (-8) - \frac{1}{2} = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{10}{2} = -5$

b) $B = 2^2 + 3^1 = 4 + 3 = 7$

c) $C = -2 \cdot \frac{27}{8} + 1 - (-2) = -\frac{27}{4} + 3 = -\frac{15}{4}$

d) $D = \left[-\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right]^{-1} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1} = -5$

e) $E = \left[\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} = \left[\frac{2}{3}\right]^{-1} = \frac{3}{2}$

f) $F = 6 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{3} + \frac{16}{9} = \frac{40}{9}$

4. a) $\frac{11^3 \cdot 11^8 \cdot 11}{11^6} = \frac{11^{12}}{11^6} = 11^6$

b) $\frac{2^{12} \cdot 2^7 \cdot 2^3}{2^{22}} = \frac{2^{22}}{2^{22}} = 2^0 = 1$

c) $\frac{10^{-2} \cdot 10^3}{(10^{-2})^{-1}} = \frac{10}{10^2} = 10^{-1}$

d) $\frac{10 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} = \frac{10^{-10}}{10^{-12}} = 10^2$

5. $A = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$

$= \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{2-3}{8} = -\frac{1}{8}$

$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot (-2)^3 =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot (-8) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$

$C = \frac{-\frac{5}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = -1$

$B < C < A$

6. a) $\frac{a^5 \cdot b^6}{a \cdot b^4} = a^4 \cdot b^2$

b) $\frac{a^{10} \cdot b^9}{a^{-4} \cdot b^{-3}} = a^{14} \cdot b^{12}$

c) $\frac{a^8}{b^8} \cdot \frac{b^{10}}{a^6} = a^2 \cdot b^2$

d) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot ab = \frac{b+a}{ab} \cdot ab = a + b$

e) $\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{b^2} + 2 \cdot \frac{1}{ab} = \frac{b^2 + a^2 + 2ab}{a^2b^2} =$
 $\frac{(a+b)^2}{a^2b^2} = \left(\frac{a+b}{ab}\right)^2$

7. a) $\frac{2^{100}}{2} = 2^{100-1} = 2^{99}$

b) $3 \cdot 3^{20} = 3^{1+20} = 3^{21}$

c) $\frac{4^{32}}{8} = \frac{(2^2)^{32}}{2^3} = \frac{2^{64}}{2^3} = 2^{61}$

d) $(5 \cdot 25^{10})^2 = [5 \cdot (5^2)^{10}]^2 = (5 \cdot 5^{20})^2 = (5^{21})^2 = 5^{42}$

8. $a = \left(\frac{2}{100}\right)^{-3} = 50^3$; $b = \left(\frac{4}{1000}\right)^{-2} = 250^2$

a) $50^3 \cdot (250^2)^{-1} = 50^3 \cdot 250^{-2} = \frac{50^3}{250^2} = \frac{50 \cdot 50^2}{250^2} =$
 $= 50 \cdot \left(\frac{50}{250}\right)^2 = 50 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 50 \cdot \frac{1}{25} = 2$

b) $\frac{250^2}{50^3} = \frac{250^2}{50^2 \cdot 50} = \left(\frac{250}{50}\right)^2 \cdot \frac{1}{50} =$
 $= 5^2 \cdot \frac{1}{50} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$

c) $50^3 \cdot 10^{-3} + 250^2 \cdot 10^{-2} = \frac{50^3}{1000} + \frac{250^2}{100} =$
 $= \frac{50 \cdot 50 \cdot 50}{1000} + \frac{250 \cdot 250}{100} = 125 + 625 = 750$

9. $a = \frac{2^{48} + 2^{44} - 2^{46}}{2 \cdot (2^3)^{15}} = \frac{2^{44} \cdot (2^4 + 1 - 2^2)}{2^{46}} =$

$= \frac{(16 + 1 - 4)}{2^2} = \frac{13}{4}$

$(4a)^{-1} = \left(4 \cdot \frac{13}{4}\right)^{-1} = 13^{-1} = \frac{1}{13}$

10. a) 13

d) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

b) 8

e) $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

f) $\sqrt[5]{10^5} = 10$

11. a) $4 \cdot \sqrt{9} = 12$

b) $\sqrt[3]{1+7} = \sqrt[3]{8} = 2$

c) $(10-2)^2 = 64$

23. a) $\sqrt[3]{27} = 3$ e) $\sqrt{576} = 24$
 b) $\sqrt{256} = 16$ f) $\sqrt{0,25} = 0,5$
 c) $\sqrt[5]{32} = 2$ g) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}} = \frac{3}{10}$
 d) $\sqrt[3]{64} = 4$ h) $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$

24. a) $(2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$
 b) $\frac{1}{144^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{144}} = \frac{1}{12}$
 c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$
 d) $\sqrt{16^5} = \sqrt{16^4 \cdot 16} = 16^2 \cdot \sqrt{16} = 1024$
 e) $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$
 f) $\left(\frac{9}{100}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{100}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$
 g) $(2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$
 h) $\sqrt{8^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

25. a) $A = 64^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = (2^6)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =$
 $= 2^{-4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{16\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{32}$
 b) $B = (\sqrt[7]{128} + \sqrt[4]{81})^{\frac{1}{2}} = (2 + 3)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$
 c) $C = (10^{-3})^{-\frac{2}{3}} \cdot (10^3)^{\frac{5}{6}} = 10^2 \cdot 10^{\frac{5}{2}} =$
 $= 100 \cdot \sqrt{10^5} = 100 \cdot \sqrt{10^4 \cdot 10} = 100 \cdot 10^2 \cdot \sqrt{10}$
 $C = 10000\sqrt{10}$

d) $D = 4^{-\frac{1}{2}} \cdot (10^{-6})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot 10^3 = \frac{1000}{2} = 500$

26. a) $16 + 9 = 25$

b) $b = \frac{2 \cdot 3 - 4}{2^2} = \frac{6 - 4}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^b = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

27. a) $ASC = \left(\frac{169 \cdot 75}{3600}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{169 \cdot 75}{3600}} =$
 $= \frac{13 \cdot 5\sqrt{3}}{60} \cong 1,84 \text{ m}^2$

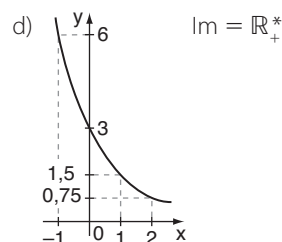
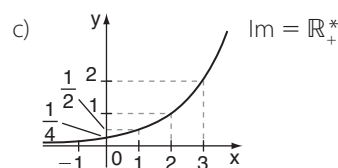
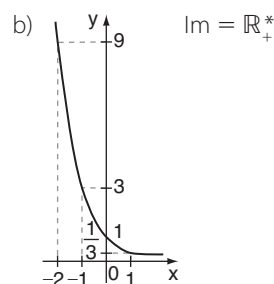
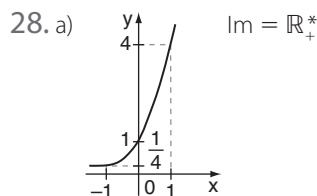
b) $2 = \left(\frac{h \cdot 80}{3600}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^2 = \left[\left(\frac{h \cdot 80}{3600}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 4 = \frac{h \cdot 80}{3600} \Rightarrow h = 180 \text{ cm} = 1,80 \text{ m}$

c) $ASC(\text{Eli}) = \sqrt{\frac{h \cdot 81}{3600}}$

$ASC(\text{Rui}) = \sqrt{\frac{121h \cdot 81}{3600}} = 1,1 \sqrt{\frac{h \cdot 81}{3600}}$

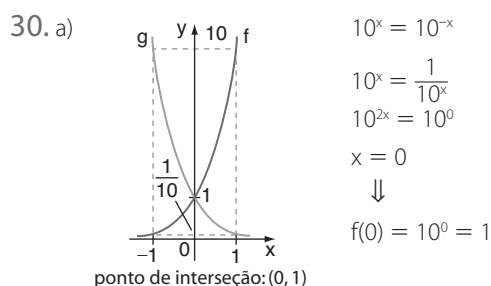
Assim, $ASC(\text{Rui}) = 1,1 \cdot ASC(\text{Eli})$

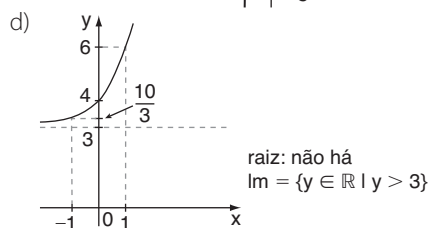
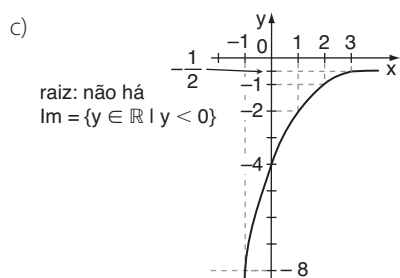
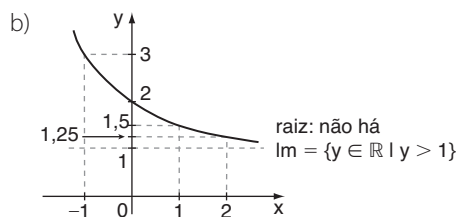
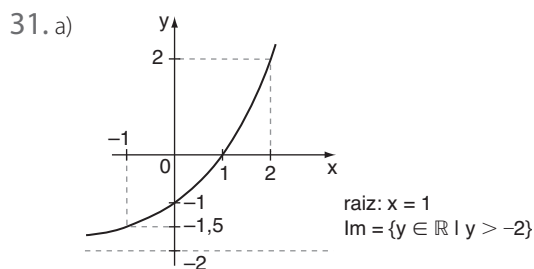
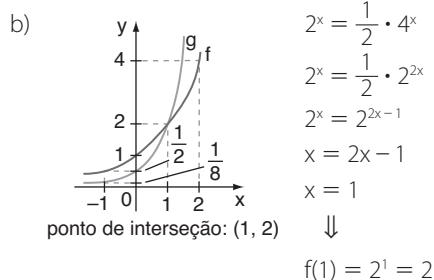
Como $1,1 = 1 + 0,1$, concluímos que $x = 10\%$



29. $f(1) = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} = a \cdot 2 \Rightarrow 2a = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{8}$

$f(x) = \frac{3}{8} \cdot 2^x \Rightarrow f(3) = \frac{3}{8} \cdot 2^3 = \frac{3}{8} \cdot 8 = 3$





É possível determinar algebricamente o conjunto imagem das funções:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x > 0 \Rightarrow 2^x - 2 > 0 - 2$, isto é, $y > -2$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 > 0 + 1$,
isto é, $y > 1$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0 \Rightarrow -4\left(\frac{1}{2}\right)^x < 0$, ou seja, $y < 0$

d) $\forall x \in \mathbb{R}, 3^x > 0 \Rightarrow 3^x + 3 > 0 + 3$, isto é, $y > 3$

32. a) $\left. \begin{array}{l} x = 1, f(x) = 5 \Rightarrow 5 = a + b \cdot 2^1 \\ x = 0, f(x) = 3 \Rightarrow 3 = a + b \cdot 2^0 \end{array} \right\} a = 1 \text{ e } b = 2$

b) Como $f(x) = 1 + 2 \cdot 2^x$, temos que $\forall x \in \mathbb{R}$,
 $2^x > 0 \Rightarrow 2 \cdot 2^x > 0 \Rightarrow 1 + 2 \cdot 2^x > 0 + 1$, isto é,
 $f(x) > 1$. Logo, $\text{Im} =]1, +\infty[$.

c) $f(-2) = 1 + 2 \cdot 2^{-2} = \frac{3}{2}$

33. a) início: 50

$t = 1 \Rightarrow 1 \text{ h: } 2 \cdot 50 = 100$

$t = 2 \Rightarrow 2 \text{ h: } 2 \cdot (2 \cdot 50) = 2^2 \cdot 50 = 200$

$t = 3 \Rightarrow 3 \text{ h: } 2 \cdot (2^2 \cdot 50) = 2^3 \cdot 50 = 400$

$t = 4 \Rightarrow 4 \text{ h: } 2 \cdot (2^3 \cdot 50) = 2^4 \cdot 50 = 800$

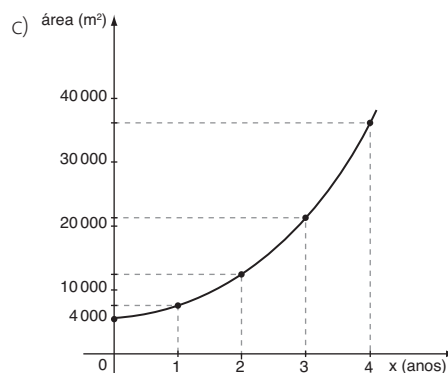
$t = 5 \Rightarrow 5 \text{ h: } 2 \cdot (2^4 \cdot 50) = 2^5 \cdot 50 = 1600$

b) Em geral, no instante t o número de bactérias é $2^t \cdot 50$, isto é, $n(t) = 50 \cdot 2^t$.

34. a)

Ano	Área (m ²)
1	$4000 + 0,75 \cdot 4000 = 1,75 \cdot 4000 = 7000$
2	$7000 + 0,75 \cdot 7000 = 1,75 \cdot 7000 = 1,75^2 \cdot 4000 = 12250$
3	$12250 + 0,75 \cdot 12250 = 1,75 \cdot 12250 = 1,75^3 \cdot 4000 = 21437,5$
4	$21437,5 + 0,75 \cdot 21437,5 = 1,75 \cdot 21437,5 = 1,75^4 \cdot 4000 = 37515,6$
5	$37515,6 + 0,75 \cdot 37515,6 = 1,75 \cdot 37515,6 = 1,75^5 \cdot 4000 = 65652,3$

b) Do item a, é possível encontrar a seguinte regularidade:
daqui a x anos, a área coberta será de $4000 \cdot 1,75^x$.



35. a) F; daqui a 1 ano, a população de B será: $100\,000 + 20\,000 = 120\,000$; daqui a 2 anos, a população de B será:

$$120\,000 + \underbrace{24\,000}_{0,2 \cdot 120\,000} = 144\,000$$

- b) F; em três anos, o aumento da população de A será $3 \cdot 25\,000 = 75\,000$; assim a população será $175\,000$.
 c) F; população A $\rightarrow 4 \cdot 25\,000 + 100\,000 = 200\,000$; população B \rightarrow pelo item a, em dois anos a população será de $144\,000$;
 em 3 anos $\rightarrow 144\,000 + 0,2 \cdot 144\,000 = 172\,800$;
 em 4 anos $\rightarrow 172\,800 + 0,2 \cdot 172\,800 = 207\,360$;
 Poderíamos também usar a lei $p(t) = 100\,000 \cdot 1,2^t$:
 $p(4) = 100\,000 \cdot 1,2^4 = 100\,000 \cdot 2,0736 = 207\,360$
 d) F; a lei é $y = 100\,000 + 25\,000x$
 e) V; trata-se da função exponencial $p(t) = 100\,000 \cdot 1,2^t$

36. Observe a construção da lei da função que representa o valor (v) do sofá decorridos t anos ($t = 0, 1, 2, \dots$) da data de sua aquisição:

$$t = 0 \rightarrow v(0) = 2\,000$$

$$t = 1 \rightarrow v(1) = 2\,000 - \underbrace{0,1 \cdot 2\,000}_{10\%} = 2\,000 \cdot \underbrace{(1 - 0,1)}_{0,9} = 1\,800$$

$$t = 2 \rightarrow v(2) = 2\,000 \cdot (1 - 0,1) - \underbrace{0,1 \cdot 2\,000 \cdot (1 - 0,1)}_{10\%} =$$

$$= 2\,000 \cdot (1 - 0,1) \cdot (1 - 0,1) = 2\,000 \cdot (1 - 0,1)^2 = 2\,000 \cdot 0,9^2 = 1\,620$$

$$t = 3 \rightarrow v(3) = 2\,000 \cdot (1 - 0,1)^2 - \underbrace{0,1 \cdot 2\,000 \cdot (1 - 0,1)^2}_{10\%} =$$

$$= 2\,000 \cdot (1 - 0,1)^2 \cdot (1 - 0,1) = 2\,000 \cdot (1 - 0,1)^3 = 2\,000 \cdot 0,9^3 = 1\,458$$

⋮ ⋮ ⋮

$$\text{Após } t \text{ anos, seu valor será: } v(t) = 2\,000 \cdot (1 - 0,1)^t = 2\,000 \cdot 0,9^t. (*)$$

a)

t (anos)	v (reais)
1	1 800
2	1 620
3	1 458
4	$0,9 \cdot 1\,458 \approx 1\,312$

b) Para $t = 7$, obtemos $v(7) = 2\,000 \cdot 0,9^7 \approx 2\,000 \cdot 0,4783 \approx 956,60$

c) De (*), segue que $v(t) = 2\,000 \cdot 0,9^t$

37. a) Para $t = 0$ temos:

$$p(0) = 55 - 30 \cdot e^0 = 55 - 30 = 25 \text{ (unidades)}$$

b) $p(1) = 55 - 30 \cdot e^{-0,2} = 55 - \frac{30}{e^{0,2}} =$

$$= 55 - \frac{30}{1,2} = 55 - 25 = 30 \text{ unidades;}$$

$$p(2) = 55 - 30 \cdot e^{-0,2 \cdot 2} = 55 - 30 \cdot e^{-0,4} =$$

$$= 55 - \frac{30}{e^{0,4}} = 55 - \frac{30}{(e^{0,2})^2} = 55 - \frac{30}{1,2^2} =$$

$= 55 - 20,83 = 34,1\bar{6}$; como devemos ter um número inteiro, arredondamos para 34 unidades.

Assim, o acréscimo é de 4 unidades.

- c) Quando t é suficientemente grande, $e^{-0,2t}$ tende a zero, de modo que $p(t)$ tende a $55 - 30 \cdot 0 = 55$ unidades.

38. a) F; $f(2a) = 10^{2a} = (10^a)^2 = [f(a)]^2$

b) V; $f(a + b) = 10^{a+b} = 10^a \cdot 10^b = f(a) \cdot f(b)$

c) F; $f(-a) = 10^{-a} = \frac{1}{10^a} = \frac{1}{f(a)}$

39. a) $3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$; $S = \{4\}$

b) $2^x = 2^8 \Rightarrow x = 8$; $S = \{8\}$

c) $7^x = 7^1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{1\}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow x = 5$; $S = \{5\}$

e) $5^{x+2} = 5^3 \Rightarrow x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$; $S = \{1\}$

f) $10^{3x} = 10^5 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$; $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

g) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^4 \Rightarrow x = 4$; $S = \{4\}$

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2 \Rightarrow 2^{-x} = 2^1 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$; $S = \{-1\}$

i) $0,1^x = 0,1^2 \Rightarrow x = 2$; $S = \{2\}$

j) $\forall x \in \mathbb{R}, 3^x > 0$; assim a equação $3^x = -3$ não tem solução real; $S = \emptyset$

k) $S = \emptyset$; (análogo ao item j).

40. a) $2^{3x} = 2^4 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$; $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

b) $3^{3x} = 3^2 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$; $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

c) $4^x = 32 \Rightarrow 2^{2x} = 2^5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$; $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

d) $25^x = 625 \Rightarrow 25^x = 25^2 \Rightarrow x = 2$; $S = \{2\}$

e) $3^{2x} = 3^{-3} \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$; $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

$$f) 2^{2x} = 2^{-1} \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}; S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$g) \left(\frac{1}{5^2}\right)^x = 5^3 \Rightarrow 5^{-2x} = 5^3 \Rightarrow -2x = 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2};$$

$$S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

$$h) \left(\frac{1}{2^2}\right)^x = \frac{1}{2^3} \Rightarrow 2^{-2x} = 2^{-3} \Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow x = \frac{3}{2};$$

$$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$i) (10^{-3})^{2x+1} = 10^{\frac{1}{2}} \Rightarrow -6x-3 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x = \frac{7}{2} \Rightarrow x = -\frac{7}{12}; S = \left\{-\frac{7}{12}\right\}$$

$$41. a) 11^{2x^2-5x+2} = 11^0 \Rightarrow 2x^2-5x+2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 2; S = \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$$

$$b) 3^{2x+2} = 3^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 2x+2 = \frac{1}{3} \Rightarrow 2x = -\frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{6}; S = \left\{-\frac{5}{6}\right\}$$

$$c) \left(\frac{4}{5}\right)^x = \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} \Rightarrow x = -1; S = \{-1\}$$

$$d) \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 5^{-x-1} = 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow -x-1 = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{2}; S = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$$

$$e) \left(\frac{1}{4}\right)^{x-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-8 = -2x+1 \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{4}; S = \left\{\frac{9}{4}\right\}$$

$$f) (\sqrt[3]{5^2})^x = (5^{-3})^{-x+3} \Rightarrow 5^{\frac{2x}{3}} = 5^{3x-9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{3} = 3x-9 \Rightarrow x = \frac{27}{7}; S = \left\{\frac{27}{7}\right\}$$

$$42. a) 1994 \rightarrow t = 4 \Rightarrow p(4) = 3,20 \cdot 2^1 = 6,40;$$

$$1999 \rightarrow t = 9 \Rightarrow p(9) = 3,20 \cdot 2^2 = 12,80;$$

$$b) 1990 \rightarrow t = 0 \Rightarrow p(0) = 3,20 \cdot 2^{\frac{1}{5}}; \text{devemos determinar } t \text{ tal que } p(t) = 8 \cdot 3,20 \cdot 2^{\frac{1}{5}}. \text{ Temos:}$$

$$8 \cdot 3,20 \cdot 2^{\frac{1}{5}} = 3,20 \cdot 2^{\frac{t+1}{5}} \Rightarrow 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{t+1}{5}} \Rightarrow 2^{\frac{16}{5}} = 2^{\frac{t+1}{5}},$$

donde:

$$\frac{16}{5} = \frac{t+1}{5} \Rightarrow t = 15; \text{ano de 2005.}$$

$$43. a) t = 0:$$

$$n(0) = 200 \cdot 2^0 = 200 \text{ bactérias}$$

$$b) t = 3 \text{ corresponde a } n(t) = 800:$$

$$800 = 200 \cdot 2^a \cdot 3 \Rightarrow 4 = 2^{3a} \Rightarrow 2^2 = 2^{3a} \Rightarrow 3a = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$c) n(12) = 200 \cdot 2^{\frac{2}{3} \cdot 12} = 200 \cdot 2^8 = 200 \cdot 256 = 51200 \text{ bactérias}$$

$$44. a) 10^{x+x+2} = 10^3 \Rightarrow 10^{2x+2} = 10^3 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}; S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$b) 2^{4x+1} \cdot (2^3)^{-x+3} = 2^{-4} \Rightarrow (4x+1) + (-3x+9) = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+10 = -4 \Rightarrow x = -14; S = \{-14\}$$

$$c) 5^{-3x} : (5^2)^{2+x} = 5 \Rightarrow 5^{-3x} : 5^{4+2x} = 5 \Rightarrow 5^{-3x-(4+2x)} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^{-5x-4} = 5^1 \Rightarrow -5x-4 = 1 \Rightarrow x = -1; S = \{-1\}$$

$$d) (3^{-2})^{x^2-1} \cdot (3^3)^{1-x} = 3^{2x+7} \Rightarrow 3^{-2x^2+2} \cdot 3^{3-3x} = 3^{2x+7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^{-2x^2-3x+5} = 3^{2x+7} \Rightarrow -2x^2-3x+5 = 2x+7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2+5x+2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = -2;$$

$$S = \left\{-\frac{1}{2}, -2\right\}$$

$$e) (6^{\frac{1}{2}})^x : (6^{\frac{2}{3}})^{x-1} = 1 \Rightarrow 6^{\frac{x}{2}} : 6^{\frac{2x-2}{3}} = 6^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6^{\frac{x}{2} - \frac{2x-2}{3}} = 6^0 \Rightarrow 6^{\frac{-x+4}{6}} = 6^0 \Rightarrow \frac{-x+4}{6} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 4; S = \{4\}$$

$$f) (10^{\frac{1}{2}})^x \cdot (10^{-2})^{4x-1} = 10^{-3}$$

$$10^{\frac{x}{2}-8x+2} = 10^{-3}$$

$$10^{\frac{-15x}{2}+2} = 10^{-3}$$

Daí:

$$\frac{-15x}{2} + 2 = -3$$

$$\frac{-15x}{2} = -5 \Rightarrow x = \frac{2}{3}; S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

$$45. a) 2^x \cdot 2^2 - 3 \cdot \frac{2^x}{2^1} = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot \left(2^2 - \frac{3}{2}\right) = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot \frac{5}{2} = 20 \Rightarrow 2^x = \frac{40}{5} \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3; S = \{3\}$$

$$b) 5^x \cdot 5^3 - 5^x \cdot 5^2 - 11 \cdot 5^x = 89$$

$$5^x \cdot (5^3 - 5^2 - 11) = 89$$

$$5^x \cdot 89 = 89 \Rightarrow 5^x = 1 \Rightarrow x = 0; S = \{0\}$$

$$c) 4^x \cdot 4^1 + 4^x \cdot 4^2 - \frac{4^x}{4^1} - \frac{4^x}{4^2} = 315$$

$$4^x \cdot \left(4 + 16 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = 315$$

$$4^x \cdot \left(\frac{320 - 4 - 1}{16}\right) = 315$$

$$4^x \cdot \frac{315}{16} = 315 \Rightarrow 4^x = 16 \Rightarrow x = 2; S = \{2\}$$

$$d) 2^x + 2^x \cdot 2^1 + 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^3 = \frac{15}{2}$$

$$2^x \cdot (1 + 2 + 4 + 8) = \frac{15}{2}$$

$$2^x \cdot 15 = \frac{15}{2} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1; S = \{-1\}$$

46. ■ nível atual: $t = 0 \Rightarrow n(0) = 3,7 \cdot 4^0 = 3,7$ m;

■ devemos determinar t tal que $n(t) = \frac{3,7}{8}$. Temos:

$$\frac{3,7}{8} = 3,7 \cdot 4^{-0,2t} \Rightarrow 2^{-3} = (2^2)^{-0,2t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0,4t = -3 \Rightarrow t = 7,5 \text{ meses.}$$

47. a) $\begin{cases} (2^{-1})^x + 2y = 2^3 \\ 3^{-1} = 3^{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{-x-2y} = 2^3 \\ 3^{-1} = 3^{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-2y = 3 \\ x+y = -1 \end{cases} \Rightarrow$
 $\Rightarrow S = \{(1, -2)\}$

b) $\begin{cases} \left(\frac{7}{2}\right)^x = (7^2)^{y-2x} \\ 2^{y-x} = 2^{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{7^x}{2^x} = 7^{2y-4x} \\ 2^{y-x} = 2^{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x = 4y \\ y-x = 10 \end{cases} \Rightarrow$
 $\Rightarrow S = \{(8, 18)\}$

c) $\begin{cases} 10^{2x} \cdot 10^{\frac{y}{2}} = 10 \\ (10^{-1})^x \cdot (10^{-2})^{\frac{y}{2}} = 10^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10^{2x+\frac{y}{2}} = 10 \\ 10^{-x-\frac{y}{2}} = 10^{-2} \end{cases} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \begin{cases} 2x + \frac{y}{2} = 1 \\ -x - \frac{y}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow S = \{(0, 2)\}$

48. a) Apartamento A: $v(0) = 2^{0+1} + 120 = 122$ ou 122 mil reais

Apartamento B: $v(0) = 6 \cdot 2^{-2} + 248 = 1,5 + 248 = 249,5$ ou 249,5 mil reais

b) Para $t = 4$

A: $v = 2^{t+1} + 120 = 2^5 + 120 = 152$ ou 152 mil reais

B: $v = 6 \cdot 2^{t-2} + 248 = 6 \cdot 2^2 + 248 = 272$ ou 272 mil reais

O apartamento B vai valer mais.

c) $v_A(t) = v_B(t) \Rightarrow 2^{t+1} + 120 = 6 \cdot 2^{t-2} + 248$

$$2^t \cdot 2 + 120 = 6 \cdot \frac{2^t}{2^2} + 248$$

$$2 \cdot 2^t - \frac{3}{2} \cdot 2^t = 128 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^t = 128$$

$$2^t = 256 \Rightarrow t = 8 \text{ anos}$$

49. a) $t = 0 \Rightarrow n(t) = 10\,000$

$$10\,000 = 15\,000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{0+k} \Rightarrow \frac{10\,000}{15\,000} = \left(\frac{3}{2}\right)^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^k \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^k \Rightarrow k = -1$$

b) $n(t) = 15\,000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{t-1}$

$$n(3) = 15\,000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 15\,000 \cdot \frac{9}{4} = 33\,750 \text{ (habitantes)}$$

50. a) $100^x = (10^2)^x = (10^x)^2$; fazendo $10^x = t$, segue a equação:

$$\frac{t^2 - 1}{t + 1} = 9 \Rightarrow t^2 - 9t - 10 = 0 \Rightarrow t = 10 \text{ ou } t = -1 \quad (*)$$

Se $t = 10$, $10^x = 10 \Rightarrow x = 1$; $S = \{1\}$.

(*) (não serve, pois anula o denominador)

b) Fazendo $5^x = y$, segue a equação:

$$y^2 - 23y - 50 = 0 \Rightarrow y = 25 \text{ ou } y = -2$$

$$y = 25 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow x = 2$$

$$y = -2 \Rightarrow 5^x = -2, \text{ não ocorre pois } \forall x \in \mathbb{R}, 5^x > 0; S = \{2\}$$

c) $7^x = t \Rightarrow t^2 - t - 42 = 0 \Rightarrow t = 7 \text{ ou } t = -6$

$$(7^x = 7 \Rightarrow x = 1) \text{ ou } (7^x = -6 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}); S = \{1\}$$

d) $4^x \cdot 4^1 - 33 \cdot 2^x + 8 = 0$

$$4^x = (2^x)^2 = 2^{2x}; \text{ fazendo } 2^x = y, \text{ vem:}$$

$$4 \cdot y^2 - 33 \cdot y + 8 = 0 \Rightarrow y = \frac{33 \pm 31}{8}$$

$$\begin{cases} y = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3 \\ y = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -2 \end{cases}; S = \{3, -2\}$$

e) $\left(\frac{1}{4}\right)^{1-x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x-2} - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = 28 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4^{-1+x} + 2^{x+2} - 5 \cdot 2^{-1+x} = 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4^x}{4^1} + 2^x \cdot 2^2 - 5 \cdot \frac{2^x}{2^1} = 28; 2^x = y$$

$$\frac{y^2}{4} + 4y - \frac{5y}{2} = 28 \Rightarrow \frac{y^2 + 16y - 10y}{4} = 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 + 6y - 112 = 0 \Rightarrow y = \frac{-6 \pm 22}{2}$$

$$\begin{cases} y = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3 \\ y = -14 \Rightarrow 2^x = -14 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \end{cases}; S = \{3\}$$

51. De acordo com o que vimos no exemplo introdutório do capítulo, se a população atual de um município é A e ela cresce à taxa de $i\%$ ao mês, daqui a n meses a população será:

$$A \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n$$

Como $i = 200\% = \frac{200}{100} = 2$, conclui-se que, daqui a n meses, a população de insetos será $p(n) = A \cdot 3^n$.
É preciso determinar n tal que $p(n) = 243 \cdot A$:
 $243 \cdot A = A \cdot 3^n \Rightarrow 3^5 = 3^n \Rightarrow n = 5$ meses.

52. a) $2^x \geq 2^7 \Rightarrow x \geq 7; S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$

b) $3^x < 27 \Rightarrow 3^x < 3^3 \Rightarrow x < 3; S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow x > 2$ (observe que $0 < \frac{1}{3} < 1$);
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^x \Rightarrow 2 \geq x$, isto é, $x \leq 2$;
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

53. a) $6^{x-2} \geq 6^{-2} \Rightarrow x-2 \geq -2 \Rightarrow x \geq 0; S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-2} > \left(\frac{1}{5}\right)^0 \Rightarrow 3x-2 < 0 \Rightarrow x < \frac{2}{3};$
 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{2}{3}\right\}$

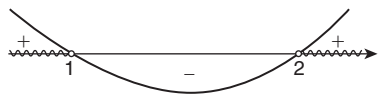
c) $\left(2\frac{1}{2}\right)^x \leq 2^{-4} \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} \leq 2^{-4} \Rightarrow \frac{x}{2} \leq -4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \leq -8; S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -8\}$

d) $\left(\frac{1}{100}\right)^x > 10^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (10^{-2})^x > 10^{\frac{1}{2}} \Rightarrow -2x > \frac{1}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow -4x > 1 \Rightarrow x < -\frac{1}{4}; S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{4}\right\}$

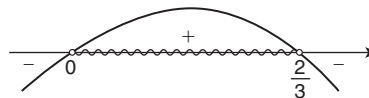
54. a) $3^x \geq \sqrt{3}^x \Rightarrow 3^x \geq \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x \Rightarrow 3^x \geq 3^{\frac{x}{2}} \Rightarrow x \geq \frac{x}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x - \frac{x}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \geq 0 \Rightarrow x \geq 0;$
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

b) Como $4^{-x+3} > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, a desigualdade $4^{-x+3} > -2$ é satisfeita para todo $x \in \mathbb{R}; S = \mathbb{R}$.

c) $4^{x^2-3x} > 4^{-2} \Rightarrow x^2-3x > -2 \Rightarrow x^2-3x+2 > 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x < 1$ ou $x > 2; S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1$ ou $x > 2\}$



d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-6} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2-6} \Rightarrow 2x-6 > 3x^2-6 \Rightarrow$
 $\Rightarrow -3x^2 + 2x > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{2}{3};$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{2}{3}\right\}$$

55. a) $t = 0 \Rightarrow n(0) = 5000 - 10 \cdot 2^{0-1} =$

$$= 5000 - 10 \cdot \frac{1}{2} = 4995 \text{ peixes}$$

b) $n(t) < 4920 \Rightarrow 5000 - 10 \cdot 2^{t-1} < 4920 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 80 < 10 \cdot 2^{t-1} \Rightarrow 8 < 2^{t-1} \Rightarrow 2^3 < 2^{t-1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3 < t-1 \Rightarrow t > 4$

c) Ainda haverá peixes no lago se $n(t) > 0$, isto é,
 $5000 - 10 \cdot 2^{t-1} > 0$ (*)

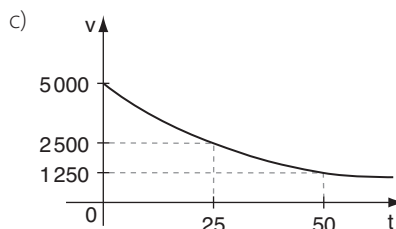
Se $t = 9$, (*) é válida: $5000 - 10 \cdot 2^8 > 0$.

Se $t = 10$, (*) não é válida, pois:

$5000 - 10 \cdot 2^9 = 5000 - 5120 < 0$; logo, em dez anos não haverá mais peixes no lago.

56. a) $t = 0 \Rightarrow v(0) = 5000 \cdot 4^0 = 5000$ (reais)

b) $v(t) < 2500 \Rightarrow 5000 \cdot 4^{-0,02t} < 2500 \Rightarrow 4^{-0,02t} < \frac{1}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow (2^2)^{-0,02t} < 2^{-1} \Rightarrow -0,04t < -1 \Rightarrow t > \frac{1}{0,04} \Rightarrow$
 $\Rightarrow t > 25$



57. a) $3^x - 1 \geq 0 \Rightarrow 3^x \geq 3^0 \Rightarrow x \geq 0$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que $e^x > 0$.

Assim, o domínio de $y = \sqrt{e^x}$ é \mathbb{R} .

Desafio

- 1ª viagem: atravessam juntos os participantes (1) e (2), gastando 2 minutos.
 - 2ª viagem: o participante (1) volta sozinho, deixando na outra margem o participante (2). Tempo gasto: 1 minuto.
 - 3ª viagem: atravessam juntos a pinguela os participantes (3) e (4). Tempo gasto: 10 minutos.
 - 4ª viagem: o participante (2) volta sozinho. Tempo gasto: 2 minutos.
 - 5ª viagem: atravessam juntos a pinguela os participantes (1) e (2). Tempo gasto: 2 minutos.
- Tempo total gasto: $2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17$ minutos.

Como $\forall x \in \mathbb{R}, 3^x > 0$, segue que

$$y = 3^x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

- b) Como, para todo $x \in \mathbb{R}, 9^x \neq 0$, podemos dividir os dois membros por 9^x :

$$\frac{4^x + 6^x}{9^x} = \frac{2 \cdot 9^x}{9^x} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2; \left(\frac{2}{3}\right)^x = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow t = 1$$

ou $t = -2$; como $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$, segue que

$$t = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$S = \{0\}$$

- c) $(2^4)^{2x+3} - (2^4)^{2x+1} = 2^{8x+12} - 2^{6x+5}$

$$2^{8x+12} - 2^{8x+4} = 2^{8x+12} - 2^{6x+5}$$

$$2^{8x+4} = 2^{6x+5} \Rightarrow 8x + 4 = 6x + 5 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

7. a) Da figura, devemos ter

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 + 1 = 2 \text{ m}$$

b) ■ $f(x_A) = f(x) = \frac{5}{2}$

■ A distância entre as hastes é $2 \cdot |x_A|$ (ou $2 \cdot x_B$)

$$f(x_B) = \frac{5}{2} \Rightarrow 2^{x_B} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_B} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2^{x_B} + \frac{1}{2^{x_B}} = \frac{5}{2}.$$

Seja $2^{x_B} = t$,

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = 2$$

■ Se $t = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{x_B} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_B = -1$ (não convém pela figura)

■ Se $t = 2 \Rightarrow 2^{x_B} = 2 \Rightarrow x_B = 1$

A distância pedida é $2 \cdot x_B = 2 \cdot 1 = 2 \text{ m}$.

8. ■ $x = 1$ e $y = 0,2 \Rightarrow 0,2 = k \cdot 1^r \Rightarrow k = 0,2$

■ $x = 32$ e $y = 0,8 \Rightarrow 0,8 = k \cdot 32^r$; como $k = 0,2$ vem:

$$0,8 = 0,2 \cdot 32^r \Rightarrow \frac{0,8}{0,2} = 32^r \Rightarrow 4 = 32^r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^2 = 2^{5r} \Rightarrow r = \frac{2}{5}$$

Por fim, se $y = 1,8$, temos:

$$1,8 = 0,2 \cdot x^{\frac{2}{5}} \Rightarrow 9 = x^{\frac{2}{5}} \Rightarrow \sqrt[5]{x^2} = 9 \Rightarrow x^2 = 9^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 3^{10} \Rightarrow x = \sqrt{3^{10}} = 3^5 = 243$$

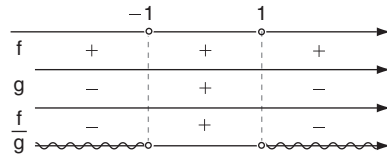
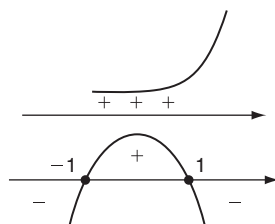
A soma dos dígitos é: $2 + 4 + 3 = 9$.

9. a)

$$\frac{\overbrace{2^x + 1}^f}{\underbrace{1 - x^2}_g} \leq 0$$

$$f(x) = 2^x + 1$$

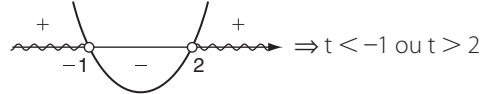
$$g(x) = 1 - x^2$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$$

b) $2^x - 1 > \frac{2^1}{2^x};$

$$2^x = t \Rightarrow t - 1 > \frac{2}{t} \Rightarrow t^2 - t - 2 > 0 \Rightarrow t^2 - t - 2 > 0$$



Como $t = 2^x > 0$, temos que $t > 2 \Rightarrow 2^x > 2 \Rightarrow x > 1$

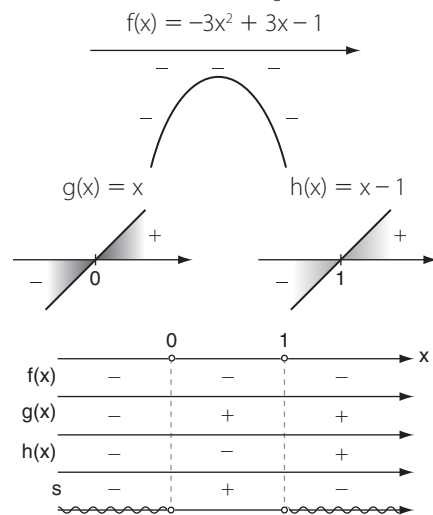
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

c) $2^{\frac{1}{x}} < 2^2 \cdot (2^2)^{\frac{x}{2(x-1)}} \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} < 2^2 \cdot 2^{\frac{x}{x-1}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} < 2^{2 + \frac{x}{x-1}} \Rightarrow \frac{1}{x} < 2 + \frac{x}{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} - 2 - \frac{x}{x-1} < 0$$

$$\frac{x-1-2x(x-1)-x^2}{x \cdot (x-1)} < 0 \Rightarrow \frac{\overbrace{-3x^2+3x-1}^f}{\underbrace{x \cdot (x-1)}_{\substack{g \quad h}}} < 0$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 1\}$$

10. a) Do enunciado temos que $p(t) = 1$ quando $t = 30$ (ano 2000):

$$1 = 0,5 \cdot 2^{30k} \Rightarrow \frac{1}{0,5} = 2^{30k} \Rightarrow 2 = 2^{30k} \Rightarrow k = \frac{1}{30}$$

- b) Devemos determinar t tal que $p(t) = 16$:

$$16 = 0,5 \cdot 2^{\frac{1}{30}t} \Rightarrow 32 = 2^{\frac{1}{30}t} \Rightarrow 2^5 = 2^{\frac{1}{30}t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 = \frac{t}{30} \Rightarrow t = 150 \text{ (ano de 2120)}$$

11. Observe, inicialmente, que a função $y = -x^2 + 2x - 5$ admite um ponto de máximo:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$y_v = -1^2 + 2 \cdot 1 - 5 = -4$$

Desse modo, o maior valor possível para o expoente da base $\frac{3}{1}$ é -4 .

$$\text{Assim, } f_{\min} = \left(\frac{3}{1}\right)^{-4} = 81.$$

Note que, para um valor menor no expoente (-5 , por exemplo), f assume um valor maior que 81 :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-5} = 3^5 = 243$$

$$12. 2^x + \frac{1}{2^x} = t (*) \text{, observe que } t > 0, \text{ pois } 2^x > 0 \forall x \in \mathbb{R};$$

como $2^x \neq 0$, podemos multiplicar os dois membros por 2^x :

$$2^x \cdot \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) = t \cdot 2^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{2x} - t \cdot 2^x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2^x)^2 - t \cdot 2^x + 1 = 0$$

$$\Delta = t^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = t^2 - 4$$

■ Se $\Delta < 0$, a equação não tem soluções, isto é, $t^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < t < 2$, e pode-se dizer que, se $t < 2$, a equação não tem raízes.

■ Se $\Delta = 0$, isto é, $t^2 - 4 = 0$, obtemos $t = \pm 2$.

Como $t = 2^x > 0$, devemos ter $t = 2$.

■ Se $\Delta > 0$, isto é, $t^2 - 4 > 0$, vem $t < -2$ ou $t > 2$. Como

$$t = 2^x > 0, \text{ devemos ter } t > 2.$$

Assim temos:

$t < 2 \Rightarrow$ não existem raízes reais

$t = 2 \Rightarrow$ uma única raiz

$t > 2 \Rightarrow 2$ raízes reais e distintas

$$13. \text{ Do enunciado temos: } t = 5600 \Rightarrow C(t) = \frac{2}{C_0}$$

Dai:

$$\frac{2}{C_0} = \frac{2}{10^n \cdot 5600} \Rightarrow \frac{2}{1} = 10^{5600n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (10^n)^{5600} = \frac{2}{1} \Rightarrow 10^n = \sqrt[5600]{2} = \sqrt[5600]{\frac{2}{1}} \text{ (n é constante)}$$

Devemos determinar t tal que $C(t) = \frac{32}{C_0}$:

$$\frac{2}{C_0} \cdot 10^{nt} = \frac{32}{1} \Rightarrow \frac{2}{1} = (10^n)^t$$

$$\text{Como } 10^n = \sqrt[5600]{\frac{2}{1}} \text{ vem:}$$

$$\frac{32}{1} = \left(\sqrt[5600]{\frac{2}{1}}\right)^t \Rightarrow \left(\frac{2}{1}\right)^5 = \left(\frac{2}{1}\right)^t$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{1}\right)^5 = \left(\frac{2}{1}\right)^t \Rightarrow \frac{5600}{1} = 5 \Rightarrow t = 28000 \text{ anos}$$

$$14. \text{ Televisor novo } \Leftrightarrow t = 0:$$

$$4000 = a \cdot b^0 \Rightarrow a = 4000$$

■ Daqui a um ano o televisor valerá:

$$\frac{4}{3} \cdot 4000 = 3000$$

$$\text{Dai: } 3000 = a \cdot b^1 \Rightarrow 3000 = 4000 \cdot b \Rightarrow b = \frac{4}{3}$$

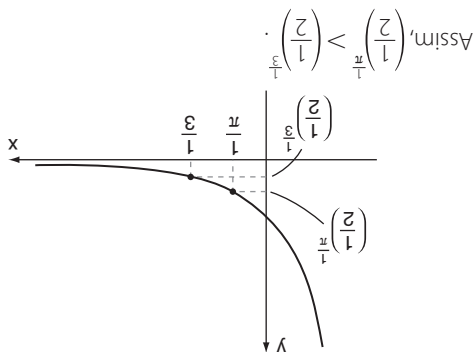
A lei é:

$$y = 4000 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^t$$

Para $t = 2$, o televisor valerá:

$$y = 4000 \cdot \frac{16}{9} = 2250 \text{ (reais)}$$

$$15. \text{ Note que } \pi > 3 \Rightarrow \frac{\pi}{1} < \frac{3}{1}; \text{ veja o gráfico de } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x:$$



$$16. 2^{2x} \cdot 2^2 - \frac{4}{3} \cdot 2^x \cdot 2^2 < 1 \Rightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 1 < 0; \text{ seja } 2^x = t.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad 2^x > -\frac{4}{1} &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \text{ satisfaz} \\ \textcircled{2} \quad 2^x < 1 &\Rightarrow 2^x < 2^0 \Rightarrow x < 0 \\ \textcircled{1} \cap \textcircled{2} &\Rightarrow 5 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}. \end{aligned}$$

O maior número inteiro que satisfaz é $x = -1$.

$$17. \text{ ■ } (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})^{-1} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^{-1} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{1} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} =$$

$$= \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$$

Dai, a expressão dada se reduz a:

$$= \frac{a + b}{b - a} \cdot \left[\sqrt{a} + \sqrt{b} - \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) - \frac{a - b}{a - b}\right] =$$

$$= \frac{a + b}{b - a} \cdot \frac{a - b}{a - b} =$$

$$= \frac{b - a}{b - a} \cdot \frac{a - b}{a - b} = -1$$

22.a) Como \sqrt{x} é real se $x \geq 0$, o programa só pode ser executado para $x \geq 0$. Observe que x^{-2} não é real se $x = 0$. No entanto, só será necessário calcular x^{-2} se $\sqrt{x} = -1 > 1$ (e, para $x = 0$, $\sqrt{0} = 1 < 1$).

$$\begin{aligned} v(25) &= 4320 \text{ reais} \\ v(25) &= 1000 \cdot 3,24 \cdot \sqrt{\frac{10}{18}} = 3240 \cdot \sqrt{\frac{5}{9}} = 3240 \cdot \frac{2}{3} \\ v(25) &= 1000 \cdot 1,8^2 \cdot \sqrt{1,8} \\ v(25) &= 1000 \cdot (1,06^{10})^2 \cdot (1,06^{10})^{\frac{1}{2}} \\ v(25) &= 1000 \cdot 1,06^{20} \cdot 1,06^5 \\ d) \quad v(25) &= 1000 \cdot (1,06)^{25} \\ &= 1800 - 1000 = 800 \text{ reais} \\ c) \quad v(10) &= 1000 \cdot 1,06^{10} = 1000 \cdot 1,8 = 1800; \text{ juros} = \\ &= 1500 \text{ reais} \\ v(7) &= 1000 \cdot 1,06^7 = 1000 \cdot 1,06^3 \cdot 1,06^4 = 1000 \cdot 1,2 \cdot 1,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21.a) \quad v(n) &= 1000 \cdot (1,06)^n \\ b) \quad v(7) &= 1000 \cdot 1,06^7 = 1000 \cdot 1,06^3 \cdot 1,06^4 = 1000 \cdot 1,2 \cdot 1,25 \\ E(10) &= 6 \cdot 2^{-\frac{5}{10}} = 6 \cdot 2^{-2} = 1,5 \text{ mm} \\ \text{Assim, } E(t) &= 6 \cdot 2^{-\frac{5}{10}t} \\ \frac{2}{1} &= 2^{5b} \Rightarrow b = -\frac{1}{5} \\ \blacksquare \quad t = 5; E(t) &= 3 \Rightarrow 3 = a \cdot 2^{5 \cdot (-\frac{1}{5})} \Rightarrow 3 = a \cdot 2^{-1} \Rightarrow a = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{4}{1} &= 2^{-t} \Rightarrow 2^{-2} = 2^{-t} \Rightarrow t = 2 \text{ minutos} \\ \frac{4}{1} &= e^{-\ln 2 \cdot t} \Rightarrow \frac{4}{1} = (e^{\ln 2})^{-t} \Rightarrow \frac{4}{1} = (e^{\log_e 2})^{-t} \Rightarrow \\ 37,5 &= 25 + 50 \cdot e^{-\ln 2 \cdot t} \Rightarrow 12,50 = 50 \cdot e^{-\ln 2 \cdot t} \\ Y_a &= 25^\circ \text{C}; \\ \blacksquare \quad \text{Devemos determinar } t \text{ para que } Y(t) &= 37,5^\circ \text{C, com} \\ \Rightarrow e^k &= \frac{2}{1} \Rightarrow \ln e^k = \ln \frac{2}{1} \Rightarrow k = -\ln 2 \\ 50 &= 25 + B \cdot e^{k \cdot 1} \Rightarrow 50 = 25 + 50 \cdot e^k \Rightarrow 25 = 50 \cdot e^k \Rightarrow \\ \blacksquare \quad t = 1, Y_a &= 25^\circ \text{C}; Y(t) &= 50^\circ \text{C} \\ 75 &= 25 + B \cdot e^{k \cdot 0} \Rightarrow 75 = 25 + B \Rightarrow B = 50 \\ \blacksquare \quad t = 0, Y_a &= 25^\circ \text{C e } Y(t) &= 75^\circ \text{C} \end{aligned}$$

19. Do enunciado, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} S &= \{2\} \\ b) \quad \frac{10^x + (2 \cdot 10)^x}{10^x + 2^x} &= 100 \Rightarrow \frac{10^x + 2^x}{10^x + 2^x} = 100 \Rightarrow x = 2; \\ S &= \{-1\} \\ \text{Assim, } \left(\frac{2}{1}\right)^x &= 2 \Rightarrow x = -1 \\ \text{Fazendo } \left(\frac{2}{1}\right)^x &= t, \text{ obtemos: } t + t^2 = 6 \Rightarrow t = 6 \Rightarrow t = 2 \\ 18.a) \quad \frac{10^x + 5^x}{10^x} &= 6 \Rightarrow \frac{20^x}{10^x} + \frac{20^x}{5^x} = 6 \Rightarrow \left(\frac{2}{1}\right)^x + \left(\frac{4}{1}\right)^x = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27. \blacksquare \quad t = 0 &\Rightarrow f(t) = \frac{5}{1} \cdot p \\ \frac{5}{1} \cdot p &= \frac{1+k \cdot 2^{-4 \cdot 0}}{1} \Rightarrow \frac{5}{1} = \frac{1+k}{1} \Rightarrow k = 4 \quad (0-0 \text{ é } F) \\ \blacksquare \quad t = 2 &\Rightarrow f(t) = \frac{3}{1} \cdot p \\ \frac{3}{1} \cdot p &= \frac{1+k \cdot 2^{-2 \cdot 2}}{1} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{1+k \cdot 2^{-4}}{1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 + 4 \cdot 2^{-4} = 3 \Rightarrow 4 \cdot 2^{-4} = 2 \Rightarrow 2^{-2A} = 2^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A = \frac{1}{2} \quad (1-1 \text{ é } F) \\ \text{Assim, } f(t) &= \frac{1 + 4 \cdot 2^{-\frac{1}{2}t}}{p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26. (01) \quad V.V. \text{ máximo} &= 200 \text{ milhares de reais} \\ (02) \quad F.V. \text{ inicial} &= 100 \text{ milhares} \\ f(25) &< f(20) \text{ e } f(20) = 100 \text{ milhares} \\ (04) \quad V. \text{ Existe } t > 20 \text{ tal que } f(t) &= 37,5 \text{ milhares.} \\ (08) \quad V. f(20) &= f(0) = 100 \text{ milhares} \\ (16) \quad V. V(30) &= 200 \cdot 2^{\frac{100}{12,5} \cdot (30-10)} = 200 \cdot 2^{-4} = 12,5 \text{ milhares} \\ \text{de reais; } \frac{100}{12,5} &= \frac{8}{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25. v(3) &= 50000 \cdot 0,64^{\frac{3}{2}} \\ v(3) &= 50000 \cdot \sqrt{0,64^3} \\ v(3) &= 50000 \cdot 0,64^2 \cdot 0,64 \\ v(3) &= 50000 \cdot 0,64 \cdot 0,8 = 25600 \\ \text{O valor do pedido é R\$ } 25600,00. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24. \text{ Antônio: } t = 10 \text{ min} &\Rightarrow P(10) = P_0 \cdot e^{10k} \Rightarrow \frac{P(10)}{P_0} = e^{10k} = Q \\ \text{Beatriz: } t = 60 \text{ min} &\Rightarrow P(60) = P_0 \cdot e^{60k} \Rightarrow \frac{P(60)}{P_0} = e^{60k} = \\ &= \underbrace{(e^{10k})^6}_{\text{valor de Antônio}} = Q^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23. a) \quad x + \frac{x}{1} &= t \Rightarrow \left(x + \frac{x}{1}\right)^2 = t^2 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1} = t^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 + \frac{x^2}{1} = t^2 - 2 \\ b) \quad \text{Façamos } x + \frac{x}{1} &= t \\ 3^{t^2-2} &= \frac{3^t}{81} \Rightarrow 3^{t^2-2} = 3^{4-t} \Rightarrow t^2 - 2 = 4 - t \Rightarrow \\ t^2 + t - 6 &= 0 \Rightarrow t = 2, \text{ isto é, } x + \frac{x}{1} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + \\ + 1 &= 0. \\ \Rightarrow (x-1)^2 &= 0 \Rightarrow x = 1 \\ S &= \{1\} \end{aligned}$$

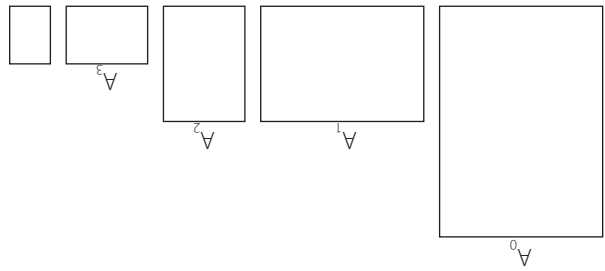
$$\begin{aligned} b) \quad x = 0 &\Rightarrow \sqrt{0} - 1 = -1 < 1 \Rightarrow (0 + 2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \\ x = 4 &\Rightarrow \sqrt{4} - 1 = 1 = 1 \Rightarrow (4 + 2)^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6} \\ x = 9 &\Rightarrow \sqrt{9} - 1 = 2 > 1 \Rightarrow 2 \cdot 9^{-2} = 2 \cdot \frac{1}{81} = \frac{2}{81} \end{aligned}$$

de papel A_4 pesa $500 \cdot \frac{1}{16} \cdot 75 = 2343,75$ g.

Cada folha A_4 pesa $\frac{1}{16} \cdot 75$ g. A resma (com 500 folhas)

contém 8 folhas A_3 e 16 folhas A_4 .

A_0 contém 4 folhas A_2 . Seguindo esse raciocínio, A_0 contém 2 folhas A_1 . Como A_1 contém 2 folhas A_2 ,



c)

$$a = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2} = \sqrt{2}$$

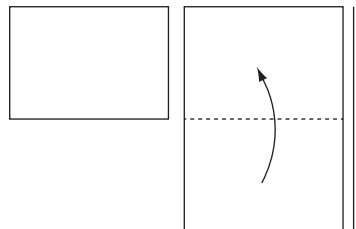
$$\Rightarrow b = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot a = b \cdot \sqrt{2}, \text{ temos: } a = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{ter } a \cdot b = 1 \Rightarrow b \cdot \sqrt{2} \cdot b = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Como o formato A_0 tem área igual a 1 m^2 , devemos

a) Devemos ter:

$$\frac{b}{a} = \frac{b}{\frac{1}{b}} = b^2 \Rightarrow \frac{2}{a^2} = b^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 2 \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{2}$$



29.

$$\frac{1}{500} = 500.$$

Quando t é arbitrariamente grande, $2^t \rightarrow \infty$, de modo que $\frac{2^t}{2^t} \rightarrow 0$. Assim, o número de pássaros tende a

b) Notemos que $P(t) = \frac{500}{1 + \frac{2^t}{2^t}}$

$$\Rightarrow 4 \cdot 2^{2-t} = 1 \Rightarrow 2^{2-t} = 2^{-2} \Rightarrow t = 4 \text{ anos}$$

$$28. a) 400 = \frac{500}{1 + \frac{2^t}{2^t}} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{1 + \frac{2^t}{2^t}}{1 + \frac{2^t}{2^t}} \Rightarrow 4 + 4 \cdot 2^{2-t} = 5 \Rightarrow$$

■ $t = 10, f(10) = \frac{1 + 4 \cdot 2^{-5}}{1 + \frac{2^t}{2^t}} = \frac{1,125}{1,125} \approx 0,89P (4-4 \text{ é } F).$

■ Se $t = 6, f(6) = \frac{1 + 4 \cdot 2^{-3}}{1 + \frac{2^t}{2^t}} = \frac{1 + \frac{4}{8}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{2P}$

■ $t = 4 \text{ e } P = 300 \Rightarrow f(4) = \frac{1 + 4 \cdot 2^{-2}}{1 + \frac{2^t}{2^t}} = \frac{1 + 1}{300} = 150$

A quantidade mínima é, portanto, $50\sqrt{2}$ mg.

$$q_1 + 150\sqrt{2} \geq 200\sqrt{2} \Rightarrow q_1 \geq 50\sqrt{2} \text{ mg}$$

$$(q_1 + 150\sqrt{2}) \cdot 2^{-\frac{60}{30} \cdot 30} \geq 200 \Rightarrow (q_1 + 150\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{2^6} \geq 200$$

devemos ter:
Para mantê-lo sedado por pelo menos mais 30 minutos, de droga no organismo do animal é $(q_1 + 150\sqrt{2})$ mg. Ao receber a 2ª dose de q_1 miligramas, a quantidade necessária para mantê-lo sedado é $10 \cdot 20 = 200$ mg.

b) Como o animal pesa 10 kg, a quantidade de droga

$$\Rightarrow q(30) = \frac{\sqrt{2}}{300} = 150\sqrt{2} \text{ mg}$$

Para $t = 30$, vem:

$$\text{Assim, } q(t) = q_0 \cdot 2^{-\frac{60}{30} \cdot t} = 300 \cdot 2^{-\frac{60}{30} \cdot t}.$$

$$\frac{q_0}{2} = q_0 \cdot 2^{-60k} \Rightarrow \frac{1}{2} = 2^{-60k} \Rightarrow 2^{-1} = 2^{-60k} \Rightarrow k = \frac{1}{60}$$

$$q(t) = \frac{q_0}{2} \text{ e } t = 60:$$

31. a) Como a meia-vida da droga é de 60 minutos, temos

Logo, o menor valor de n é 20.

$$2^{20} = 2^{10} \cdot 2^{10} = 10^{3,01} \cdot 10^{3,01} = 10^{6,02} > 10^6$$

$$2^{19} = 2^9 \cdot 2^{10} = 10^{2,7} \cdot 10^{3,01} = 10^{5,71} < 10^6$$

Da tabela temos que:

$$\frac{2^n}{1} < 10^{-6} \Rightarrow \frac{1}{10^{-6}} < 2^n \Rightarrow 2^n > 10^6$$

$$\frac{2^n}{1} < \frac{100}{0,0001} \Rightarrow \frac{2^n}{1} < \frac{10^4}{10^{-4}} \Rightarrow$$

A condição do problema é:

$$n\text{-ésima vez: a área de cada parte é } \frac{A_0}{2^n}.$$

:

$$3^\circ \text{ vez: a área de cada parte é } \frac{A_0}{2^3}.$$

$$2^\circ \text{ vez: a área de cada parte é } \frac{1}{2} \cdot \frac{A_0}{2} = \frac{A_0}{2^2}.$$

$$1^\circ \text{ vez: a área de cada parte é } \frac{A_0}{2}.$$

30. Seja A_0 a área "inicial" da folha.

$$32. \left(5x + \frac{5x}{2}\right) \cdot \left(2x - \frac{2x}{2}\right) = 6000$$

$$5x \cdot 2x - \frac{5x \cdot 2x}{2} + \frac{5x \cdot 2x}{2} - \frac{5x \cdot 2x}{2} = 6000$$

Fazendo $5x \cdot 2x = 10x = t$, vem:

$$t - \frac{t}{2} - \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = 6000$$

$$\frac{10t - 5t + 2t - t}{10} = 6000$$

$$\frac{6t}{10} = 6000 \Rightarrow t = 10000 = 10^4$$

$$\text{Daí, } 10x = 10^4 \Rightarrow x = 4.$$

$$S = \{4\}$$

33. a) No congelador, temos: $\begin{cases} T_A = -18^\circ\text{C} & \textcircled{1} \\ T(90) = 0 & \textcircled{2} \\ T(270) = -16 & \textcircled{3} \end{cases}$

$\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$: $0 = -18 + \alpha \cdot 3^{\frac{90}{90}} \Rightarrow \alpha \cdot 3^1 = 18$ $\textcircled{4}$

$\textcircled{1}$ e $\textcircled{3}$: $-16 = -18 + \alpha \cdot 3^{\frac{270}{90}} \Rightarrow \alpha \cdot 3^3 = 2$ $\textcircled{5}$

Dividindo membro a membro $\textcircled{4}$ por $\textcircled{5}$, obtemos

$$3^{-180\beta} = 9 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{90}$$

Em $\textcircled{4}$, obtemos: $\alpha \cdot 3^{-1} = 18 \Rightarrow \alpha = 54$

b) $T(t) = -18 + 54 \cdot 3^{-\frac{1}{90}t}$

Devemos determinar t tal que:

$T(t) = -18 + \frac{2}{3}$, isto é:

$$-18 + \frac{2}{3} = -18 + 54 \cdot 3^{-\frac{1}{90}t}$$

$$\frac{1}{3} = 27 \cdot 3^{-\frac{1}{90}t} \Rightarrow 3^{-\frac{1}{90}t} = \frac{1}{81}$$

$$-\frac{1}{90}t = -4 \Rightarrow t = 360 \text{ minutos}$$

Testes

7. $\sqrt[n]{\frac{72}{9^n \cdot 9^2 - 3^{2n} \cdot 3^2}} = \sqrt[n]{\frac{72}{9^n \cdot (81 - 9)}} = \sqrt[n]{\frac{72}{9^n \cdot 72}} = \sqrt[n]{\frac{1}{9^n}} = \frac{1}{9} = 3^{-2}$

Resposta: a.

8. infância: $A = k \cdot m^{\frac{2}{3}}$
maioridade: $A' = k \cdot (8m)^{\frac{2}{3}} = k \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot m^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} \cdot \underbrace{k \cdot m^{\frac{2}{3}}}_A = 4 \cdot A$

Resposta: b.

9. Do gráfico, temos que $M(150) = 4$.
Na alternativa a: $M(150) = 2^{4-2} = 4$
Na alternativa b: $M(150) = 2^{4-3} = 2$ (não serve)
Na alternativa c: $M(150) = 2^{5-3} = 4$
Na alternativa d: $M(150) = 2^{5-1} = 16$ (não serve)
 $M(0) = 16$
Na alternativa c: $M(0) = 2^5 = 32 \neq 16$ (não serve)
Na alternativa a: $M(0) = 2^4 = 16$
Resposta: a.

10. ■ Temperatura do sol: 6 000 K
■ Temperatura da estrela em questão: 30 000 K \cong 28 000 K
■ Luminosidade da estrela em questão: $2 \cdot 10^4$
■ Luminosidade do sol (classe espectral G2): 1
■ Relação entre as luminosidades: $\frac{2 \cdot 10^4}{1} = 20 000$
Resposta: a.

13. ■ 1 000 000 000 = 10^9
■ Número de dias = $\frac{10^9}{80} = \frac{10^2}{80} \cdot 10^7 = 1,25 \cdot 10^7$
Resposta: c.

14. $t = 0$ e $N = 10 \Rightarrow 10 = k \cdot 2^{a \cdot 0} \Rightarrow k \cdot 1 = 10 \Rightarrow k = 10$
 $t = 2$ e $N = 20 \Rightarrow 20 = k \cdot 2^{a \cdot 2} \Rightarrow 20 = 10 \cdot 2^{2a} \Rightarrow 2^{2a} = 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Daí: $N = 10 \cdot 2^{\frac{1}{2}t}$

$t = 4 \Rightarrow N(4) = 10 \cdot 2^{\frac{1}{2} \cdot 4} = 40$

$t = 8 \Rightarrow N(8) = 10 \cdot 2^{\frac{1}{2} \cdot 8} = 160$ } O aumento é de 120 mil.

Resposta: d.

15. $x_A = x_B = 1 \Rightarrow y_B = 2^1 = 2$

$x_C = x_D = 2 \Rightarrow y_C = 2^2 = 4$

Daí: AD = 1, AB = 2, CD = 4, e a área pedida é:

$$\frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = \frac{(2 + 4) \cdot 1}{2} = 3 \text{ u.a.}$$

Resposta: c.

21. A quantidade q (em mg) de esteroides, após t horas, é dada por:

$$q(t) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{4}} \cdot q_0, \text{ sendo } q_0 = 10 \text{ mg}$$

Observe que "eliminar $\frac{1}{4}$ da quantidade de esteroides"

significa dizer que, após 4 horas, a quantidade é $\frac{3}{4}$ da quantidade de 4 horas atrás.

A condição do problema é:

$$q(t) < 1, \text{ isto é, } \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{4}} \cdot 10 < 1 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{4}} < \frac{1}{10}$$

Como $\left(\frac{4}{3}\right)^8 \cong 10$, temos que $\frac{1}{10} \cong \left(\frac{3}{4}\right)^8$. Daí:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{4}} < \left(\frac{3}{4}\right)^8 \Rightarrow \frac{t}{4} > 8 \Rightarrow t > 32 \text{ (passadas 32 horas)}$$

Resposta: e.

22. Trata-se de uma função exponencial decrescente, cujo gráfico está mais bem representado no item a.

Resposta: a.

25. $\frac{3^{4x}}{3^1} + 9^x = 6 \Rightarrow \frac{(3^2)^{2x}}{3} + 9^x = 6 \Rightarrow \frac{9^{2x}}{3} + 9^x = 6$

Façamos $y = 9^x$:

$$\frac{y^2}{3} + y - 6 = 0 \Rightarrow y = -6 \text{ (não serve)}$$

ou $y = 3 \Rightarrow 9^x = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3^{2x} = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Assim, $x^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resposta: a.

26. $f(1) = 0 \Rightarrow a + 2^{b+c} = 0 \Rightarrow 2^{b+c} = -a$ $\textcircled{1}$

$f(0) = -\frac{3}{4} \Rightarrow a + 2^c = -\frac{3}{4}$ $\textcircled{2}$

Como $\forall x \in \mathbb{R}, 2^{bx+c} > 0$, temos que $a + 2^{bx+c} > a$, isto é, $f(x) > a$. Como $\text{Im}(f) =]-1, +\infty[$, concluímos que $a = -1$, isto é, $f(x) > -1, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Em } \textcircled{1} \Rightarrow 2^{b+c} = -(-1) \Rightarrow 2^{b+c} = 1 \Rightarrow b+c = 0$$

$$\text{Em } \textcircled{2} \Rightarrow -1 + 2^c = -\frac{3}{4} \Rightarrow 2^c = \frac{1}{4} \Rightarrow c = -2 \Rightarrow b = 2$$

$$\text{Assim, } a \cdot b \cdot c = (-1) \cdot 2 \cdot (-2) = 4.$$

Resposta: a.

$$27. x^{x^2-6x+9} = x^1 \Rightarrow x^2-6x+9 = 1, \text{ se } 0 < x \neq 1.$$

$$x^2-6x+8 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 4.$$

Vamos analisar o que ocorre para $x = 1$:

$$x = 1 \Rightarrow 1^9 = 1 \text{ (V)}.$$

$x = 1$ é solução.

Observação: Lembre que $1^a = 1^b$ não implica $a = b$.

$$\text{Assim, } a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 4^2 + 1^2 = 21.$$

Resposta: b.

28. O número será máximo quando cada pessoa receber uma única vez a mensagem.

No início, dez pessoas recebem a mensagem.

Cada uma dessas dez envia mensagens a outras dez pessoas, totalizando $10 \cdot 10 = 100$ novas pessoas.

Cada uma dessas 100 pessoas envia mensagens a outras dez, totalizando $10 \cdot 100 = 1\,000$ novas pessoas.

$$\text{O total pedido é } 10 + 100 + 1\,000 = 1\,110.$$

Resposta: d.

$$31. \text{ Em 10 anos, temos que } m(t) = 0,2m_0 = \frac{1}{5}m_0$$

Daí:

$$\frac{1}{5}m_0 = c \cdot a^{-10k}$$

Observe que $m(0) = c \cdot a^0 = c$. Daí:

$$\frac{1}{5}m_0 = m_0 \cdot a^{-10k} \Rightarrow a^{-10k} = \frac{1}{5} \text{ (*)}$$

Para $t = 20$, vem:

$$m(20) = m_0 \cdot a^{-20k} = m_0 \cdot a^{-10k} \cdot a^{-10k} \stackrel{(*)}{=} m_0 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5},$$

isto é, $m(20) = \frac{1}{25}m_0 = 0,04m_0$. Isto é, a massa reduziu-se a 4% de m_0 .

Resposta: c.

$$32. \blacksquare \text{ O domínio de } f \text{ é obtido impondo-se que } 25^x - 2 \cdot 5^x - 15 \geq 0.$$

Fazendo $5^x = y$, segue a inequação $y^2 - 2y - 15 \geq 0 \Rightarrow y \leq -3$ ou $y \geq 5$. Temos:

$$1^\circ) y \leq -3 \Rightarrow 5^x \leq -3 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

$$2^\circ) y \geq 5 \Rightarrow 5^x \geq 5 \Rightarrow x \geq 1$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} \Rightarrow A^c = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$$

$$\blacksquare g(x) \leq 0 \Rightarrow x^2 - x - \frac{35}{4} \leq 0 \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{7}{2};$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}\right\}$$

$$\text{Daí, } A^c \cap B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leq x < 1\right\}.$$

Resposta: d.

$$33. t = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{36}{1 + 17 \cdot e^0} = \frac{36}{18} = 2 \text{ milhares}$$

Resposta: b.

34. A cada acerto, o aluno fica com seus pontos multiplicados por $\frac{3}{2}$, pois, se ele está com p pontos, ele ganha $\frac{p}{2}$

e passa a ter $\frac{3p}{2}$. A cada erro, ele fica com seus pontos multiplicados por $\frac{1}{2}$, pois $p - \frac{p}{2} = \frac{1}{2}p$.

Seja n o número de acertos e $8 - n$ o número de erros nessas 8 rodadas.

Como o aluno ficou devendo 13 pontos, ele terminou o jogo com $256 - 13 = 243$ pontos.

Como ele começou o jogo com 256 pontos, escrevemos:

$$256 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8-n} = 243$$

$$256 \cdot \frac{3^n}{2^8} \cdot \frac{1}{2^n} = 243 \Rightarrow 3^n = 243 \Rightarrow n = 5 \text{ (5 acertos)}$$

Resposta: b.

35.	hoje	daqui a vinte anos
população: p		$p \cdot 1,02^{20}$
PIB: q		q'
renda per capita: $\frac{q}{p}$		$\frac{q'}{p \cdot 1,02^{20}}$

Devemos ter:

$$\frac{q'}{p \cdot 1,02^{20}} = 2 \cdot \frac{q}{p} \Rightarrow q' = 2 \cdot q \cdot 1,02^{20} \text{ (*)}$$

Seja i a taxa de aumento anual do PIB:

$q(n) = q \cdot (1 + i)^n$ representa o PIB daqui a n anos.

Assim, devemos determinar i tal que $q \cdot (1 + i)^{20} = q'$.

Usando (*), vem:

$$q \cdot (1 + i)^{20} = 2 \cdot q \cdot 1,02^{20}$$

$$1 + i = \sqrt[20]{2 \cdot 1,02^{20}}$$

$$1 + i = 1,02 \cdot \sqrt[20]{2}$$

$$1 + i = 1,02 \cdot 1,035 \Rightarrow i \approx 0,0557 \text{ (5,5\% ao ano)}$$

Resposta: b.

$$36. t = 0 \Leftrightarrow y = 500 \Rightarrow 500 = p \cdot q^0 \Rightarrow p = 500$$

$$t = 4 \Leftrightarrow y = \frac{1}{5} \cdot 500 \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot 500 = 500 \cdot q^4 \Rightarrow q = \sqrt[4]{\frac{1}{5}}$$

Devemos determinar y correspondente a $t = 8$:

$$y = 500 \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{1}{5}}\right)^8 = 500 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 20$$

Resposta: e.

$$37. x = 0 \Rightarrow V = 40\,000 \Rightarrow \begin{cases} 40\,000 = A \cdot e^0 \Rightarrow A = 40\,000 \text{ } \textcircled{1} \\ 30\,000 = A \cdot e^{-2k} \text{ } \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1}$ em $\textcircled{2}$:

$$30\,000 = 40\,000 \cdot e^{-2k} \Rightarrow e^{-2k} = \frac{3}{4} \text{ (*)}$$

Devemos determinar V correspondente a $t = 4$:

$$V = 40\,000 \cdot e^{-4k} = 40\,000 \cdot (e^{-2k})^2 \stackrel{(*)}{=} 40\,000 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 40\,000 \cdot \frac{9}{16} = 22\,500 \text{ reais}$$

Resposta: c.

$$38. 60 = 90 \cdot (1 - 3^{-0,4t}) \Rightarrow \frac{2}{3} = 1 - 3^{-0,4t} \Rightarrow 3^{-0,4t} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^{-0,4t} = 3^{-1} \Rightarrow -0,4t = -1 \Rightarrow t = \frac{1}{0,4} = \frac{5}{2} \text{ h (2h e 30min)}$$

Resposta: d.

41. Do enunciado, devemos ter:

$$\frac{S^3}{M^2} = k \quad (k \in \mathbb{R}^+) \Rightarrow S^3 = k \cdot M^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \sqrt[3]{k \cdot M^2} = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{2}{3}}$$

Resposta: d.

$$44. f(t) \leq 2 \Rightarrow 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \leq 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \leq \frac{1}{64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Rightarrow \frac{t}{2} \geq 6 \Rightarrow t \geq 12$$

Resposta: b.

Capítulo 8 Função logarítmica

Exercícios

- a) 4
 - b) 2
 - c) 4
 - d) 3
 - e) 5
 - f) 2
 - g) 5
 - h) 3
- a) -2
 - b) $\frac{1}{2}$
 - c) $\frac{4}{3}$
 - d) $\frac{7}{2}$
 - e) $\frac{1}{4}$
 - f) -2
 - g) $-\frac{3}{2}$
 - h) $-\frac{2}{3}$
 - i) -2
 - j) -1
- $A = \log_{25} \frac{1}{5} = -\frac{1}{2}$, pois $25^{-\frac{1}{2}} = (5^2)^{-\frac{1}{2}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$
 $B = \log_7 \frac{1}{49} = -2$, pois $7^{-2} = \frac{1}{49}$
 $C = \log_{0,25} \sqrt{8} \Rightarrow 0,25^C = \sqrt{8} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^C = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2^{-2C} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow -2C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = -\frac{3}{4}$
 $D = \log 0,1 = -1$, pois $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$
 Assim: $B < D < C < A$.

- a) $\log_{\frac{1}{8}} 4 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^x = 4 \Rightarrow 2^{-3x} = 2^2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$
 - b) $\log_{27} \sqrt{3} = x \Rightarrow 3^{3x} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{6}$
 - c) $\log_{16} 0,125 = x \Rightarrow 16^x = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^{4x} = 2^{-3} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$
 - d) $\log_{\sqrt[5]{7}} 7 = x \Rightarrow (\sqrt[5]{7})^x = 7 \Rightarrow 7^{\frac{x}{5}} = 7 \Rightarrow x = 5$
 - e) $\log_3 x = -2 \Rightarrow 3^{-2} = x \Rightarrow x = \frac{1}{9}$
 - f) $\log_x \frac{1}{4} = -1 \Rightarrow x^{-1} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 4$

- a) $1 + 0 - 1 = 0$
 - b) $-1 + (-1) = -2$
 - c) $3 + 2 + 1 + 0 = 6$
 - d) $2 + 3 = 5$
 - e) $\log_8 (\log_3 9) = \log_8 2 = \frac{1}{3}$
 - f) $\log_9 3 + \log_4 4 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

- $\log a = 2 \Rightarrow 10^2 = 100 = a$;
 $\log b = -1 \Rightarrow 10^{-1} = b \Rightarrow b = \frac{1}{10}$

$$a) \log_b a = \log_{\frac{1}{10}} 100 = -2, \text{ pois } \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} = 10^2 = 100$$

$$b) \log_a b = \log_{100} \frac{1}{10} = -\frac{1}{2}, \text{ pois}$$

$$100^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{100^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$$

$$c) \log_a b^2 = \log_{100} \frac{1}{100} = -1$$

$$d) \log(a \cdot b) = \log\left(100 \cdot \frac{1}{10}\right) = \log 10 = 1$$

$$e) \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log \frac{100}{\frac{1}{10}} = \log 1000 = 3$$

$$f) \log_{\sqrt[10]{b}} a = \log_{\sqrt[10]{100}} 100 = x \Rightarrow \left(\sqrt[10]{\frac{1}{10}}\right)^x = 100 \Rightarrow \Rightarrow (10^{-\frac{1}{2}})^x = 10^2 \Rightarrow x = -4$$

- a) $x = 16$
 - b) $4x - 1 = x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$
 - c) $x^2 = x \Rightarrow x = 0$ (não convém) ou $x = 1$

- a) $3^4 = x \Rightarrow x = 81$
 - b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = x \Rightarrow x = 2^2 = 4$
 - c) $x^1 = 2 \Rightarrow x = 2$
 - d) $x^{-1} = 0,25 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 4$
 - e) $x^0 = 1$ é verdadeiro desde que a base do logaritmo satisfaça a condição: $x > 0$ e $x \neq 1$.

9. a) $\log_5 \frac{25}{1} = -2$
 b) $\log_5 \sqrt[7]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}$
 c) $\log_5 5^{12} = 12$
 d) $\log_5 625^{\frac{5}{6}} = \log_5 (5^4)^{\frac{5}{6}} = \log_5 5^{\frac{20}{3}} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$
 e) $\log_5 0,2 = \log_5 \frac{1}{5} = -1$

10. $\log_5 a = 2010 \Rightarrow (\sqrt[5]{5})^{2010} = a$
 $\log_5 b = 2020 \Rightarrow (5\sqrt[5]{5})^{2020} = b$
 $\frac{a}{b} = \frac{(\sqrt[5]{5})^{2010}}{(5\sqrt[5]{5})^{2020}} = \frac{(\sqrt[5]{5})^{2010}}{5^{2020} \cdot (\sqrt[5]{5})^{2020}} = \frac{(\sqrt[5]{5})^{2010}}{5^{2020} \cdot (\sqrt[5]{5})^{2010} \cdot (\sqrt[5]{5})^{10}} = \frac{1}{5^{2020} \cdot (\sqrt[5]{5})^{10}} = \frac{1}{5^{2020} \cdot 5^2} = \frac{1}{5^{2022}} = 5^{-2022}$

11. Devemos ter $\Delta = 0$, isto é:
 $4^2 - 4 \cdot 1 \cdot \log_2 m = 0 \Rightarrow 16 = 4 \log_2 m \Rightarrow \log_2 m = 4 \Rightarrow m = 2^4 = 16$
 Se $m = 16$, a equação é: $x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$ é a raiz dupla.

12. a) $4^3 \cdot 4 \log_4 2 = 64 \cdot 2 = 128$
 b) $\frac{5^{\log_5 4}}{5^1} = \frac{4}{5}$
 c) $8 \log_2 7 = (2^3 \log_2 7) = (2 \log_2 7)^3 = 7^3 = 343$
 d) $(3^4)^{\log_3 2} = (3 \log_3 2)^4 = 2^4 = 16$
 e) $5^{\log_5 7} = \left(25^{\frac{1}{2}} \right)^{\log_5 7} = (25^{\log_5 7})^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

13. $\log_{13} 13^{29} = 29$, $\log_7 7^{30} = 30$, o maior é $\log_7 7^{30}$.

14. a) $\ln e = \log_e e = 1$
 b) $\ln 1 = \log_e 1 = 0$
 c) $\log 0,1 = \log 10^{-1} = -1$
 d) 8
 e) $\ln \left(\frac{1}{e} \right) = \log_e \left(\frac{1}{e} \right) = -1$
 f) $e^{\ln 3} = e^{\log_e 3} = 3$
 g) $10^{\log 8} = 10^{\log_{10} 8} = 8$
 h) $e^{2 \ln 5} = (e^{\ln 5})^2 = 5^2 = 25$
 i) $e^2 \cdot e^{\ln 2} = e^2 \cdot 2 = 2e^2$

15. a) $\log_6 x + \log_6 y = -2 + 3 = 1$
 b) $\log_6 x - \log_6 y = -2 - 3 = -5$
 c) $\log_6 x^3 + \log_6 y^2 = 3 \cdot \log_6 x + 2 \cdot \log_6 y = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) = -6 + -6 = 0$
 d) $\log_6 y^2 - \log_6 \sqrt{x} = 2 \cdot \log_6 y - \frac{1}{2} \cdot \log_6 x = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{2} \cdot (-7) = -4 + \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}$

16. a) $\log_5 (5a) - \log_5 (bc) =$
 $= (\log_5 5 + \log_5 a) - (\log_5 b + \log_5 c) =$
 $= (1 + \log_5 a) - \log_5 b - \log_5 c =$
 b) $\log b^2 - \log (10a) = 2 \log b - (\log 10 + \log a) =$
 $= 2 \log b - 1 - \log a$
 c) $\log_3 (ab^2) - \log_3 c = \log_3 a + 2 \log_3 b - \log_3 c$
 d) $\log_2 (8a) - \log_2 (b^3 \cdot c^2) =$
 $= (\log_2 8 + \log_2 a) - (3 \log_2 b + 2 \log_2 c) =$
 $= (3 + \log_2 a - 3 \log_2 b - 2 \log_2 c)$
 e) $\log_2 \sqrt[8]{a^2 b^3} = \log_2 \sqrt[8]{a^2} + \log_2 \sqrt[8]{b^3} =$
 $= \frac{2}{8} \cdot \log_2 a + \frac{3}{8} \cdot \log_2 b = \frac{1}{4} \cdot \log_2 a + \frac{3}{8} \cdot \log_2 b$

17. a) $\log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = a + b$
 b) $\log \left(\frac{2}{3} \right) = \log 2 - \log 3 = b - a$
 c) $\log \left(\frac{2}{10} \right) = \log 2 - \log 10 = 1 - a$
 d) $\log (2 \cdot 3 \cdot 5) = \log 2 + \log 3 + \log 5 =$
 $= a + b + (1 - a) = b + 1$
 e) $\log 2^{-2} = -2 \cdot \log 2 = -2a$
 f) $\log (2^3 \cdot 3^2) = 3 \log 2 + 2 \log 3 = 3a + 2b$
 g) $\log \left(\frac{10}{3} \right) = \log 3 - \log 10 = b - 1$
 h) $\log 1,8^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \log 1,8 = \frac{3}{4} \cdot \log \left(\frac{18}{10} \right) = \frac{3}{4} \cdot \log 18 - \frac{3}{4} \cdot \log 10 =$
 $= \frac{3}{4} \cdot \log (2 \cdot 3^2) - \frac{3}{4} \cdot \log 3 = \frac{3}{4} \cdot \log 2 + \frac{3}{2} \cdot \log 3 - \frac{3}{4} \cdot \log 3 =$
 $= \frac{3}{4} \log 2 + \frac{3}{4} \log 3 = \frac{3}{4} (\log 2 + \log 3) = \frac{3}{4} (a + b)$
 i) $\log 0,024 = \log \left(\frac{24}{1000} \right) = \log 24 - \log 1000 =$
 $= \log (2^3 \cdot 3) - 3 = 3 \log 2 + \log 3 - 3 =$
 $= 3a + b - 3$
 j) $\log \left(\frac{4}{3} \right) = \log 3 - 2 \log 2 = b - 2a$
 k) $\log 20000 = \log (2 \cdot 10000) = \log 2 + \log 10000 =$
 $= a + 4$

18. a) $\log a + \log b + \log c = \log (a \cdot b \cdot c)$; a expressão é abc.

19. a) $\log_{15}(3 \cdot 5) = \log_{15} 15 = 1$

b) $\log_3 \left(\frac{72}{12} \right) - \log_3 2 = \log_3 6 - \log_3 2 =$

c) $\log_3 \left(\frac{b}{a} \right) - 2 = \log_3 \left(\frac{b}{a} \right) - \log_3 9 =$

d) $\log_3 \frac{a}{b} - \log_3 b = \log_3 \sqrt{a} - \log_3 b = \log_3 \left(\frac{\sqrt{a}}{b} \right)$; a expressão é $\frac{\sqrt{a}}{b}$.

20. a) $\log x = \log(5 \cdot 4 \cdot 3) \Rightarrow x = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

b) $\log x^2 = \log(3 \cdot 4) \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12}$

c) $\log x^{-1} = \log \left(\frac{3}{1} \cdot 9 \right) \Rightarrow \log(x^{-1}) = \log 3 \Rightarrow x^{-1} =$

d) $\log_3 x^{\frac{1}{4}} = \log_3 10^{\frac{1}{2}} - \log_3 4 \Rightarrow \log_3 \sqrt{x} = \log_3 \left(\frac{4}{10^2} \right) \Rightarrow$

21. a) $\log(2^3 \cdot 3^2) = 3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 = 3 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,48 = 1,86$

b) $\log \left(\frac{18}{1} \right) = \log 18^{-1} = -1 \cdot \log 18 = -1 \cdot \log(2 \cdot 3^2) =$

c) $\log \sqrt[4]{24} = \frac{1}{4} \cdot \log 24 = \frac{1}{4} \cdot \log(2^3 \cdot 3) =$

d) $\log 144^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \log 12 = \frac{1}{4} \cdot 2 \log 12 = \frac{3}{2} \cdot \log(2^2 \cdot 3) =$

e) $\log \left(\frac{100}{6} \right) = \log 6 - \log 100 = \log 2 + \log 3 - 2 = -1,22$

f) $\log(2^4 \cdot 3) = 4 \cdot \log 2 + \log 3 = 1,68$

g) $\log 125 = 3 \cdot \log 5 = 3 \cdot \log \left(\frac{10}{2} \right) = 3 \cdot (1 - 0,3) = 2,1$

22. a) $\log_2 10 = \log_2(2 \cdot 5) = 1 + \log_2 5 = 1 + 2,32 = 3,32$

b) $\log_2 500 = \log_2(5 \cdot 10^2) = \log_2 5 + 2 \log_2 10 =$

c) $\log_2 1600 = \log_2(16 \cdot 100) = \log_2 16 + \log_2 100 =$

d) $\log_2 0,2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_2 \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot \log_2 2 =$

e) $\log_2 \left(\frac{64}{125} \right) = \log_2 2^6 - \log_2 5^3 =$

23. a) $\log 20 + \log 6 = \log(20 \cdot 6) = \log 120 \neq \log 26$

b) $\log 5 + \log 8 + \log 2,5 = \log(5 \cdot 8 \cdot 2,5) =$

c) $\log_2 4 = 18 \cdot \log_2 4 = 18 \cdot 2 = 36$

d) $\log_3 \sqrt[8]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{8}} = \frac{1}{8} < 0,25$

e) $\log_5 \left(\frac{7}{35} \right) = \log_5 5 = 1$

f) $\log_3[(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)] = \log_3(\sqrt{2}^2 - 1^2) =$

24. a) $\log 390 = \log(39 \cdot 10) = 1,6 + 1 = 2,6$

b) $\log 3,9 = \log \left(\frac{10}{39} \right) = 1,6 - 1 = 0,6$

c) $\log 39000000 = \log(39 \cdot 10^6) = 1,6 + 6 = 7,6$

d) $\log \sqrt[3]{39} = \log 39^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log 39 = \frac{2}{1,6} = 0,8$

e) $\log 0,039 = \log \left(\frac{1000}{39} \right) = 1,6 - 3 = -1,4$

25. Temos: $M = -6,8$; $m = 0,2$

$\Rightarrow -\frac{5}{2} = \log_3(3 \cdot d^{-0,48}) \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{5}{2} = 1 + (-0,48) \cdot \log_3 d \Rightarrow$

$\Rightarrow -2,4 = -0,48 \cdot \log_3 d \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 = \log_3 d \Rightarrow 3^5 = d$; assim, a distância em parsecs é 3^5 . Como 1 parsec equivale a $3 \cdot 10^{13}$ km, a distância pedida, em quilômetros, é $3^5 \cdot 3 \cdot 10^{13} = 3^6 \cdot 10^{13}$ km = $7,29 \cdot 10^{15}$ km.

26. $\left\{ \begin{array}{l} 10^{0,845} = 7 \Rightarrow \log_{10} 7 = 0,845 \\ 10^{0,699} = 5 \Rightarrow \log_{10} 5 = 0,699 \end{array} \right.$

a) $\log 175 = \log(5^2 \cdot 7) = 2 \cdot \log 5 + \log 7 =$

$= 2 \cdot 0,699 + 0,845 = 2,243$

$$b) \log 14 = \log (2 \cdot 7) = \log 2 + \log 7 =$$

$$= \log \left(\frac{10}{5} \right) + \log 7 = \log 10 - \log 5 + \log 7 =$$

$$= 1 - 0,699 + 0,845 = 1,146$$

$$c) \log_3 \sqrt[3]{\frac{25}{39}} = \log \left(\frac{25}{49} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot (\log 25 - \log 49) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\log 5^2 - \log 7^2) = \frac{2}{3} \log 5 - \frac{2}{3} \log 7 =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 0,699 - \frac{2}{3} \cdot 0,845 = -0,097\bar{3}$$

$$27. \text{ O perímetro desse retângulo é } 2 \cdot (\log 5 + \log 3) = 2 \cdot \log 15 = \log 15^2 = \log 225; \text{ assim } \alpha = 225.$$

$$28. a) \log_5 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 5}$$

$$b) \log 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 10}$$

$$c) \log_3 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \frac{2}{\log_2 3}$$

$$d) \ell n 3 = \log_e 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 e}$$

$$29. a) \log_3 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \frac{0,3}{0,48} = 0,625$$

$$b) \log_5 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5} = \frac{\log 3}{\log \left(\frac{10}{2} \right)} = \frac{\log 3}{1 - \log 2} =$$

$$= \frac{0,48}{1 - 0,30} = \frac{0,48}{0,70} \approx 0,686$$

$$c) \log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} \left(\frac{10}{2} \right)}{\log_{10} 2} =$$

$$= \frac{\log 10 - \log 2}{\log 2} = \frac{1 - 0,3}{0,3} = \frac{7}{3} = 2,3$$

$$d) \log_3 100 = \frac{\log 100}{\log 3} = \frac{2}{0,48} = 4,1\bar{6}$$

$$e) \log_4 18 = \frac{\log 18}{\log 4} = \frac{2 \log 3 + \log 2}{2 \log 2} = 2,1$$

$$f) \log_{36} 0,5 = \frac{\log 2^{2-1}}{\log 6^2} = \frac{-1 \cdot 0,3}{2 \cdot (0,3 + 0,48)} \approx -0,1923$$

$$30. a) \frac{1}{2}$$

$$b) \log_{x^3} y^2 = \frac{\log_y y^2}{\log_y x^3} = \frac{2}{3 \cdot \log_y x} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}$$

$$c) \log_{\left(\frac{1}{x} \right)} \left(\frac{1}{y} \right) = \frac{\log_y \left(\frac{1}{y} \right)}{\log_y \left(\frac{1}{x} \right)} = \frac{-1}{\log_y x^{-1}} = \frac{-1}{-1 \cdot \log_y x} =$$

$$= \frac{1}{\log_y x} = \frac{1}{2}$$

$$d) \log_{x^2} x = \frac{\log_y x}{\log_y y^2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$31. a) \log_{10} 5 = \frac{\ell n 5}{\ell n 10} = \frac{1,6}{2,3} \approx 0,696$$

$$b) \log_2 10 = \frac{\ell n 10}{\ell n 2} = \frac{2,3}{\ell n \left(\frac{10}{5} \right)} = \frac{2,3}{\ell n 10 - \ell n 5} =$$

$$= \frac{2,3}{2,3 - 1,6} = \frac{2,3}{0,7} = 3,28$$

$$32. a) \log_5 12 = \frac{1}{\log_{12} 5} = \frac{1}{a}$$

$$b) \log_{25} 12 = \frac{\log_{12} 12}{\log_{12} 25} = \frac{1}{\log_{12} 5^2} = \frac{1}{2 \cdot \log_{12} 5} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot a} = \frac{1}{2a}$$

$$c) \log_5 60 = \frac{\log_{12} 60}{\log_{12} 5} = \frac{\log_{12} (12 \cdot 5)}{a} = \frac{1 + \log_{12} 5}{a} =$$

$$= \frac{1 + a}{a}$$

$$d) \log_{125} 144 = \frac{\log_{12} 144}{\log_{12} 125} = \frac{2}{\log_{12} 5^3} = \frac{2}{3 \cdot \log_{12} 5} = \frac{2}{3a}$$

$$33. a) \log_7 3 = \frac{1}{\log_3 7}; \log_{11} 5 = \frac{1}{\log_5 11};$$

assim, o produto vale 1.

$$b) z = \frac{\log_2 2}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 6} = \frac{1}{\log_2 6} =$$

$$= \log_6 2$$

$$c) w = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 \sqrt{2}}{\log_3 25} =$$

$$= \log_3 5 \cdot \frac{3}{2 \cdot \log_3 2} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \log_3 2}{2 \cdot \log_3 5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

d) Observe que:

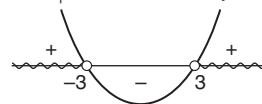
$$\log_5 4 \cdot \log_4 7 \cdot \log_7 11 = \log_5 11; \text{ daí, } t = 5^{\log_5 11} = 11$$

$$34. a) D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

$$b) D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{3} \right\}$$

c) Devemos ter: $x^2 - 9 > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$$



d) Devemos ter $x^2 + 3 > 0$; como para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $x^2 \geq 0$, segue que $x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Logo, $D = \mathbb{R}$.

35. a) A função f está definida se:

$$\begin{cases} x + 3 > 0 \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x > 0 \text{ e } x \neq 1$$

$$\text{Logo: } D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$$

b) A função g está definida se:

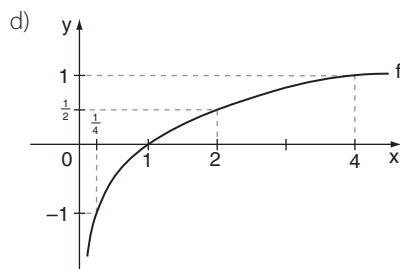
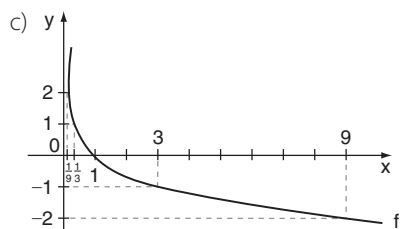
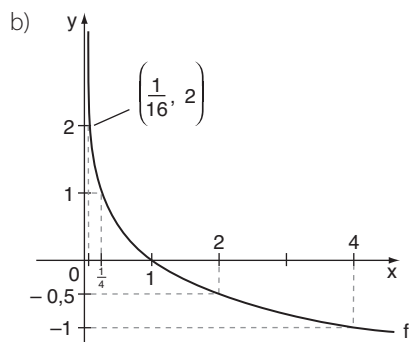
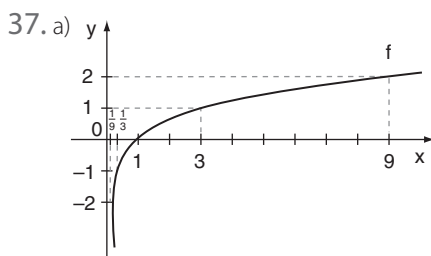
$$\begin{cases} -3x + 4 > 0 \\ 0 < x - 1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{3} \\ 1 < x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < \frac{4}{3}$$

$$\text{Logo: } D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{4}{3} \right\}$$

36. a) Verdadeira. $f(100) = \log 100 = 2$
 b) Verdadeira. $f(x^2) = \log x^2 = 2 \cdot \log x = 2 \cdot f(x)$
 c) Falsa. $f(10x) = \log(10x) = \log 10 + \log x = 1 + \log x = 1 + f(x)$
 d) Verdadeira. $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right) + \log x = \log\left(\frac{1}{x} \cdot x\right) = \log 1 = 0$
 e) Quando x varia de 1 a 10, a taxa média é

$$\frac{f(10) - f(1)}{10 - 1} = \frac{\log 10 - \log 1}{9} = \frac{1 - 0}{9} = \frac{1}{9};$$
 quando x varia de 10 a 100, a taxa média é

$$\frac{f(100) - f(10)}{100 - 10} = \frac{\log 100 - \log 10}{90} = \frac{2 - 1}{90} = \frac{1}{90};$$
 como $\frac{1}{9} \neq \frac{1}{90}$, a proposição é verdadeira.



38.
$$\begin{cases} x = 0 \text{ e } y = 3 \\ x = 1 \text{ e } y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = a + \log_b(0 + 1) \\ 4 = a + \log_b(1 + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = a + \log_b 1 \Rightarrow a = 3 \\ 4 = a + \log_b 2 \Rightarrow 4 - 3 = \log_b 2 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

39. a) $x = 2, y = 0$ (2 é raiz de f)
 $0 = \log_2(2 + k) \Rightarrow 2^0 = 2 + k \Rightarrow k = -1$;
 $y = \log_2(x - 1)$
 b) É preciso determinar a abscissa do ponto A:
 $y = -1 \Rightarrow -1 = \log_2(x - 1) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2^{-1} = x - 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = x - 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \frac{3}{2}$
 É preciso determinar a ordenada de B (e C):
 $x = 3 \Rightarrow y = \log_2(3 - 1) = 1$
 Assim, $AD = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$
 $AB = 1 + 1 = 2$; e a área do retângulo ABCD é:
 $\frac{3}{2} \cdot 2 = 3$ u.a.

40. a) Verdadeira. $4 < 5 \Rightarrow \log_3 4 < \log_3 5$
 b) Falsa. $4 < 5 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} 4 > \log_{\frac{1}{3}} 5$
 c) Falsa. $0,35 > 0,2 \Rightarrow \log 0,35 > \log 0,2$
 d) Verdadeira. $\pi^2 > 9 \Rightarrow \log_2 \pi^2 > \log_2 9$
 e) Falsa. $\sqrt{2} < 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} > \log_{\frac{1}{2}} 2$
 f) Falsa. $\frac{1}{3} > \frac{1}{4} \Rightarrow \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{3} < \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$
 41. a) $3 > 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} 3 < \log_{\frac{1}{4}} 1$; isto é, $\log_{\frac{1}{4}} 3 < 0$
 b) $2 > 1 \Rightarrow \log_5 2 > \log_5 1 = 0$; assim, $\log_5 2 > 0$
 c) $0,2 < 1 \Rightarrow \log 0,2 < \log 1 = 0$; assim, $\log 0,2 < 0$
 d) $\frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$; assim, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > 0$
 e) $7 > 1 \Rightarrow \log_{\frac{2}{3}} 7 < \log_{\frac{2}{3}} 1 = 0$; assim, $\log_{\frac{2}{3}} 7 < 0$
 f) $2 > 1 \Rightarrow \log_e 2 > \log_e 1$, isto é, $\ln 2 > \ln 1 = 0$; assim, $\ln 2 > 0$
 São positivos os itens b, d e f.

42. a) $t = 0 \Rightarrow f(0) = 400 + 50 \cdot \log_4 2$
 $f(0) = 400 + 50 \cdot \frac{1}{2} = 425$ (funcionários)
 b) $f(2) = 400 + 50 \cdot \log_4 4 = 450$
 $f(6) = 400 + 50 \cdot \log_4 8$
 $f(6) = 400 + 50 \cdot \frac{3}{2} = 475$
 A diferença $f(6) - f(2)$ é igual a $475 - 450 = 25$ (funcionários).

c) Devemos calcular a razão $\frac{f(14) - f(6)}{14 - 6}$

$$f(14) = 400 + 50 \cdot \log_4 16 = 500$$

$$f(6) = 400 + 50 \cdot \log_4 8 = 475$$

Daí, a razão é: $\frac{500 - 475}{14 - 6} = 3,125$ funcionários/ano.

43. ■ A base do retângulo menor mede 1 e sua altura vale $\log_2 2 = 1$; sua área é, portanto, $1 \cdot 1 = 1$.

- A base do retângulo maior mede 1 e sua altura vale $\log_2 3$; sua área é, portanto, $1 \cdot \log_2 3 = \log_2 3$.
O valor da área hachurada é:

$$1 + \log_2 3 = 1 + \frac{\log 3}{\log 2} = 1 + \frac{0,48}{0,3} = 2,6$$

44. a) $x = \log_3 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 3} = \frac{1}{0,48} = 2,08\bar{3}$

b) $4^x = 3 \Rightarrow \log 4^x = \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 4} = \frac{\log 3}{2 \cdot \log 2} = \frac{0,48}{0,6} = 0,8$

c) $2^x = 27 \Rightarrow \log 2^x = \log 27 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \frac{\log 27}{\log 2}$ (ou, ainda, $x = \log_2 27$)

$$x = \frac{\log 3^3}{\log 2} = \frac{3 \cdot 0,48}{0,3} = 4,8$$

d) $10^x = 6 \Rightarrow x = \log_{10} 6 = \log(3 \cdot 2) = \log 3 + \log 2 = 0,48 + 0,3 = 0,78$

e) $2^x = 5 \Rightarrow \log_2 5 = x = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{\log\left(\frac{10}{2}\right)}{\log 2} = \frac{1 - \log 2}{\log 2} = \frac{1 - 0,3}{0,3} = \frac{0,7}{0,3} = 2,3$

f) $3^x = 2 \Rightarrow \log_3 2 = x = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0,3}{0,48} = 0,625$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{1}{9} \Rightarrow \log\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \log \frac{1}{9} \Rightarrow (x+1) \cdot \log \frac{1}{2} = \log 3^{-2} \Rightarrow (x+1) \cdot \log 2^{-1} = -2 \log 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow -(x+1) \cdot \log 2 = -2 \cdot \log 3 \Rightarrow x+1 = \frac{2 \log 3}{\log 2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = -1 + \frac{2 \log 3}{\log 2} = -1 + \frac{2 \cdot 0,48}{0,3} = -1 + 3,2 = 2,2$

h) $2^x = 3 \Rightarrow \log_2 3 = x = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0,48}{0,3} = 1,6$

45. Devemos determinar x tal que $y = 90$:

$$90 = 40 \cdot 1,2^x \Rightarrow \frac{9}{4} = 1,2^x$$

$$\log\left(\frac{9}{4}\right) = \log 1,2^x \Rightarrow x = \frac{\log\left(\frac{9}{4}\right)}{\log 1,2}$$

$$x = \frac{\log 9 - \log 4}{\log 12 - \log 10} = \frac{2 \log 3 - 2 \log 2}{\log 3 + \log 2^2 - 1} = \frac{2 \log 3 - 2 \log 2}{\log 3 + 2 \log 2 - 1} = \frac{2 \cdot 0,48 - 2 \cdot 0,3}{0,48 + 2 \cdot 0,3 - 1} = \frac{0,36}{0,08} \Rightarrow x = 4,5 \text{ anos}$$

46. a) $n = 6 \Rightarrow y = 500 \cdot (1,01)^6 = 500 \cdot 1,06152 \approx 530,76$

- b) Devemos determinar n tal que $M(n) = 800$:

$$800 = 500 \cdot (1,01)^n \Rightarrow 1,6 = (1,01)^n \Rightarrow n = \log_{1,01} 1,6 =$$

$$= \frac{\log 1,6}{\log 1,01} = \frac{\log 16 - \log 10}{\log 1,01} = \frac{4 \log 2 - 1}{0,004} = 50 \text{ (meses)}$$

47. a) $t = 0 \Rightarrow v = 80\,000 \cdot 0,9^0 = 80\,000$ (reais)

b) $t = 1 \Rightarrow v = 80\,000 \cdot 0,9 = 72\,000$ reais

A perda é $80\,000 - 72\,000 = 8\,000$ (reais).

- c) A cada década, o valor do imóvel é 90% do valor que ele possuía na década anterior; logo, a desvalorização percentual do imóvel na década é de 10%.

d) $60\,000 = 80\,000 \cdot 0,9^t \Rightarrow \frac{3}{4} = 0,9^t \Rightarrow \log\left(\frac{3}{4}\right) = \log 0,9^t \Rightarrow \log 3 - \log 4 = t \cdot (\log 9 - \log 10) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \log 3 - 2 \log 2 = t \cdot (2 \log 3 - 1) \Rightarrow$
 $\Rightarrow t = \frac{0,48 - 2 \cdot 0,30}{2 \cdot 0,48 - 1} = \frac{-0,12}{-0,04} = 3 \text{ décadas ou } 30 \text{ anos.}$

48. a) $v(3) = 2000 \Rightarrow 2000 = 500 \cdot 2^{k \cdot 3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2000}{500} = 2^{3k} \Rightarrow 4 = 2^{3k} \Rightarrow 3k = 2$$

$$k = \frac{2}{3}$$

b) $v(t) = 500 \cdot 2^{\frac{2}{3}t}$; $v(0) = 500 \cdot 2^0 = 500$ (reais)

- c) Devemos determinar t tal que $v(t) = 5\,000$:

$$5\,000 = 500 \cdot 2^{\frac{2}{3}t} \Rightarrow 10 = 2^{\frac{2}{3}t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 10 = \frac{2t}{3} \cdot \log 2$$

$$1 = \frac{2t}{3} \cdot 0,301 \Rightarrow t \approx 4,98 \Rightarrow \text{o número mínimo inteiro de anos é } 5.$$

49. a) $8000 = 5\,000 \cdot e^{0,02t} \Rightarrow 1,6 = e^{0,02t} \Rightarrow \ln 1,6 = \ln e^{0,02t} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln 1,6 = 0,02 \cdot t \Rightarrow t = \frac{\ln 1,6}{0,02} = \frac{\ln\left(\frac{16}{10}\right)}{0,02} =$$

$$= \frac{\ln 16 - \ln 10}{0,02} = \frac{\ln 2^4 - \ln(2 \cdot 5)}{0,02} =$$

$$= \frac{4 \ln 2 - \ln 2 - \ln 5}{0,02} = \frac{3 \ln 2 - \ln 5}{0,02} =$$

$$= \frac{2,07 - 1,6}{0,02} = \frac{0,47}{0,02} = 23,5 \text{ (anos)}$$

Logo, são necessários 24 anos.

$$b) 10000 = 5000 \cdot e^{0,02t} \Rightarrow 2 = e^{0,02t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 2 = \ln e^{0,02t} \Rightarrow \ln 2 = 0,02 \cdot t \Rightarrow \frac{0,69}{0,02} = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 34,5 \text{ anos}$$

Logo, são necessários 35 anos.

$$50. a) \frac{P_0}{2} = P_0 \cdot 2^{-b \cdot 29} \Rightarrow \frac{1}{2} = 2^{-29b} \Rightarrow 2^{-1} = 2^{-29b} \Rightarrow b = \frac{1}{29}$$

$$b) \text{ Devemos determinar } t \text{ tal que } P(t) = \frac{P_0}{5}:$$

$$\frac{P_0}{5} = P_0 \cdot 2^{-\frac{1}{29} \cdot t} \Rightarrow \frac{1}{5} = 2^{-\frac{1}{29} \cdot t} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{5} = \log_2 2^{-\frac{1}{29} \cdot t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\log_2 5 = -\frac{1}{29} \cdot t \Rightarrow -(\log_2 10 - 1) = -\frac{t}{29} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 3,32 = -\frac{t}{29} \Rightarrow t = 67,28 \text{ anos}$$

$$51. \text{ Devemos determinar } t \text{ tal que } n(t) = \frac{n(0)}{4}:$$

$$\frac{n(0)}{4} = n(0) \cdot 0,8^t \Rightarrow \frac{1}{4} = 0,8^t \Rightarrow \log_{0,8} \frac{1}{4} = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log \frac{1}{4}}{\log 0,8} \Rightarrow t = \frac{\log 2^{-2}}{\log \left(\frac{8}{10} \right)} = \frac{-2 \log 2}{\log 8 - \log 10} =$$

$$= \frac{-2 \log 2}{3 \log 2 - 1} = \frac{-2 \cdot 0,3}{3 \cdot 0,3 - 1} = \frac{-0,6}{-0,1} = 6 \text{ (anos)}$$

$$52. a) 4x + 5 = 2x + 11 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

$$4 \cdot 3 + 5 > 0; 2 \cdot 3 + 11 > 0; S = \{3\}$$

$$b) 5x^2 - 6x + 16 = 4x^2 + 4x - 5 > 0$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow x = \frac{10 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 7 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$x = 7 \Rightarrow 5 \cdot 7^2 - 6 \cdot 7 + 16 > 0; 4 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 - 5 > 0$$

$$x = 3 \Rightarrow 5 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 16 > 0; 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 5 > 0$$

$$S = \{7, 3\}$$

$$c) \text{ A condição de existência é:}$$

$$0 < x \neq 1; 2x - 3 > 0 \text{ e } -4x + 8 > 0$$

$$\text{Isto é, } 0 < x \neq 1 \text{ e } \frac{3}{2} < x < 2 \Rightarrow \frac{3}{2} < x < 2 (*)$$

$$\text{Devemos ter: } 2x - 3 = -4x + 8 \Rightarrow 6x = 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{11}{6}, \text{ que verifica } (*); S = \left\{ \frac{11}{6} \right\}$$

$$53. a) 4^2 = x + 3 \Rightarrow x = 13; 13 + 3 > 0; S = \{13\}$$

$$b) \left(\frac{3}{5} \right)^0 = 2x^2 - 3x + 2 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

$$x = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 > 0$$

$$x = 0,5 \Rightarrow 2 \cdot 0,5^2 - 3 \cdot 0,5 + 2 > 0$$

$$S = \left\{ 1, \frac{1}{2} \right\}$$

$$c) 0,1^{-1} = 4x^2 - 6x \Rightarrow 4x^2 - 6x - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm 7}{4} \begin{cases} x = \frac{5}{2}; 4 \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^2 - 6 \cdot \frac{5}{2} > 0 \\ x = -1; 4 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 4 + 6 > 0 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{5}{2}, -1 \right\}$$

$$d) (2x)^2 = 6x^2 - 13x + 15 \Rightarrow 2x^2 - 13x + 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{13 \pm 7}{4} \Rightarrow x = 5 \text{ ou } x = \frac{3}{2}; \text{ ambos os valores}$$

$$\text{satisfazem a condição de existência; } S = \left\{ 5, \frac{3}{2} \right\}.$$

$$54. a) y^2 - 2y - 15 = 0 \Rightarrow y = 5 \text{ ou } y = -3$$

$$y = 5 \Rightarrow \log_2 x = 5 \Rightarrow x = 2^5 = 32$$

$$y = -3 \Rightarrow \log_2 x = -3 \Rightarrow x = 2^{-3} = \frac{1}{8} \Rightarrow S = \left\{ 32, \frac{1}{8} \right\}$$

$$b) \log x = t \Rightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = -1$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \log x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

$$t = -1 \Rightarrow \log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1} = \frac{1}{10} \Rightarrow S = \left\{ \sqrt{10}, \frac{1}{10} \right\}$$

$$c) \ell n^3 x - 4 \ell n x = 0; \ell n x = y \Rightarrow y^3 - 4y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(y^2 - 4) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = -2 \text{ ou } y = 2$$

$$y = 0 \Rightarrow \ell n x = 0 \Rightarrow \log_e x = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1$$

$$y = -2 \Rightarrow \ell n x = -2 \Rightarrow \log_e x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{e^2}$$

$$y = 2 \Rightarrow \ell n x = 2 \Rightarrow \log_e x = 2 \Rightarrow x = e^2$$

$$S = \left\{ 1, e^2, \frac{1}{e^2} \right\}$$

$$55. a) \log_2 (x-2) \cdot x = 3 \Rightarrow 2^3 = x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = -2 \text{ (não pode ser aceito); } S = \{4\}$$

$$b) \log_7 (x+3)^2 = \log_7 (x^2 + 45) \Rightarrow (x+3)^2 = x^2 + 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x = 36 \Rightarrow x = 6$$

$$\text{Verificando: } 6 + 3 > 0; 6^2 + 45 > 0; S = \{6\}$$

$$c) \log (4x-1) - \log (x+2) = \log x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \left(\frac{4x-1}{x+2} \right) = \log x \Rightarrow \frac{4x-1}{x+2} = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Verificando: } 4 \cdot 1 - 1 > 0; 1 + 2 > 0; 1 > 0; S = \{1\}$$

$$d) 3 \log_5 2 + \log_5 (x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_5 2^3 + \log_5 (x-1) = 0 \Rightarrow \log_5 [2^3 \cdot (x-1)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^0 = 8x - 8 \Rightarrow 8x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{8}$$

$$\text{Verificando: } \frac{9}{8} - 1 > 0; S = \left\{ \frac{9}{8} \right\}$$

$$e) \log x + 2 \log x + 3 \log x = -6 \Rightarrow 6 \log x = -6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log x = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 10^{-1} = \frac{1}{10} > 0; S = \left\{ \frac{1}{10} \right\}$$

56. a) Como $\log_5 x = \frac{1}{\log_x 5}$, escrevemos:

$$\frac{1}{\log_x 5} = \log_x 5 \Rightarrow (\log_x 5)^2 = 1 \Rightarrow \log_x 5 = -1 \text{ ou } \log_x 5 = 1 \Rightarrow x^{-1} = 5 \text{ ou } x^1 = 5, \text{ isto é, } x = \frac{1}{5} \text{ ou } x = 5;$$

ambos os valores garantem a existência dos logaritmos.

$$S = \left\{ \frac{1}{5}, 5 \right\}$$

b) Vamos escrever os logaritmos em base 7:

$$\frac{\log_7 7x}{\log_7 49} = \frac{\log_7 7}{\log_7 x}$$

$$\frac{1 + \log_7 x}{2} = \frac{1}{\log_7 x} \xrightarrow{\log_7 x = y} \frac{1 + y}{2} = \frac{1}{y}$$

$$y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -2 \text{ ou } y = 1$$

$$\log_7 x = -2 \text{ ou } \log_7 x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{49} \text{ ou } x = 7$$

$$S = \left\{ 7, \frac{1}{49} \right\}$$

c) Como $\log_4 (3x + 43) = \frac{\log_2 (3x + 43)}{\log_2 4} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \log_2 (3x + 43), \text{ podemos escrever:}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_2 (3x + 43) - \log_2 (x + 1) =$$

$$= 1 + \log_2 (x - 3)$$

$$\log_2 \left(\frac{3x + 43}{x + 1} \right) = \log_2 2 + \log_2 (x - 3) =$$

$$= \log_2 \left(\frac{3x + 43}{x + 1} \right) = \log_2 (2x - 6)$$

$$\frac{3x + 43}{x + 1} = 2x - 6 \Rightarrow 2x^2 - 7x - 49 = 0$$

$$x = 7 \text{ ou } x = -3,5 \text{ (não serve)}$$

$$S = \{7\}$$

d) Como $\log_{\frac{1}{2}} (x - 2) = \frac{\log_2 (x - 2)}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{\log_2 (x - 2)}{-1} =$

$$= -\log_2 (x - 2), \text{ podemos escrever:}$$

$$\log_2 (x - 1) - \log_2 (x - 2) = \log_2 x \Rightarrow \log_2 \frac{(x - 1)}{(x - 2)} =$$

$$= \log_2 x \Rightarrow \frac{x - 1}{x - 2} = x \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; \text{ se } x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2};$$

não ficam definidos $\log_2 (x - 1)$ e

$$\log_{\frac{1}{2}} (x - 2). \text{ A única solução é } x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

e) Vamos escrever os logaritmos na base 2:

$$\frac{1}{3} + \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = 4$$

$$\frac{1}{3} + \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 x = 4$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \log_2 x = 4 - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{11}{6} \cdot \log_2 x = \frac{11}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4 > 0$$

$$\text{Assim, } S = \{4\}$$

$$57. a) \begin{cases} x + y = 10 \\ \log_4 (x \cdot y) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ x \cdot y = 4^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 - y \\ x \cdot y = 16 \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ em } \textcircled{2} \Rightarrow (10 - y) \cdot y = 16 \Rightarrow y^2 - 10y + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2 \Rightarrow x = 8 \\ y = 8 \Rightarrow x = 2 \end{cases} \Rightarrow S = \{(8, 2), (2, 8)\}$$

$$b) \begin{cases} x \cdot y = 1 \\ \log_3 \left(\frac{x}{y} \right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot y = 1 \\ \frac{x}{y} = 9 \Rightarrow x = 9y \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

$$\textcircled{2} \text{ em } \textcircled{1}: 9y \cdot y = 1 \Rightarrow 9y^2 = 1 \xrightarrow{y > 0} y = \frac{1}{3}$$

$$\text{em } \textcircled{2}: x = 3$$

$$\text{Assim: } S = \left\{ \left(3, \frac{1}{3} \right) \right\}$$

$$c) \begin{cases} (2^2)^{x-y} = 2^3 \\ \log_2 \left(\frac{x}{y} \right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{2x-2y} = 2^3 \\ \frac{x}{y} = 2^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 3 \\ x = 4y \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ e } x = 2$$

$$S = \left\{ \left(2, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

58. a) $D = \mathbb{R}_+^*$:

$$\log_2 x^{\frac{1}{4}} = \frac{\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 4} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \log_2 x = \frac{\log_2 x^{\frac{1}{2}}}{\log_2 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \log_2 x = \frac{1}{4} \cdot \log_2 x \text{ é satisfeita } \forall x > 0; S = \mathbb{R}_+^*;$$

b) C.E.: $x > 0$ e $x \neq 1$

$$\frac{1}{\log_x 8} = \log_8 x; \frac{1}{\log_{2x} 8} = \log_8 2x \text{ e } \frac{1}{\log_{4x} 8} = \log_8 4x.$$

Desse modo, a equação se reduz a:

$$\log_8 x + \log_8 2x + \log_8 4x = 2 \Rightarrow \log_8 (x \cdot 2x \cdot 4x) = 2 \Rightarrow 8x^3 = 64 \Rightarrow x = 2; S = \{2\}$$

59. Seja x o número procurado; $x > 0$

$$\log_4 (x - 24) = \log_4 x - 1$$

$$\log_4 (x - 24) - \log_4 x = -1$$

$$\log_4 \left(\frac{x - 24}{x} \right) = -1 \Rightarrow 4^{-1} = \frac{x - 24}{x} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{x - 24}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 96 = x \Rightarrow x = 32$$

$$a) \log_{16} 32 = a \Rightarrow 2^{4a} = 2^5 \Rightarrow a = \frac{5}{4}$$

$$b) \log_b (32 - 24) = \log_b 32 + 2$$

$$\log_b 8 - \log_b 32 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_b \left(\frac{8}{32} \right) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_b \left(\frac{1}{4} \right) = 2 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{1}{2}; \left(\text{base } \frac{1}{2} \right)$$

60. a) Devemos ter:

$$0 < x - 1 < 3 \Rightarrow 1 < x < 4; S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$$

b) Devemos ter: $x \geq 2$; $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

Observe que a base está entre 0 e 1.

c) Devemos ter:

$$\begin{cases} 2x - 7 > 0 \\ 2x - 7 > 5 \end{cases} \Rightarrow 2x - 7 > 5 \Rightarrow x > 6; S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$$

61. a) $\log_3 x > \log_3 3^2 \Rightarrow x > 9$; $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 9\}$

b) $\log_4 x < \log_4 4 \Rightarrow 0 < x < 4$; $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$

c) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{4}$;

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{4}\right\}$$

d) $\log_{\frac{2}{5}} x \leq \log_{\frac{2}{5}} \frac{2}{5} \Rightarrow x \geq \frac{2}{5}$; $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{2}{5}\right\}$

62. a) A condição de existência é:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2 \\ -x + 13 > 0 \Rightarrow x < 13 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 13 \quad \textcircled{1}$$

$$\log_2 (x - 1) + \log_2 (x + 2) \geq \log_2 (-x + 13)$$

$$\log_2 [(x - 1) \cdot (x + 2)] \geq \log_2 (-x + 13)$$

$$\log_2 (x^2 + x - 2) \geq \log_2 (-x + 13)$$

$$x^2 + x - 2 \geq -x + 13 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 \geq 0$$

$$x \leq -5 \text{ ou } x \geq 3 \quad \textcircled{2}$$

Fazendo $\textcircled{1} \cap \textcircled{2}$, obtemos $3 \leq x < 13$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 13\}$$

b) A condição de existência é:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x + 10 > 0 \Rightarrow x > -10 \end{cases} \Rightarrow x > 2 \quad \textcircled{1}$$

$$\log_{0,1} x + \log_{0,1} (x - 2) < \log_{0,1} (x + 10)$$

$$\log_{0,1} (x^2 - 2x) < \log_{0,1} (x + 10)$$

$$x^2 - 2x > x + 10 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 > 0$$

$$x < -2 \text{ ou } x > 5 \quad \textcircled{2}$$

Fazendo $\textcircled{1} \cap \textcircled{2}$, obtemos $x > 5$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$$

63. a) Devemos ter:

$$\log_2 (x - 3) \geq 0 \Rightarrow \log_2 (x - 3) \geq \log_2 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 3 \geq 1 \Rightarrow x \geq 4$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$$

b) Devemos ter:

$$\log_{\frac{1}{2}} (x + 4) \neq 0 \Rightarrow x + 4 \neq 1 \Rightarrow x \neq -3$$

$$x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -4 \text{ e } x \neq -3\}$$

c) Devemos ter:

$$\log_{\frac{1}{3}} 2x > 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} 2x > \log_{\frac{1}{3}} 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < 2x < 1 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$$

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$$

64. a) A condição de existência é: $x > 0$ (*)

Fazendo $\log_3 x = t$, obtemos a inequação:

$$t^2 - 3 \geq 2t \Rightarrow t^2 - 2t - 3 \geq 0 \Rightarrow t \leq -1 \text{ ou } t \geq 3$$



$$t \leq -1 \Rightarrow \log_3 x \leq -1 \Rightarrow \log_3 x \leq \log_3 3^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \leq 3^{-1} \Rightarrow x \leq \frac{1}{3} \quad \textcircled{1}$$

$$t \geq 3 \Rightarrow \log_3 x \geq 3 \Rightarrow \log_3 x \geq \log_3 3^3 \Rightarrow x \geq 27 \quad \textcircled{2}$$

$$\text{De (*)} \cap \textcircled{1}, \text{vem: } 0 < x \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{De (*)} \cap \textcircled{2}, \text{vem: } x \geq 27$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{3} \text{ ou } x \geq 27\right\}$$

b) A condição de existência é: $x > 0$ (*)

$$\text{Façamos } y = \log_{\frac{1}{2}} x; y^2 - 3y - 4 > 0 \Rightarrow y < -1 \text{ ou}$$

$$y > 4, \text{ isto é: } (\log_{\frac{1}{2}} x < -1) \text{ ou } (\log_{\frac{1}{2}} x > 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right) \text{ ou } \left(\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right) \text{ ou } x < \left(\frac{1}{2}\right)^4, \text{ isto é, } x > 2 \text{ ou } x < \frac{1}{16}.$$

Levando em conta a restrição obtida em (*), obtemos

$$\text{como solução: } \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{16} \text{ ou } x > 2\right\}$$

c) Devemos ter $x > 0$;

$$\log_2 x = t \Rightarrow t^2 < 4 \Rightarrow -2 < t < 2; \text{ assim,}$$

$$-2 < \log_2 x < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 2^{-2} < \log_2 x < \log_2 2^2 \Rightarrow 2^{-2} < x < 2^2;$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} < x < 4\right\}$$

65. a) Quando $m = 9$, temos:

$$-x^2 + (\log_3 9)x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 + 2x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \Delta = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{-2} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{b) } \Delta > 0 \Rightarrow (\log_3 m)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) > 0$$

$$(\log_3 m)^2 - 1 > 0 \Rightarrow (\log_3 m < -1 \text{ ou } \log_3 m > 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_3 m < \log_3 3^{-1} \text{ ou } \log_3 m > \log_3 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(0 < m < \frac{1}{3} \text{ ou } m > 3\right)$$

66. $\log_2(x-1) < \log_2 1 \Rightarrow 0 < x-1 < 1 \Rightarrow 1 < x < 2$ ①
 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}} 1 \Rightarrow 0 < x-1 < 1 \Rightarrow 1 < x < 2$ ②
 De ① e ②, temos $1 < x < 2$.

Desafio

Após t horas, a altura de uma vela é $h - t \cdot \frac{1}{5}h$ e a altura da outra vela é $h - t \cdot \frac{1}{4}h$.

A condição do problema é:

$$h - t \cdot \frac{1}{5}h = 2 \cdot \left(h - t \cdot \frac{1}{4}h\right)$$

$$h\left(1 - \frac{t}{5}\right) = 2h\left(1 - \frac{t}{4}\right)$$

$$1 - \frac{t}{5} = 2 - \frac{t}{2} \Rightarrow \frac{t}{2} - \frac{t}{5} = 1 \Rightarrow t = \frac{10}{3}h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{9}{3}h + \frac{1}{3}h = 3h + \frac{1}{3} \cdot 60 \text{ min} = 3h20\text{min}$$

Exercícios complementares

1. a)

t (meses)	n(t)
0	5 000 (valor atual)
$\frac{2}{3}$ (20 dias)	$2 \cdot 5\,000 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 5\,000$
$\frac{4}{3}$ (40 dias)	$2^2 \cdot 5\,000 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot 5\,000$
$\frac{6}{3}$ (60 dias)	$2^3 \cdot 5\,000 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{6}{3}} \cdot 5\,000$
\vdots	\vdots
t	$n(t) = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^t \cdot 5\,000$

$$t = 1 \Rightarrow n(1) = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 5\,000 = \sqrt[3]{2^2} \cdot 5\,000 = 2\sqrt{2} \cdot 5\,000 = 14\,000 \text{ (baratas)}$$

$$t = 2 \Rightarrow n(2) = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^2 \cdot 5\,000 = 40\,000 \text{ baratas}$$

b) Devemos determinar t tal que $n(t) = 5 \cdot 5\,000 = 25\,000$.

$$\text{Daí: } n(t) = 25\,000 \Rightarrow 25\,000 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^t \cdot 5\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^t \Rightarrow \log 5 = t \cdot \log 2^{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 5 = t \cdot \frac{2}{3} \cdot \log 2$$

$$\text{Como } \log 2 = \log\left(\frac{10}{5}\right) = \log 10 - \log 5 = 1 - 0,68 = 0,32, \text{ vem:}$$

$$0,68 = t \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,32 \Rightarrow t = \frac{1,36}{0,96} = \frac{17}{12}$$

$$t = \frac{17}{12} \text{ meses (1 mês + 13 dias)}$$

Assim, o tempo mínimo, em dias, é $30 + 13 = 43$.

2. ■ O ponto $(c, 2)$ pertence ao gráfico de f :

$$2 = \log_3 c \Rightarrow c = 3^2 = 9$$

■ O ponto $(b, 0)$ pertence ao gráfico de f :

$$0 = \log_3 b \Rightarrow b = 1$$

■ O ponto $(a, -\beta)$ pertence ao gráfico de f :

$$-\beta = \log_3 a \Rightarrow a = 3^{-\beta}$$

■ O ponto (d, β) pertence ao gráfico de f :

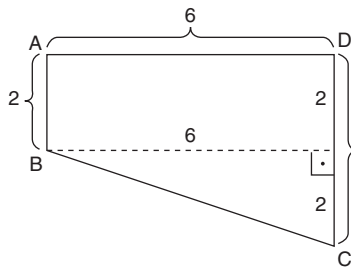
$$\beta = \log_3 d \Rightarrow d = 3^\beta$$

$$\text{Daí: } b + c + ad = 1 + 9 + 3^{-\beta} \cdot 3^\beta = 1 + 9 + 3^0 = 1 + 9 + 1 = 11$$

3. a) $\begin{cases} x_D = 9 \\ y_D = -4 \end{cases} \Rightarrow k \cdot \log_3 9 = -4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow k \cdot 2 = -4 \Rightarrow k = -2$

b) $f(x) = -2 \cdot \log_3 x$

$$f(3) = -2 \cdot \log_3 3 = -2 \cdot 1 = -2 \Rightarrow y_B = -2$$



$$(BC)^2 = 6^2 + 2^2 = 40$$

$$BC = 2\sqrt{10}$$

O perímetro do trapézio é

$$6 + 4 + 2 + 2\sqrt{10} = 12 + 2\sqrt{10}$$

4. a) $\log(1 + 2^x) + x = x \cdot \log\left(\frac{10}{2}\right) + \log 6 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \log(1 + 2^x) + x = x(\log 10 - \log 2) + \log 6 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \log(1 + 2^x) + x = x - x \cdot \log 2 + \log 6 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \log(1 + 2^x) = \log 6 - \log 2^x \Rightarrow$
 $\Rightarrow \log(1 + 2^x) = \log\left(\frac{6}{2^x}\right); \text{ façamos } t = 2^x:$

$$\Rightarrow \log(1 + t) = \log \frac{6}{t} \Rightarrow t(1 + t) = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow t = -3 \text{ (não convém)} \text{ ou } t = 2$$

$$\text{Daí: } 2^x = 2 \Rightarrow x = 1; S = \{1\}$$

b) $\log x$ existe se $x > 0$ ①

Seja $y = \log x$; a inequação equivale a:

$$\frac{1}{4}y^3 < y^2 \Rightarrow y^3 - 4y^2 < 0$$

$$\underbrace{y^2}_{f_1} \cdot \underbrace{(y - 4)}_{f_2} < 0$$

Vamos resolver a inequação $f_1 \cdot f_2 < 0$ estudando o sinal de cada função.

		0		4		
f_1	+		+		+	
f_2	-		-		+	
$f_1 \cdot f_2$	-		-		+	

$\Rightarrow y < 4$ e $y \neq 0$, isto é,

$$\begin{cases} \log x < 4 \Rightarrow \log x < \log 10^4 \Rightarrow x < 10^4 & \textcircled{2} \\ \log x \neq 0 \Rightarrow \log x \neq \log 1 \Rightarrow x \neq 1 & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \cap \textcircled{2} \cap \textcircled{3} \Rightarrow 0 < x < 10^4 \text{ e } x \neq 1$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10^4 \text{ e } x \neq 1\}$$

5. a) Instante em que ocorreu a falha: $t = 0$.

$$T(0) = 2^0 + 400 \cdot 2^0 = 1 + 400 = 401^\circ\text{C}$$

Uma hora depois, $t = 1$.

$$T(1) = 2^1 + 400 \cdot 2^{-1} = 2 + 400 \cdot \frac{1}{2} = 202^\circ\text{C}$$

- b) $t = ?$: $T(t) = 40^\circ\text{C}$

$$40 = 2t + 400 \cdot 2^{-t} \Rightarrow 40 = 2t - 400 \cdot \frac{1}{2^t}$$

Seja $2^t = y$, segue a equação:

$$40 = y + \frac{400}{y} \Rightarrow y^2 = -40y + 400 = 0, \text{ com } y \neq 0$$

$$y = \frac{40 \pm \sqrt{0}}{2} = 20$$

Daí:

$$\begin{aligned} 2^t = 20 &\Rightarrow \log_2 20 = t \Rightarrow t = \log_2 (2 \cdot 10) \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \log_2 2 + \log_2 10 = 1 + \log_2 5 + \log_2 2 = \\ &= 1 + 2,3 + 1 = 4,3 \text{ (h)} \end{aligned}$$

Como $0,3 \text{ h} = 0,3 \cdot 60 = 18 \text{ min}$, então faltou energia por 4 horas e 18 minutos.

6. a) $\log_{12} 3^3 = a \Rightarrow 3 \cdot \log_{12} 3 = a \Rightarrow \log_{12} 3 = \frac{a}{3}$ (*)

$$\text{Daí: } \log_{12} 9 = \log_{12} 3^2 = 2 \cdot \log_{12} 3 = 2 \cdot \frac{a}{3}$$

$$\text{b) } \log_{12} 3^{-1} = -1 \cdot \log_{12} 3 = -\frac{a}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \log_{81} 144 &= \frac{\log_{12} 144}{\log_{12} 9^2} = \frac{2}{\log_{12} 9^2} = \\ &= \frac{2}{2 \cdot \log_{12} 9} = \frac{1}{\log_{12} 9} = \frac{3}{2a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) De (*), vem: } \log_3 12 &= \frac{3}{a} \Rightarrow \log_3 (2^2 \cdot 3) = \frac{3}{a} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_3 2^2 + 1 = \frac{3}{a} \Rightarrow 2 \log_3 2 = \frac{3}{a} - 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_3 2 = \frac{3-a}{2a}; \end{aligned}$$

Daí:

$$\begin{aligned} \log_6 16 &= \log_6 2^4 = 4 \cdot \log_6 2 = \\ &= 4 \cdot \frac{\log_3 2}{\log_3 6} = \frac{4 \cdot \left(\frac{3-a}{2a}\right)}{\log_3 (3 \cdot 2)} = \frac{2 \cdot \left(\frac{3-a}{a}\right)}{1 + \log_3 2} = \\ &= \frac{2 \cdot \left(\frac{3-a}{a}\right)}{1 + \frac{3-a}{2a}} = \frac{2 \cdot \left(\frac{3-a}{a}\right)}{\frac{3+a}{2a}} = \frac{4 \cdot (3-a)}{3+a} \end{aligned}$$

7. Como $\log x + \log y = \log (x \cdot y)$, podemos escrever:
 $\log (x + y) = \log (x \cdot y) \Rightarrow x + y = x \cdot y$ (*)

$$\text{a) } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y+x}{xy} \text{ e, por (*), vem: } \frac{xy}{xy} = 1$$

$$\text{b) Basta considerar } x > 0 \text{ e } y > 0 \text{ tal que } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1.$$

$$\text{Por exemplo, se } x = 3 \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{y} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

$$\text{De fato, } \log \left(3 + \frac{3}{2}\right) = \log \left(\frac{9}{2}\right) = \log 3 + \log \left(\frac{3}{2}\right).$$

8. a) Devemos determinar T para o qual $P(T) = 75$:

$$75 = 100 \cdot (1 - 2^{-0,1T})$$

$$0,75 = 1 - 2^{-0,1T} \Rightarrow 2^{-0,1T} = 0,25 \Rightarrow 2^{-0,1T} = 2^{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{2}{0,1} = 20 \text{ anos}$$

- b) Para o modelo antigo:

$$P(10) = 100 \cdot (1 - 2^{-0,1 \cdot 10}) = 100 \cdot (1 - 2^{-1}) =$$

$$= 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

Do enunciado, vem:

$$Q(10) = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$$

Daí, se $T = 10$, $q(T) = \frac{25}{2}$ e podemos determinar o valor de c :

$$\frac{25}{2} = 100 \cdot (1 - 2^{c \cdot 10}) \Rightarrow \frac{1}{8} = 1 - 2^{c \cdot 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{10c} = \frac{7}{8} \Rightarrow \log_2 2^{10c} = \log_2 \left(\frac{7}{8}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10c = \log_2 7 - \log_2 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10c = 2,81 - 3 \Rightarrow 10c = -0,19 \Rightarrow c = -0,019$$

9. a) $\begin{cases} 1,5 = a \cdot 1^b \Rightarrow a = 1,5 \\ 2 = a \cdot 2^b \Rightarrow 2 = 1,5 \cdot 2^b \end{cases} \Rightarrow \log 2 = \log (1,5 \cdot 2^b) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log 2 &= \log \frac{3}{2} + b \cdot \log 2 \Rightarrow 0,30 = \log 3 - \log 2 + \\ &+ b \cdot \log 2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0,30 = 0,45 - 0,30 + b \cdot 0,30 \Rightarrow 0,15 = 0,30 \cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\text{b) } t(4) = 1,5 \cdot 4^{0,5} = 1,5 \cdot \sqrt{4} = 1,5 \cdot 2 = 3 \text{ (3 minutos)}$$

10. a) Observemos que $\sqrt[4]{4,1} > \sqrt{4} = 2$;
Como $y = 3^x$ é uma função crescente, vem:
 $\sqrt[4]{4,1} > 2 \Rightarrow 3^{\sqrt[4]{4,1}} > 3^2$, isto é, $3^{\sqrt[4]{4,1}} > 9$
- b) Observemos que
 $\log 3^{\sqrt[4]{4,1}} > \sqrt[4]{4,1} \cdot \log 3 < 2,03 \cdot 0,48 =$
 $= 0,9744 < 1 = \log 10$
Assim:
 $\log 3^{\sqrt[4]{4,1}} < \log 10$
Como $y = \log_{10} x$ é crescente, conclui-se que: $3^{\sqrt[4]{4,1}} < 10$.

11. a) Devemos ter: $0 < x \neq 1$ e $y > 0$
Da 1ª equação, vem: $\log_5 x + y = 7$ (*)
Da 2ª equação, vem: $\log_x 5^{12} = y$, ou melhor,
 $y = 12 \cdot \log_x 5 = 12 \cdot \frac{1}{\log_5 x}$
Substituindo em (*), vem:
 $\log_5 x + \frac{12}{\log_5 x} = 7$; fazendo $\log_5 x = t$, vem:
 $t + \frac{12}{t} = 7 \Rightarrow$
 $\Rightarrow t^2 - 7t + 12 = 0 \Rightarrow t = 3$ ou $t = 4$
■ Se $t = 3$, vem: $\log_5 x = 3 \Rightarrow x = 5^3$ e
 $y = \frac{12}{\log_5 5^3} = \frac{12}{3} = 4$
■ Se $t = 4$, vem: $\log_5 x = 4 \Rightarrow x = 5^4$ e
 $y = \frac{12}{\log_5 5^4} = \frac{12}{4} = 3$
 $S = \{(125, 4); (625, 3)\}$

- b) Seja $y = \log x$; $x > 0$.

Temos que $x = 10^y$. Para $y \neq 0$, segue:

$$(10^y)^{\frac{1}{y}} \cdot y < 1 \Rightarrow y < \frac{1}{10} \Rightarrow \log x < \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < x < 10^{\frac{1}{10}}, \text{ isto é, } 0 < x < \sqrt[10]{10}$$

Como $y \neq 0$, temos $\log x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \sqrt[10]{10} \text{ ou } x \neq 1\}$$

12. De acordo com o gráfico, temos:

Em 2002 ($x = 0$ e $y = 7$): $7 = a \cdot e^{k \cdot 0} \Rightarrow a = 7$;

Em 2009 ($x = 7$ e $y = 315$): $315 = a \cdot e^{k \cdot 7}$;

Como $a = 7$, vem:

$$315 = 7 \cdot e^{7k} \Rightarrow 45 = e^{7k} \Rightarrow \ln 45 = 7 \cdot k \Rightarrow k = \frac{\ln 45}{7}$$

Devemos determinar t , para o qual $y > 840$:

$$7 \cdot \left(e^{\frac{\ln 45}{7} t}\right) > 840 \Rightarrow \left(e^{\frac{\ln 45}{7} t}\right) > 120 \Rightarrow (e^{\ln 45})^{\frac{t}{7}} > 120$$

$$45^{\frac{t}{7}} > 120 \Rightarrow \ln 45^{\frac{t}{7}} > \ln 120 \Rightarrow \frac{t}{7} \cdot \ln 45 > \ln 120 (*)$$

$$\ln 45 = \ln (3^2 \cdot 5) = 2 \ln 3 + \ln 5 = 3,8$$

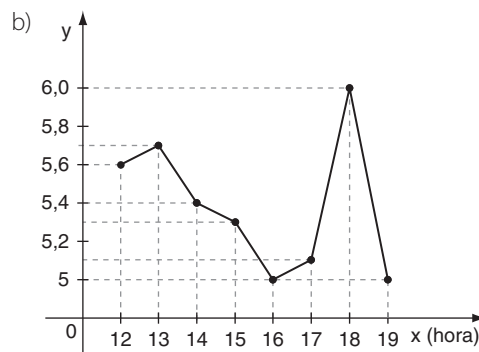
$$\ln 120 = \ln (2^3 \cdot 3 \cdot 5) = 3 \ln 2 + \ln 3 +$$

$$+ \ln 5 = 2,1 + 1,1 + 1,6 = 4,8$$

Em (*):

$$\frac{t}{7} \cdot 3,8 > 4,8 \Rightarrow t > 8,842 \Rightarrow t = 9 \text{ (ano de 2011)}.$$

13. a) ■ $y = 2,5 \cdot 10^{-6} \Rightarrow y' = -\log (2,5 \cdot 10^{-6}) = 6 - \log 2,5 =$
 $= 6 - \log \left(\frac{10}{4}\right) = 6 - (\log 10 - 2 \log 2) =$
 $= 6 - (1 - 0,6) = 5,6$
■ $y = 2,0 \cdot 10^{-6} \Rightarrow y' = -\log (2 \cdot 10^{-6}) = -(0,3 - 6) = 5,7$
■ $y = 4,0 \cdot 10^{-6} \Rightarrow y' = -\log (4 \cdot 10^{-6}) = -(2 \log 2 - 6) =$
 $= 6 - 0,6 = 5,4$
■ $y = 5 \cdot 10^{-6} \Rightarrow y' = -\log (5 \cdot 10^{-6}) = -(\log 5 - 6) =$
 $= -\left(\log \left(\frac{10}{2}\right) - 6\right) = -(1 - \log 2 - 6) =$
 $= -(-5 - \log 2) = 5 + \log 2 = 5,3$
■ $y = 10^{-5} \Rightarrow y' = -\log (10^{-5}) = 5$
■ $y = 8 \cdot 10^{-6} \Rightarrow y' = -\log (8 \cdot 10^{-6}) = -(3 \log 2 - 6) =$
 $= 6 - 0,9 = 5,1$
■ $y = 10^{-6} \Rightarrow y' = -\log (10^{-6}) = 6$
■ $y = 10^{-5} \Rightarrow y' = -\log (10^{-5}) = 5$



- c) $y' = 5,5 \Rightarrow 5,5 = -\log_{10} y \Rightarrow 5,5 = \log_{10} y^{-1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 10^{5,5} = y^{-1} \Rightarrow \frac{1}{y} = 10^{5,5}$
Como $10^{5,5} = 10^{\frac{11}{2}} = \sqrt{10^{11}} = \sqrt{10^{11} \cdot 10} =$
 $= 10^5 \cdot \sqrt{10} = 3,2 \cdot 10^5$
Daí: $\frac{1}{y} = 3,2 \cdot 10^5 \Rightarrow y = \frac{1}{3,2 \cdot 10^5} = \frac{1}{32 \cdot 10^4} =$
 $= \frac{1}{32} \cdot 10^{-4} = 0,000003125$

14. a) $T_a = 25^\circ \text{C}$

$$t = 0 \Rightarrow T = 150^\circ \text{C} \Rightarrow 150 = 25 + c \cdot 5^{-k \cdot 0} \quad \textcircled{1}$$

$$t = 1 \text{ h} \Rightarrow T_1 = 30^\circ \text{C} \Rightarrow 30 = 25 + c \cdot 5^{-k \cdot 1} \quad \textcircled{2}$$

Por ①: $150 = 25 + c \cdot 5^0 \Rightarrow c = 125$

Substituindo em ②:

$$30 = 25 + 125 \cdot 5^{-k} \Rightarrow \frac{5}{125} = 5^{-k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{25} = 5^{-k} \Rightarrow 5^{-2} = 5^{-k} \Rightarrow k = 2$$

- b) Devemos determinar t tal que $T = 26^\circ \text{C}$:

$$26 = 25 + 125 \cdot 5^{-2t} \Rightarrow \frac{1}{125} = 5^{-2t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^{-3} = 5^{-2t} \Rightarrow -3 = -2t \Rightarrow t = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ h}$$

15. $N = 20$ bilhões $= 20 \cdot 10^9 = 2 \cdot 10^{10}$

1ª vez $\rightarrow N_1 = \log N = \log (2 \cdot 10^{10}) = \log 2 + 10 > 10$

2ª vez $\rightarrow N_2 = \log N_1$: como $N_1 > 10$ (e menor que 11), $\log N_1 > 1$, isto é, $N_2 > 1$

3ª vez $\rightarrow N_3 = \log N_2$: como $1 < N_2 < 2$, $\log N_2$ é um número entre 0 e 1, isto é, $0 < N_3 < 1$

4ª vez $\rightarrow N_4 = \log N_3$: como $0 < N_3 < 1$, $\log N_3$ é um número negativo, isto é, $N_4 < 0$

Então vem:

$$\Rightarrow \log \frac{5}{2} = -2t \cdot \log 5 \Rightarrow \log 2 - \log 5 = -2t \cdot \log 5$$

$$\log 5 = \log \left(\frac{2}{10} \right) = 1 - \log 2 = 1 - 0,3 = 0,7$$

$$0,3 - 0,7 = -2t \cdot 0,7 \Rightarrow -0,4 = -1,4t \Rightarrow t = \frac{0,4}{1,4} \Rightarrow t = \frac{2}{7} \text{ h}$$

c) Devemos determinar t tal que $T = 75^\circ \text{C}$

$$75 = 25 + 125 \cdot 5^{-2t} \Rightarrow \frac{50}{125} = 5^{-2t} \Rightarrow \frac{2}{5} = 5^{-2t} \Rightarrow \Rightarrow \log \frac{2}{5} = -2t \cdot \log 5$$

$$\Rightarrow \log \frac{5}{2} = -2t \cdot \log 5 \Rightarrow \log 2 - \log 5 = -2t \cdot \log 5$$

d) $\forall \log_{10} (-\log_{10} x^3 + \log_{10} x) = 1 \Rightarrow 10^1 = -\log_{10} x^3 + \log_{10} x \Rightarrow 10 = -3 \cdot \log_{10} x + \log_{10} x \Rightarrow -2 \log_{10} x = 10 \Rightarrow \log_{10} x = -5 \Rightarrow x = 10^{-5} < 1$

16. a) f. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2+2\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2+2\sqrt{2}+1} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$

$$x = 3 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3 \in \mathbb{Q}$$

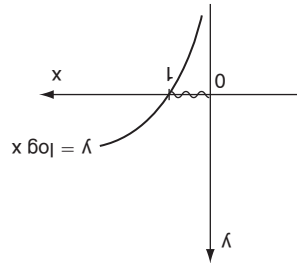
b) $\forall \frac{(x+2) \cdot (x-2) \cdot (x-4) + (4)}{x} = \frac{x+2}{x-2} = \frac{x-2}{1} = \frac{x-2}{1}$

$$5x = 9876, \frac{x-2}{1} = \frac{9874}{1}$$

c) f. $\frac{x^3 \cdot 3^x}{x^3} \cdot \frac{\frac{3}{x^4}}{\frac{3}{x^4}} = \frac{x^4}{x^3} = \frac{x}{3}$

$$5x = \frac{1}{3} \cdot \frac{1000}{3} = 3000$$

d) $\forall \log_{10} x^3 + \log_{10} x = 1 \Rightarrow 10^1 = -\log_{10} x^3 + \log_{10} x \Rightarrow 10 = -3 \cdot \log_{10} x + \log_{10} x \Rightarrow -2 \log_{10} x = 10 \Rightarrow \log_{10} x = -5 \Rightarrow x = 10^{-5} < 1$



17. a) f. $\left(\frac{162}{6} \right) = \log_3 \left(\frac{162}{6} \right) = \log_3 6 - \log_3 162 = \log_3 (3 \cdot 2) - \log_3 (2 \cdot 3^4) = 1 + \log_3 2 - (\log_3 2 + 4) = 1 - 4 = -3$

b) $\log_3 (a^2 - a + 1) < 1 \Rightarrow \log_3 (a^2 - a + 1) < \log_3 3 \Rightarrow a^2 - a + 1 < 3 \Rightarrow a^2 - a - 2 < 0 \Rightarrow -1 < a < 2$

Assim, em (*), segue que $-1 < a < 2$.

18. a) O ponto P de interseção dos gráficos de f e g tem ordenada 1.

Dai: $1 = \log_4 x \Rightarrow x = 4$ (abscissa de P).

O gráfico de g é reta que passa por (4, 1) e por (0, 3).

Façamos $y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 1 = a \cdot 4 + b \\ 3 = a \cdot 0 + b \end{cases} \Rightarrow b = 3 \text{ e } a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

Assim, a lei que define g é: $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

b) A abscissa de C corresponde à raiz de função g, a saber:

$$0 = -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 3 \Rightarrow x = 6$$

A ordenada de A é obtida trocando-se x por $\frac{7}{2}$ na lei de f: $y_A = \log_4 \frac{7}{2} = -\frac{1}{2} \left(4^{\frac{7}{2}} = \frac{4^{\frac{7}{2}}}{1} = \frac{1}{2} \right)$.

A base AB do $\triangle ABC$ mede $3 + \frac{7}{2} = \frac{13}{2}$ u.c.

A altura OC relativa a essa base mede 6 u.c.

A área pedida é: $\frac{1}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot 6 = 10,5$ u.a.

19. a) $4^{\frac{x}{2}} = 2 \cdot \log_5 [3 + \log_3 (x + 2)]$

$$\frac{2}{2} = \log_5 [3 + \log_3 (x + 2)]$$

$$5^1 = 3 + \log_3 (x + 2)$$

$$2 = \log_3 (x + 2)$$

$$3^2 = x + 2 \Rightarrow x = 7$$

$$5 = \{7\}$$

b) Devemos ter $x > 0$.

$$\log \sqrt{x} = \log x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log x$$

seguir a equação:

$$\frac{1}{2} \log x + \log x = 6 \Rightarrow \frac{3}{2} \log x = 6 \Rightarrow \log x = 4 \Rightarrow x = 10^4 = 10000$$

$$5 = \{10000\}$$

c) $\log_6 \sqrt{x} = \frac{\log_3 \sqrt{x}}{\log_3 6} = \frac{\log_3 x^{\frac{1}{2}}}{\log_3 2 \cdot \log_3 3} = \frac{\frac{1}{2} \log_3 x}{2 \cdot 1} = \frac{\log_3 x}{4}$

$$\log_6 x + \frac{1}{4} \log_3 x = \frac{2}{15} \Rightarrow \log_3 x + \frac{1}{4} \log_3 x = \frac{2}{15} \Rightarrow \frac{5}{4} \log_3 x = \frac{2}{15} \Rightarrow \log_3 x = \frac{2}{15} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{75}$$

$$\log_3 x = \frac{8}{75} \Rightarrow x = 3^{\frac{8}{75}} = \sqrt[75]{3^8} = \sqrt[75]{6561}$$

d) Os logaritmos dessa equação ficam definidos quando $0 < x \neq 1$.

$$\log_x 5 = \frac{1}{\log_5 x} \Rightarrow (\log_5 x)^2 = 8 \cdot \frac{1}{\log_5 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_5 x)^3 = 8 \Rightarrow \log_5 x = \sqrt[3]{8} \Rightarrow \log_5 x = 2 \Rightarrow x = 25$$

$$S = \{25\}$$

e) $x^{\log_3 x} = 81$; aplicando logaritmo em base 3 aos dois membros, obtemos:

$$\log_3 (x^{\log_3 x}) = \log_3 81 \Rightarrow (\log_3 x) \cdot (\log_3 x) = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_3 x)^2 = 4 \Rightarrow (\log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9) \text{ ou}$$

$$(\log_3 x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{9}).$$

$$S = \left\{9, \frac{1}{9}\right\}$$

20. $\text{pH} = 1 \Rightarrow -\log [\text{H}^+] = 1 \Rightarrow \log [\text{H}^+] = -1 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-1} \text{ mols/l}$, isto é, em 1 litro, a concentração de íons H^+ é 10^{-1} mols .

Em x litros, é $x \cdot 10^{-1} \text{ mols}$. ①

$\text{pH} = 4 \Rightarrow -\log [\text{H}^+] = 4 \Rightarrow \log [\text{H}^+] = -4 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-4} \text{ mols/l}$, isto é, em 1 litro, a concentração de íons H^+ é 10^{-4} mols ; em y litros, é: $y \cdot 10^{-4} \text{ mols}$. ②

Daí: $[\text{H}^+] = 10^{-2} \text{ mols/l}$ (raciocínio análogo aos anteriores).

Em $(x + y)$ litros, a concentração de íons $\text{H}^+ = 10^{-2} \cdot (x + y)$. ③

Devemos ter:

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} = \textcircled{3}$$

$$x \cdot 10^{-1} + y \cdot 10^{-4} = 10^{-2} \cdot (x + y)$$

$$x \cdot 10^{-1} + y \cdot 10^{-4} = x \cdot 10^{-2} + y \cdot 10^{-2}$$

$$x \cdot (10^{-1} - 10^{-2}) = y \cdot (10^{-2} - 10^{-4})$$

$$x \cdot 0,09 = y \cdot 0,0099 \Rightarrow \frac{0,0099}{0,09} = \frac{y}{x} \Rightarrow x = 0,11y$$

$$21. \frac{1}{\log_{a+b} c} = \log_c (a + b); \frac{1}{\log_{a-b} c} = \log_c (a - b)$$

$$\log_c (a + b) + \log_c (a - b) = \log_c [(a + b) \cdot (a - b)] =$$

$$= \log_c (a^2 - b^2) = \log_c c^2 = 2$$

↑
Pitágoras

22. a) $S = -18 \cdot \log (9 + 1) + 86 = -18 \cdot \log 10 + 86 = 68\%$

$$\text{b) } 50 = -18 \cdot \log (t + 1) + 86 \Rightarrow 18 \cdot \log (t + 1) = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log (t + 1) = 2 \Rightarrow 10^2 = t + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 99 \text{ minutos}$$

23. $t = 1 \rightarrow \text{produção: } 1800 \cdot 1,1^0 = 1800$

Devemos determinar t para o qual a produção é de $12,1 \cdot 1800$, a saber:

$$12,1 \cdot 1800 = 1800 \cdot 1,1^{m-1} \Rightarrow 12,1 = 1,1^{m-1} \Rightarrow \log 12,1 =$$

$$= (m - 1) \cdot \log 1,1$$

$$\log \left(\frac{121}{10}\right) = (m - 1) \cdot 0,04 \Rightarrow \log 11^2 - \log 10 = (m - 1) \cdot 0,04 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \log (1,1 \cdot 10) - 1 = (m - 1) \cdot 0,04 \Rightarrow 2 \cdot (0,04 + 1) - 1 =$$

$$= (m - 1) \cdot 0,04 \Rightarrow m = 28 \text{ (28 meses)}$$

$$24. 2^n > 5^{20} \Rightarrow \log 2^n > \log 5^{20} \Rightarrow n \cdot \log 2 > 20 \cdot \log 5$$

$$n \cdot \log 2 > 20 \cdot \log \left(\frac{10}{2}\right) \Rightarrow n \cdot \log 2 > 20 \cdot (\log 10 - \log 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \cdot \log 2 > 20 \cdot (1 - \log 2) \Rightarrow n \cdot \log 2 > 20 - 20 \log 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n + 20) \cdot \log 2 > 20 \Rightarrow n + 20 > \frac{20}{\log 2} (*)$$

Como $0,3 < \log 2 < 0,302$, temos que $\frac{1}{0,3} > \frac{1}{\log 2} >$

$$> \frac{1}{0,302} \text{ e, ainda, } \frac{20}{0,3} > \frac{20}{\log 2} > \frac{20}{0,302} \cong 66,22.$$

Assim, em (*), temos $n + 20 > 66,22 \Rightarrow n > 46,22$.

O menor inteiro que satisfaz é $n = 47$.

25. Após x semanas do início da doença, a população de peixes será $400\,000 \cdot 0,8^x$.

Do enunciado, temos que:

$$400\,000 \cdot 0,8^{10} = x$$

$$\log (400\,000 \cdot 0,8^{10}) = \log x$$

$$\log 400\,000 + \log 0,8^{10} = \log x$$

$$\log (4 \cdot 10^5) + 10 \cdot \log \left(\frac{8}{10}\right) = \log x$$

$$2 \cdot \log 2 + 5 \cdot \log 10 + 10 \cdot (3 \log 2 - 1) = \log x$$

$$2 \cdot 0,3 + 5 + 10 \cdot (3 \cdot 0,3 - 1) = \log x$$

$$5,6 - 1 = \log x \Rightarrow \log x = 4,6$$

$$\text{Assim, } 10 \cdot \log x = 10 \cdot 4,6 = 46.$$

$$26. \text{a) } f(2) = 2000 \cdot e^{2 \cdot 2 - 0,5 \cdot 2^2} = 2000 \cdot e^2 = 2000 \cdot 7,4 =$$

$$= 14\,800$$

$$\text{b) } f(0) = 2000 \cdot e^0 = 2000;$$

Daí:

$$2000 = 2000 \cdot e^{2x - 0,5x^2} \Rightarrow 1 = e^{2x - 0,5x^2} \Rightarrow 2x - 0,5x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot (2 - 0,5x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (não serve) ou } x = 4$$

Ano de 2009.

$$\text{c) } x = ? \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{10} \cdot 2000 = 200$$

$$200 = 2000 \cdot e^{2x - 0,5x^2} \Rightarrow \frac{1}{10} = e^{2x - 0,5x^2} \Rightarrow \ln \left(\frac{1}{10}\right) =$$

$$= 2x - 0,5x^2 \Rightarrow$$

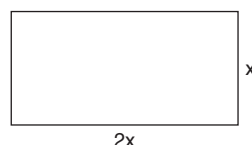
$$\Rightarrow -\ln (2 \cdot 5) = 2x - 0,5x^2 \Rightarrow -(0,7 + 1,6) = 2x - 0,5x^2$$

$$0,5x^2 - 2x - 2,3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 4,6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 + \sqrt{34,4}}{2} = 5$$

Ano de 2010.

27. a)



$$2x \cdot x = 320\,000$$

$$x^2 = 160\,000$$

$$x = 400 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}\text{Mas } \log_{16}(1-x^2) &= \log_{16}[(1+x) \cdot (1-x)] = \log_{16}(1+x) + \\ &+ \log_{16}(1-x) = \frac{\log_4(1+x)}{\log_4 16} + \frac{\log_4(1-x)}{\log_4 16} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\log_4(1+x) + \log_4(1-x))\end{aligned}$$

Em (*), temos:

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{2} [\log_4(1+x) + \log_4(1-x)] - \log_4(1+x) < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{2} \cdot (\log_4(1-x) - \log_4(1+x)) < \frac{1}{2}$$

$$-1 < \log_4\left(\frac{1-x}{1+x}\right) < 1$$

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \log_4\left(\frac{1-x}{1+x}\right) > -1 &\Rightarrow \log_4\left(\frac{1-x}{1+x}\right) > \log_4 4^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1-x}{1+x} > \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Da condição de existência, vamos multiplicar os dois membros por $1+x > 0 \Rightarrow 1-x > \frac{1}{4} \cdot (1+x) \Rightarrow x < \frac{3}{5}$.

$$\begin{aligned}\textcircled{2} \log_4\left(\frac{1-x}{1+x}\right) < 1 &\Rightarrow \log_4\left(\frac{1-x}{1+x}\right) < \log_4 4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 < \frac{1-x}{1+x} < 4\end{aligned}$$

Multiplicando por $1+x > 0$, vem:

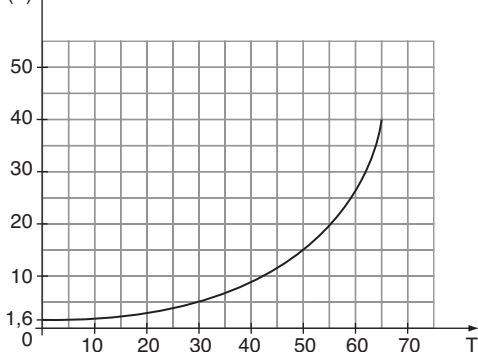
$$0 < 1-x < 4(1+x) \Rightarrow 0 < 1-x < 4+4x \Rightarrow -\frac{3}{5} < x < 1$$

$$\textcircled{1} \cap \textcircled{2} \Rightarrow -\frac{3}{5} < x < \frac{3}{5}$$

Fazendo interseção com a C.E., vem: $-\frac{3}{5} < x < \frac{3}{5}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{5} < x < \frac{3}{5} \right\}$$

34. a) $P(T)$



$$\text{b) } 1,6 = a \cdot 10^{b \cdot 0} \Rightarrow 1,6 = a \cdot 10^0 \Rightarrow a = 1,6$$

$$20 = a \cdot 10^{55b}$$

$$\text{Como } a = 1,6, \text{ vem: } 20 = 1,6 \cdot 10^{55b} \Rightarrow \frac{25}{2} = 10^{55b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{25}{2}\right) = \log 10^{55b} \Rightarrow \log 5^2 - \log 2 = 55 \cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 0,7 - 0,3 = 55 \cdot b$$

$$1,1 = 55 \cdot b \Rightarrow b = \frac{1,1}{55} = \frac{11}{550} = \frac{1}{50}$$

$$\begin{aligned}35. 30 \cdot 10^9 &= p \cdot 2^{30} \Rightarrow 3 \cdot 10^{10} = p \cdot 2^{30} \Rightarrow \log(3 \cdot 10^{10}) = \\ &= \log(p \cdot 2^{30}) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \log 3 + 10 \cdot 1 = \log p + 30 \cdot \log 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,477 + 10 = \log p + 30 \cdot 0,301 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log p = 1,477 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 10^{1,477} = 10^{1+0,477} = 10^1 \cdot 10^{0,477}$$

Como $\log 2,8 = 0,477$, temos que $10^{0,477} = 2,8$.

$$p = 10 \cdot 2,8 = 28$$

$$36. \text{ a) } G = 10 \cdot \log\left(\frac{80 \cdot P_1}{P_1}\right)$$

$$G = 10 \cdot \log 80$$

$$G = 10 \cdot \log(2^3 \cdot 10) = 10 \cdot (3 \log 2 + 1)$$

$$G = 10 \cdot (3 \cdot 0,301 + 1) = 19 \text{ dB}$$

$$\text{b) } \frac{P_2}{P_1} = ?$$

$$-20 = 10 \cdot \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \Rightarrow -2 = \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \Rightarrow 10^{-2} = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{100}$$

$$37. \blacksquare (a+b)^3 = 10^3 \cdot (a-b) \Rightarrow \left(\frac{a+b}{10}\right)^3 = a-b \quad \textcircled{1}$$

$$\blacksquare a^2 - b^2 = 10 \Rightarrow (a+b) \cdot (a-b) = 10 \quad \textcircled{2}$$

De $\textcircled{2}$, vem $a-b = \frac{10}{a+b}$ e, substituindo em $\textcircled{1}$, obtemos:

$$\left(\frac{a+b}{10}\right)^3 = \frac{10}{a+b} \Rightarrow (a+b)^4 = 10^4 \xrightarrow{a+b>0} a+b = 10$$

Em $\textcircled{2}$, vem: $10 \cdot (a-b) = 10 \Rightarrow a-b = 1$

$$(01) \text{ F. } \log 10 = 1$$

$$(02) \text{ V. } \log 1 = 0$$

$$(04) \text{ F. } a+b = 10$$

$$(08) \text{ V. } \begin{cases} a+b = 10 \\ a-b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{11}{2} \text{ e } b = \frac{9}{2}; 4a-2b =$$

$$= \frac{44}{2} - \frac{18}{2} = 13$$

$$(16) \text{ F. } a-b = 1$$

A soma é: $(02) + (08) = 10$.

38. a) Do gráfico, observa-se que, se $t = 0 \Rightarrow \log_{10} N = 6$, isto é, $\log_{10} N_0 = 6$.

$$\text{b) } \log_{10} N_0 = 6 \Rightarrow N_0 = 10^6 \text{ átomos}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } N(t) &= N_0 \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow \log N = \log(N_0 \cdot e^{-\lambda t}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_{10} N = \log_{10} N_0 + \log_{10} e^{-\lambda t} \Rightarrow \log_{10} N = 6 + \\ &+ (-\lambda t) \cdot \log_{10} e\end{aligned}$$

Do gráfico, temos, por exemplo, $t = 2 \Rightarrow \log_{10} N = 5,9$.

Daí, vem:

$$5,9 = 6 + (-\lambda \cdot 2) \cdot \log_{10} e \Rightarrow -0,1 = -2\lambda \cdot \log_{10} e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{\log_{10} e} = \frac{1}{20 \log_{10} e}$$

Devemos agora determinar o valor de t de modo que

$$N(t) = \frac{N_0}{2}.$$

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{10} \frac{1}{2} = -\lambda t \cdot \log_{10} e$$

$$-0,3 = -\frac{1}{20 \log_{10} e} \cdot t \cdot \log_{10} e \Rightarrow t = 6 \text{ horas.}$$

Outra resolução possível:

$$\text{Devemos determinar } t \text{ de modo que } N(t) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log N(t) = \log \left(\frac{N_0}{2} \right) \Rightarrow \log N(t) = \log N_0 - \log 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log N(t) = 6 - 0,3 \Rightarrow \log N(t) = 5,7.$$

Do gráfico, observamos que $\log N(t) = 5,7$ corresponde a $t = 6$.

$$39. a) \log_2 \left(\frac{1}{y} \right) = \frac{\log_2 \left(\frac{1}{y} \right)}{\log_2 2} = \frac{\log_2 1 - \log_2 y}{-1} =$$

$$= \frac{-\log_2 y}{-1} = \log_2 y$$

A 1ª equação se reduz a:

$$\log_2 (y - x) + \log_2 y = -2 \Rightarrow \log_2 (y - x) \cdot y = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 - xy = \left(\frac{1}{2} \right)^{-2} \Rightarrow y^2 - xy = 4 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 4}{y} (*)$$

Substituindo (*) na 2ª equação, vem:

$$\left(\frac{y^2 - 4}{y} \right)^2 + y^2 = 25; \text{ fazendo } y^2 = t, \text{ segue a equação:}$$

$$\frac{(t - 4)^2}{t} + t = 25 \Rightarrow 2t^2 - 33t + 16 = 0$$

$$t = 16 \text{ ou } t = -\frac{1}{2} \Rightarrow y^2 = 16 \text{ ou } y^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Como } y > 0, \text{ vem: } y = 4 \text{ ou } y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

■ Se $y = 4$, em (*), $x = \frac{4^2 - 4}{4} = 3$; $(3, 4)$ é solução.

■ Se $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, em (*), $x = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{7\sqrt{2}}{2};$

$$\left(-\frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ é solução.}$$

$$b) \log_3 x + \frac{\log_3 y}{\log_3 \frac{1}{3}} = 5 \Rightarrow \log_3 x + \frac{\log_3 y}{-1} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 x - \log_3 y = 5 \Rightarrow \log_3 \left(\frac{x}{y} \right) = 5 \Rightarrow \frac{x}{y} = 3^5 \quad \textcircled{1}$$

Escrevendo em base 3 os logaritmos do 1º membro da 2ª equação, temos:

$$\frac{\log_3 y}{\log_3 9} \cdot \frac{\log_3 y}{\log_3 27} = -1 \Rightarrow \frac{\log_3 x}{2} \cdot \frac{\log_3 y}{3} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 x \cdot \log_3 y = -6 \quad \textcircled{2}$$

① em ②:

$$\log_3 (3^5 \cdot y) \cdot \log_3 y = -6$$

$$(\log_3 3^5 + \log_3 y) \cdot \log_3 y = -6$$

$$(5 + \log_3 y) \cdot \log_3 y = -6$$

$$(\log_3 y)^2 + 5 \cdot (\log_3 y) + 6 = 0$$

$$\text{Fazendo } \log_3 y = t, \text{ vem: } t^2 + 5t + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = -2 \text{ ou } t = -3$$

$$\begin{cases} t = -2 \Rightarrow \log_3 y = -2 \Rightarrow y = 3^{-2} = \frac{1}{9} \text{ e, em } \textcircled{1}, \\ x = \frac{1}{9} \cdot 3^5 = 3^3 = 27 \\ t = -3 \Rightarrow \log_3 y = -3 \Rightarrow y = 3^{-3} = \frac{1}{27} \text{ e, em } \textcircled{1}, \\ x = \frac{1}{27} \cdot 3^5 = 3^2 = 9 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(27, \frac{1}{9} \right), \left(9, \frac{1}{27} \right) \right\}$$

$$40. a) T(4) = (21 - 30) \cdot 10^{-\frac{4}{4}} + 30$$

$$T(4) = -9 \cdot 10^{-1} + 30 = -\frac{9}{10} + 30 = 29,1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T(t) = -9 \cdot 10^{-\frac{t}{4}} + 30$$

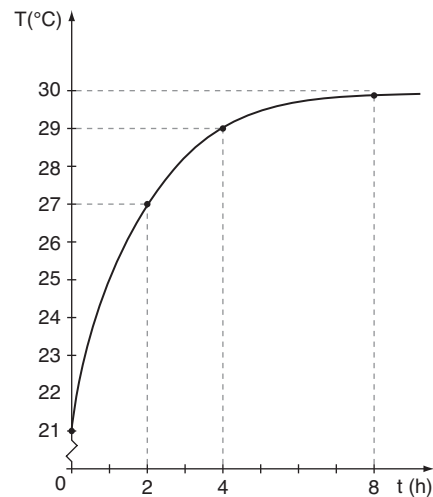
$$\text{Como } \forall t \in \mathbb{R}^+, 9 \cdot 10^{-\frac{t}{4}} > 0, \text{ temos } -9 \cdot 10^{-\frac{t}{4}} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30 - 9 \cdot 10^{-\frac{t}{4}} < 30, \text{ isto é, } T(t) < 30.$$

$$t = 0 \Rightarrow T(0) = 30 - 9 = 21$$

$$t = 4 \Rightarrow T(4) = -9 \cdot 10^{-1} + 30 = 29,1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$t = 8 \Rightarrow T(8) = -9 \cdot 10^{-2} + 30 = 29,9 \text{ } ^\circ\text{C}$$



b) No instante da quebra: $T_0 = 21 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Devemos determinar t tal que $T(t) = 21 \text{ } ^\circ\text{C} + 4 \text{ } ^\circ\text{C} = 25 \text{ } ^\circ\text{C}$.

$$25 = -9 \cdot 10^{-\frac{t}{4}} + 30$$

$$9 \cdot 10^{-\frac{t}{4}} = 5$$

$$10^{-\frac{t}{4}} = \frac{5}{9}$$

$$\log 10^{-\frac{t}{4}} = \log \left(\frac{5}{9} \right)$$

$$-\frac{t}{4} \cdot \log 10 = \log 5 - \log 3^2$$

$$-\frac{t}{4} \cdot 1 = \log\left(\frac{10}{2}\right) - 2 \cdot \log 3$$

$$-\frac{t}{4} = (1 - 0,3) - 2 \cdot 0,48$$

$$-\frac{t}{4} = -0,26$$

$$t = 1,04 \text{ h}$$

41. a) $P(20) = 20 + \ln\left(\frac{20^2}{25}\right) - 0,1 \cdot 20 = 20 + \ln 16 - 2;$

$$\ln 16 = \ln 2^4 = 4 \cdot \ln 2 = 4 \cdot 0,7 = 2,8$$

$$\text{Assim, } P(20) = 20,8 \text{ mil reais} = \text{R\$ } 20\,800,00.$$

b) $P(30) = 20 + \ln\left(\frac{30^2}{25}\right) - 0,1 \cdot 30 = 20 + \ln 36 - 3;$

$$\ln 36 = \ln(2^2 \cdot 3^2) = 2 \ln 2 + 2 \ln 3 = 2 \cdot 0,7 + 2 \cdot 1,1 = 3,6$$

$$P(30) = 17 + 3,6 = 20,6 \text{ mil reais} = \text{R\$ } 20\,600,00.$$

O lucro irá diminuir R\$ 200,00.

42. $\underbrace{(x-9)}_f \cdot \underbrace{|\log_{x+4}(x^3-26x)|}_g \leq 0$

■ g está definido se: $\begin{cases} 0 < x+4 \neq 1 \Rightarrow -4 < x \neq -3 \text{ ①} \\ x^3 - 26x > 0 \Rightarrow x \cdot \underbrace{(x^2-26)}_{y_2} > 0 \end{cases}$

	$-\sqrt{26}$	0	$+\sqrt{26}$	
y_1	-	-	+	+
y_2	+	-	-	+
$y_1 \cdot y_2$	-	+	-	+

$$-\sqrt{26} < x < 0 \text{ ou } x > \sqrt{26} \text{ ②}$$

Fazendo ① \cap ②, obtemos:

$$(-4 < x < 0, \text{ com } x \neq -3) \text{ ou } x > \sqrt{26} \text{ (*)}$$

■ Como, para todo $x \in (*)$, $g > 0$, temos que:

$$f \cdot g \leq 0 \Rightarrow f \leq 0 \Rightarrow x - 9 \leq 0 \Rightarrow x \leq 9 \text{ (**)}$$

De (*) \cap (**), obtemos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 0, \text{ com } x \neq -3 \text{ ou } \sqrt{26} < x \leq 9\}$$

$$\text{Assim, } S^c = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \text{ ou } x = -3 \text{ ou } 0 \leq x \leq \sqrt{26} \text{ ou } x > 9\}.$$

Testes

5. Observe que o domínio de f é obtido de $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$.
Resposta: d .

9. a) $V. \log(10^a) + \log(10^b) = \log(10^a \cdot 10^b) = \log(10^{a+b}) = (a+b) \cdot \log 10 = a+b$

b) $F. \log(a+b) + \log(a-b) = \log[(a+b) \cdot (a-b)] = \log(a^2 - b^2) \neq 2 \log a$

c) $V. \log(a^2 b^2) - 2 \log(ab) + \log\left(\frac{1}{10}\right) = 2 \log a + 2 \log b - 2 \log a - 2 \log b - 1 = -1$

d) $V. 10^{b \log a} = (10^{\log_{10} a})^b = a^b$

e) $V. \log \sqrt{a \cdot b} = \log(a \cdot b)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$

10. Sejam $f(x) = 10^x$ e $g(x) = 2^x$.

$$f(a) = c \Rightarrow c = f\left(\frac{1}{\log_5 10}\right) = f(\log_{10} 5) = 10^{\log_{10} 5} = 5$$

$$g(b) = c \Rightarrow 2^b = 5 \Leftrightarrow \log_2 5 = b = \frac{1}{\log_5 2}$$

Resposta: d .

11. $2^x \cdot 4^y = \frac{3}{4} \Rightarrow 2^x \cdot 2^{2y} = \frac{3}{4} \Rightarrow 2^{x+2y} = \frac{3}{4} \text{ ①}$

$$y^3 - \frac{1}{2}xy^2 = 0 \Rightarrow y^2 \cdot \left(y - \frac{1}{2}x\right) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = \frac{1}{2}x \text{ ②}$$

1º caso: $y = 0$

$$\text{Em ①, obtemos: } 2^x = \frac{3}{4} \Rightarrow \log_2\left(\frac{3}{4}\right) = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \log_2 3 - \log_2 4$$

$$x = \log_2 3 - 2$$

$$2^\circ \text{ caso: } y = \frac{1}{2}x$$

$$\text{Em ①, obtemos: } 2^{x+2 \cdot \frac{1}{2}x} = \frac{3}{4} \Rightarrow 2^{2x} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 \frac{3}{4} = 2x \Rightarrow 2x = \log_2 3 - \log_2 4 \Rightarrow 2x = \log_2 3 - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1 + \frac{\log_2 3}{2}$$

Resposta: e .

14. $9 = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{E}{10^{4,5}}\right) \Rightarrow \frac{27}{2} = \log_{10}\left(\frac{E}{10^{4,5}}\right) \Rightarrow 10^{\frac{27}{2}} = \frac{E}{10^{4,5}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E = 10^{4,5} \cdot 10^{13,5} = 10^{18}$$

Resposta: d .

15. Escrevendo $\log_4(x-6)$ em base 2, segue a equação:

$$\frac{\log_2(x-6)}{2} - \log_2(2x-16) = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2(x-6)^{\frac{1}{2}} - \log_2(2x-16) = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 \frac{\sqrt{x-6}}{2x-16} = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{x-6}}{2x-16} \Rightarrow 2x-16 =$$

$$= 2\sqrt{x-6} \text{ (*)}$$

Elevando os dois membros ao quadrado:

$$4x^2 - 64x + 256 = 4x - 24 \Rightarrow 4x^2 - 68x + 280 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 17x + 70 = 0$$

$$x = 7 \text{ ou } x = 10$$

Verificando em (*):

$$x = 7 \Rightarrow 2 \cdot 7 - 16 = 2 \cdot \sqrt{7-6} \text{ (F)}$$

$$x = 10 \Rightarrow 2 \cdot 10 - 16 = 2 \cdot \sqrt{10-6} \text{ (V)}$$

Assim, $m = 10$ e $\log 10 = 1$.

Resposta: b .

16. $f(x) = 2 \cdot \log_{1319} x$
 $f(10) + f(11) + f(12) = 2 \cdot (\log_{1319} 10 + \log_{1319} 11 + \log_{1319} 12) =$
 $= 2 \cdot \log_{1319} 1320$
 Como $\log_{1319} 1320 > \log_{1319} 1319 = 1$, segue que $n > 2$.
 Resposta: e.

20. ■ $f(p) = 1 \Rightarrow \log_k p = 1 \Rightarrow p = k^1 = k$
 ■ $f(q) = 2 \Rightarrow \log_k q = 2 \Rightarrow q = k^2$
 ■ A área do trapézio é dada por: $\frac{(2+1) \cdot (q-p)}{2} = 30$.
 $q-p = 20$, isto é, $k^2 - k - 20 = 0 \Rightarrow$
 $\xrightarrow{k>0} k = 5$
 Daí, $p = k = 5$ e $q = k^2 = 25$.
 $k + p - q = 5 + 5 - 25 = -15$
 Resposta: b.

24. Devemos ter:
 $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - x + 1) > 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - x + 1) > \log_{\frac{1}{3}} 1$
 $\xrightarrow{\text{base entre 0 e 1}} 0 < x^2 - x + 1 < 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 > 0 & \textcircled{1} \\ x^2 - x + 1 < 1 & \textcircled{2} \end{cases}$
 ■ Como em $\textcircled{1}$ temos $\Delta < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0 \Rightarrow S_1 = \mathbb{R}$.
 ■ De $\textcircled{2}$, segue que $x^2 - x < 0 \Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow S_2 =]0, 1[$
 $S = S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} =]0, 1[$
 Resposta: a.

25. O volume do líquido, após t horas, é dado por $v(t) = v_0 \cdot 0,85^t$, sendo v_0 o volume inicial.
 Note que uma redução de 15% por hora corresponde a dizer que o volume do líquido em uma determinada hora é 85% do volume da hora anterior.
 Devemos determinar t correspondente a $v(t) = \frac{v_0}{4}$:
 $\frac{v_0}{4} = v_0 \cdot 0,85^t \Rightarrow \frac{1}{4} = 0,85^t \Rightarrow \log 2^{-2} = \log 0,85^t \Rightarrow$
 $\Rightarrow -2 \cdot \log 2 = t \cdot \log 0,85 \Rightarrow -2 \cdot \log \left(\frac{10}{5}\right) =$
 $= t \cdot \log \left(\frac{85}{100}\right) \Rightarrow -2 \cdot (\log 10 - \log 5) = t \cdot (\log 85 - \log 100)$
 $-2 \cdot (1 - 0,7) = t \cdot (\log 17 + \log 5 - 2) \Rightarrow t = 6$ (6 horas)
 Resposta: c.

27. $0,9 \cdot 280 = 280 - 190 \cdot e^{-0,019 \cdot (t-1970)}$
 $190 \cdot e^{-0,019 \cdot (t-1970)} = 0,1 \cdot 280$
 $e^{-0,019 \cdot (t-1970)} = \frac{28}{190} = \frac{14}{95}$
 $\ln e^{-0,019 \cdot (t-1970)} = \ln \left(\frac{14}{95}\right)$
 $-0,019 \cdot (t-1970) = -1,9$
 $t-1970 = 100 \Rightarrow t = 2070$
 Resposta: b.

28. $M = a \cdot L^3 \Rightarrow \log M = \log (a \cdot L^3) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \log M = \log a + \log L^3 \Rightarrow \log M = \underbrace{3 \cdot \log L}_y + \underbrace{\log a}_x$
 isto é, $y = 3x + k$
 Resposta: c.

29. $t = 30; M(t) = \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} = A \cdot 2,7^{30k} \Rightarrow \frac{1}{2} = 2,7^{30k} \Rightarrow$
 $\Rightarrow -\log 2 = 30k \cdot \log 2,7 \Rightarrow k = -\frac{\log 2}{30 \cdot \log 2,7} = -\frac{0,3}{30} \cdot$
 $\cdot \frac{1}{\log 2,7} \Rightarrow k = -\frac{1}{100 \cdot \log 2,7}$
 Devemos determinar t , para o qual $M(t) = \frac{A}{10}$:
 $\frac{A}{10} = A \cdot 2,7^{kt} \Rightarrow \frac{1}{10} = 2,7^{kt} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \log \frac{1}{10} = \log 2,7^{kt} \Rightarrow -1 = k \cdot t \cdot \log 2,7 \Rightarrow$
 $\Rightarrow -1 = -\frac{1}{100 \cdot \log 2,7} \cdot t \cdot \log 2,7 \Rightarrow t = 100$ anos
 Resposta: e.

30. Devemos ter:
 $(1^\circ) 0 < x + 5 \neq 1 \Rightarrow -5 < x \neq -4$
 $(2^\circ) \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 1} > 0$; para $x \neq 1$ e $x \neq -1$, temos:
 $\frac{(x+1) \cdot (x+4)}{(x+1) \cdot (x-1)} > 0 \Rightarrow \frac{x+4}{x-1} > 0 \Rightarrow x < -4$ ou $x > 1$
 Da interseção de (1°) com (2°) , obtemos o seguinte domínio:
 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < -4 \text{ ou } x > 1\}$
 Resposta: e.

32. Do enunciado, se $t = 2025$:
 $p(t) = 8 \Rightarrow 8 = 7 \cdot e^{k \cdot 14} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{8}{7} = e^{14k} \Rightarrow \ln \left(\frac{8}{7}\right) = \ln e^{14k} \Rightarrow 14k = \ln \left(\frac{8}{7}\right) \Rightarrow$
 $\Rightarrow k = \frac{1}{14} \cdot \ln \left(\frac{8}{7}\right)$
 Devemos determinar t correspondente a $p(t) = 9$:
 $9 = 7 \cdot e^{\frac{1}{14} \ln \left(\frac{8}{7}\right) \cdot (t-2011)} \Rightarrow \ln \frac{9}{7} = \frac{1}{14} \ln \left(\frac{8}{7}\right) \cdot (t-2011) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{\ln \left(\frac{9}{7}\right)}{\ln \left(\frac{8}{7}\right)} = \frac{1}{14} \cdot (t-2011) \Rightarrow 1,88 = \frac{1}{14} \cdot (t-2011) \Rightarrow$
 $\Rightarrow t-2011 = 26,32 \Rightarrow t = 2037,32$ (triênio 2037-2039)
 Resposta: c.

33. A lei que representa o número de bactérias em t horas é
 $n(t) = 10 \cdot 2^{\frac{t}{12}}$. Como 1 semana equivale a $7 \cdot 24 \text{ h} = 168 \text{ h}$,
 devemos determinar $n(168)$:
 $n(168) = 10 \cdot 2^{\frac{168}{12}} = 10 \cdot 2^{14}$
 Como $\log 2 = 0,3 \Rightarrow 10^{0,3} = 2$ e assim $2^{14} = (10^{0,3})^{14} = 10^{4,2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow n(168) = 10 \cdot 10^{4,2} = 10^{5,2}$
 Resposta: b.

34. Devemos determinar x tal que $T(x) = \frac{T_0}{10}$:
 $\frac{T_0}{10} = T_0 \cdot (0,5)^{0,1x} \Rightarrow \frac{1}{10} = (0,5)^{0,1x} \Rightarrow \log \left(\frac{1}{10}\right) = \log (0,5)^{0,1x} \Rightarrow$
 $\Rightarrow -1 = 0,1x \cdot \log \left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow -1 = 0,1 \cdot x \cdot (-0,3) \Rightarrow$
 $\Rightarrow -1 = -0,03x \Rightarrow x = \frac{1}{0,03} = \frac{100}{3} = 33,3$
 Logo, $D = 34$.
 Resposta: c.

35. Calculando $\log 2^{57}$, vem:

$$\log 2^{57} = 57 \cdot \log 2 = 57 \cdot 0,30 = 17,1 \Rightarrow 10^{17,1} = 2^{57} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2^{57} = 10^{17} \cdot 10^{0,1} \Rightarrow \underbrace{10^{17}}_k \cdot 10^{0,1}$$

Assim, o número de algarismos de 2^{57} é $17 + 1 = 18$.

Resposta: c.

36. $3,6 = 0,1 + \log_2(x - 1996) \Rightarrow 3,5 = \log_2(x - 1996) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2^{\frac{7}{2}} = x - 1996 \Rightarrow \sqrt{2^7} = x - 1996 \Rightarrow 8 \cdot \sqrt{2} = x - 1996 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 11,2 = x - 1996 \Rightarrow x = 2007,2$ (meados de 2007)

Resposta: d.

37. Temos: $T(t) = 140^\circ\text{C}$; $T_0 = 740^\circ\text{C}$; $T_{ar} = 40^\circ\text{C}$ e devemos determinar o valor de t :

$$140 = (740 - 40) \cdot 10^{-\frac{t}{12}} + 40 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{140 - 40}{700} = 10^{-\frac{t}{12}} \Rightarrow \frac{1}{7} = 10^{-\frac{t}{12}} \Rightarrow \log \frac{1}{7} = -\frac{t}{12} \Rightarrow \\ \Rightarrow t = -12 \cdot (\log 1 - \log 7) \\ t = -12 \cdot (0 - \log 7) = 12 \cdot \log 7$$

Resposta: c.

38. $p(A) = 9 \cdot 1,03^t$; $p(B) = 11 \cdot 1,02^t$

Devemos determinar t para o qual $p(A) = p(B)$, isto é:

$$9 \cdot 1,03^t = 11 \cdot 1,02^t \Rightarrow \frac{1,03^t}{1,02^t} = \frac{11}{9} \Rightarrow \left(\frac{1,03}{1,02}\right)^t = \frac{11}{9} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{1,03}{1,02}\right)^t = \ln\left(\frac{11}{9}\right) \Rightarrow t \cdot 0,01 = 0,2 \Rightarrow t = 20$$

Resposta: e.

39. $\log 2 = 0,30 \Rightarrow 10^{0,30} = 2$

$$\log 3 = 0,47 \Rightarrow 10^{0,47} = 3$$

$$N = 2^{120} \cdot 3^{30} = (10^{0,3})^{120} \cdot (10^{0,47})^{30}$$

$$N = 10^{36} \cdot 10^{14,1} = 10^{50,1}$$

Resposta: b.

40. Para fixar ideias, imagine que a taxa de redução anual seja de 10%, a partir de um valor 100 (início).

início	1 ano	2 anos	3 anos...
100	90	81	72,9...

Observe que a razão $\frac{90}{100} = \frac{81}{90} = \frac{72,9}{81} = \dots$ é constante.

Assim, de acordo com o enunciado, o percentual anual (i) de redução é constante. Temos:

Emissão em 1990: x

Emissão em 2009: $1,28x$

Emissão em 2020: $0,8x$ > período de 11 anos

Daí:

$$1,28x \cdot (1 - i)^{11} = 0,8x \Rightarrow 1,28 \cdot (1 - i)^{11} = 0,8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - i)^{11} = \frac{0,8}{1,28} \Rightarrow (1 - i)^{11} = \frac{5}{8} \Rightarrow \log(1 - i)^{11} = \log\left(\frac{5}{8}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11 \cdot \log(1 - i) = \log 5 - 3 \log 2 \Rightarrow 11 \cdot \log(1 - i) = \\ = \log 5 - 3 \log\left(\frac{10}{5}\right)$$

$$11 \cdot \log(1 - i) = \log 5 - 3 \log 10 + 3 \log 5$$

$$11 \cdot \log(1 - i) = 4 \log 5 - 3 \Rightarrow 11 \cdot \log(1 - i) =$$

$$= 4 \cdot 0,695 - 3 \Rightarrow 11 \cdot \log(1 - i) = -0,22 \Rightarrow \log(1 - i) = \\ = -0,02 \Rightarrow 10^{-0,02} = 1 - i \Rightarrow i = 1 - 10^{-0,02}$$

A razão é: $\frac{(1 - i) \cdot x}{x} = 1 - i = 1 - (1 - 10^{-0,02}) = 10^{-0,02}$

Resposta: b.

41. $\ln 100 = \ln 10^2 = 2 \cdot \ln 10 = 2 \ln 5 + 2 \ln 2$

Do gráfico, temos:

$$x = 2 \Rightarrow 2 \cdot \ln 2 = 1,38 \Rightarrow \ln 2 = 0,69$$

$$x = 5 \Rightarrow 2 \cdot \ln 5 = 3,22 \Rightarrow \ln 5 = 1,61$$

Assim, o valor procurado é $2 \cdot 1,61 + 2 \cdot 0,69 = 4,6$.

Resposta: a.

42. $E = \frac{2^{-5} \cdot 10^{\frac{2}{3}}}{10^{\frac{1}{6}}}$

$$E = 2^{-5} \cdot 10^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = 2^{-5} \cdot 10^{\frac{1}{2}}$$

$$\log E = \log(2^{-5} \cdot 10^{\frac{1}{2}}) = -5 \log 2 + \frac{1}{2} = -5 \cdot 0,3 + 0,5 = -1$$

Assim, se $\log E = -1 \Rightarrow E = 10^{-1} = \frac{1}{10}$

Resposta: e.

Capítulo 9 Complemento sobre funções

Exercícios

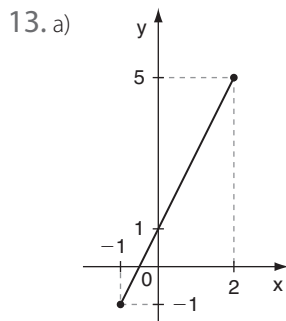
- Sobrejetora.
Não é injetora, pois $f(-1) = f(1)$.
- Sobrejetora e injetora \Rightarrow bijetora.
- Injetora.
Não é sobrejetora, pois 4 e 5 não são imagens de x do domínio.
- Não é injetora, pois $f(-1) = f(1)$.
Não é sobrejetora, pois -1 não é imagem de x do domínio.
- Bijetora.
- Sobrejetora. Não é injetora, pois $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$.
- Injetora. Não é sobrejetora, pois, por exemplo, 1 não é imagem de x do domínio.
- Bijetora.

9. Não é injetora nem sobrejetora.
Observe, por exemplo, que, se $x = 0$ ou $x = 2$, então $y = 4$ (f não é injetora).
Além disso, $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\}$ e o contradomínio de f é \mathbb{R} (f não é sobrejetora).

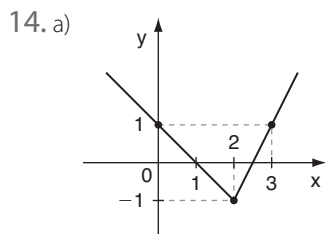
10. São injetoras: a, d, e ;
■ observe em (b) que $f(-x) = f(x)$;
■ em (c), todo $x \in \mathbb{R}$ está associado a uma mesma imagem;
■ em (f), por exemplo, $y = 1$ é imagem de dois valores distintos de x .

11. São sobrejetoras: a, b, c, d ;
 f não é sobrejetora, pois $y = 0$ não é imagem de nenhum x do domínio.
 f não é sobrejetora, pois $y < 0$ não é imagem de nenhum real não nulo.
São bijetoras: b, c .

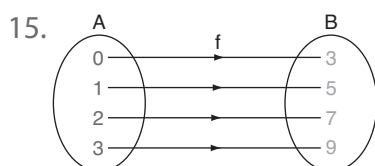
12. $f(n) = n + 1$
a) Sim.
b) Não, pois 0 não é sucessor de qualquer número natural.
c) Não, pois não é sobrejetora.



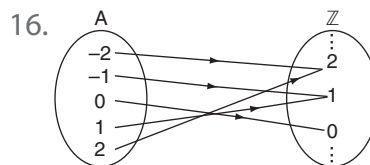
- b) f é injetora; seu conjunto imagem é $[-1, 5]$. Desse modo, se $B = [-1, 5]$, f será sobrejetora e, portanto, bijetora.



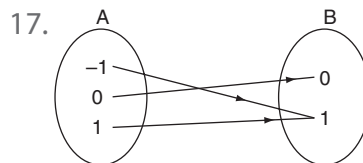
- b) f não é injetora, pois $y = 1$ é imagem de $x = 0$ e de $x = 3$, por exemplo.
 f é sobrejetora, pois $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$.
 f não é bijetora.



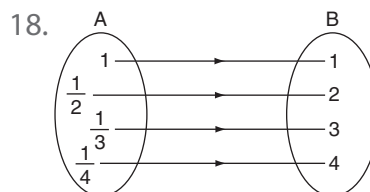
f é inversível.
 $x = 2y + 3 \Rightarrow y = \frac{x-3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$



f não é injetora nem sobrejetora $\Rightarrow f$ não é inversível.

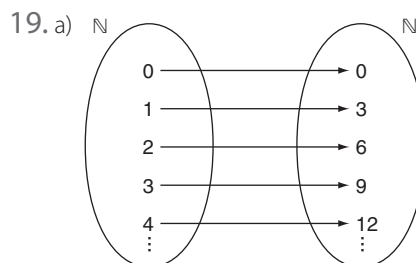


- a) Sim.
b) Não, pois $f(-1) = f(1)$.
c) f não é bijetora; portanto, não é inversível.

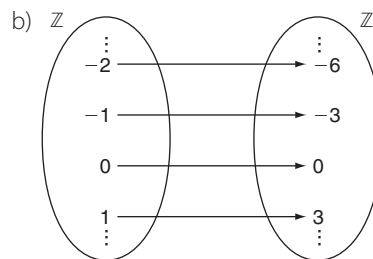


f é inversível.

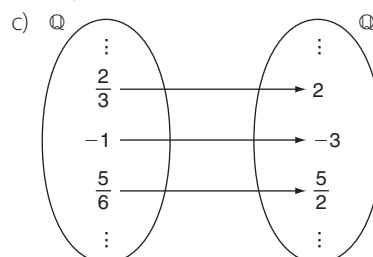
$$x = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{x} = f^{-1}(x)$$



f é injetora, mas não sobrejetora, pois apenas os múltiplos de 3 são imagem de algum x ; portanto, não é inversível.

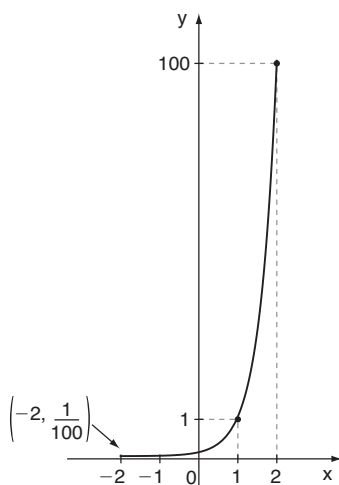


$\text{Im}(f) = \{y \mid y = 3z, \text{ em que } z \in \mathbb{Z}\}$. Logo, f não é sobrejetora; portanto, não é inversível.



Nesse caso, todo número racional é imagem de algum x . A função f é bijetora e, portanto, inversível.

20. a)



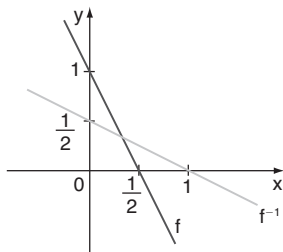
b) Sim.

$$y = 10^x \Leftrightarrow x = 10^y \Rightarrow y = \log_{10} x \text{ (ou } y = \log x)$$

Logo, $f^{-1}(x) = \log x$.

21. a) $x = -2y + 1 \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2}$

b)



22. Inversa de $f: x = 2y + a \Rightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{a}{2}$.

Como $f^{-1}(9) = 7$, então $7 = \frac{9}{2} - \frac{a}{2} \Rightarrow a = -5 \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(x) = 2x - 5$.

$f(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$

23. a) $x = \frac{4y-3}{5} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{3+5x}{4}$

b) $x = y^3 \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $x = \frac{1-2y}{3} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{1-3x}{2}$

24. a) f é do tipo $y = ax + b$. Como $(1, 3)$ pertence a f , então
 $a + b = 3$ ①

f^{-1} é determinada por $x = ay + b \Rightarrow y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.

Como $(1, 0)$ pertence a f^{-1} , então $0 = \frac{1}{a} - \frac{b}{a} \Rightarrow$
 $\Rightarrow b = 1$ ②

Substituindo ② em ①, tem-se $a = 2$.

Então, $f(x) = 2x + 1$ e $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

b) Procuramos o x para o qual $f(x) = f^{-1}(x)$.

$2x + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1$. Então, $f(-1) = -1$, e o
 ponto de interseção é $(-1, -1)$.

25. a) É injetora, não é sobrejetora, pois os números negativos não são imagens de x do domínio \Rightarrow não é bijetora nem inversível.

b) É injetora e sobrejetora \Rightarrow é bijetora e inversível.

26. a) ■ Como o domínio é \mathbb{R}_+ , temos que, para $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, com $x_1 \neq x_2$, $x_1^2 \neq x_2^2$ e $x_1^2 + 2 \neq x_2^2 + 2$, isto é, $f(x_1) \neq f(x_2)$; f é injetora.

■ $x_v = \frac{-b}{2a} = 0$

$y_v = 0^2 + 2 = 2$

$(0, 2)$ é ponto mínimo de f e, desse modo, $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$ é o contradomínio de f . Logo, f é sobrejetora.

$y = x^2 + 2 \Rightarrow x = y^2 + 2$

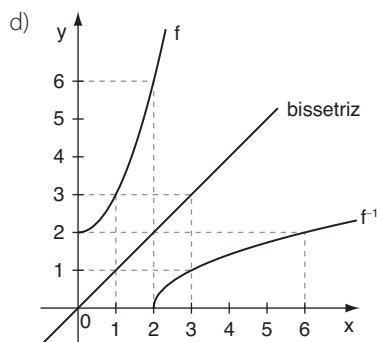
$y^2 = x - 2 \xrightarrow{y \geq 0} y = f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$

f é bijetora e inversível.

b) $D(f^{-1}) = [2, +\infty[$

c) $f^{-1}(a) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = a \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = a \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$



27. a) $f(g(3)) = f(2) = 11$

b) $g(f(3)) = g(15) = 14$

c) $g(f(0)) = g(3) = 2$

d) $f(f(1)) = f(7) = 31$

28. a) $f(g(2)) = f(0) = -3$

b) $f(g(-2)) = f(8) = 21$

c) $g(f(2)) = g(-9) = 22$

d) $g(g(5)) = g(-6) = 16$

29. a) $f(g(x)) = f(3x^2 - x + 4) = 1 - 2 \cdot (3x^2 - x + 4) =$
 $= -6x^2 + 2x - 7$

b) $g(f(x)) = g(1 - 2x) = 3(1 - 2x)^2 - (1 - 2x) + 4 =$
 $= 12x^2 - 10x + 6$

c) $f(f(x)) = f(1 - 2x) = 1 - 2 \cdot (1 - 2x) = 4x - 1$

30. a) $f(g(x)) = f(3x - 1) = 4$

b) $g(f(x)) = g(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$

c) $g(g(x)) = g(3x - 1) = 3 \cdot (3x - 1) - 1 = 9x - 4$

$$31. f(g(x)) = g(f(x)) \Rightarrow f(-2x + 5) = g(3x + k) \Rightarrow \\ \Rightarrow 3 \cdot (-2x + 5) + k = -2 \cdot (3x + k) + 5 \Rightarrow k = -\frac{10}{3}$$

$$32. a) f(g(x)) = -8 \Rightarrow f(-2x^2 + x - 1) = -8 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4(-2x^2 + x - 1) - 4 = -8 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x^2 - x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad S = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$$

$$b) f(x) = g(3) \Rightarrow 4x - 4 = -2 \cdot 3^2 + 3 - 1 \Rightarrow x = -3 \\ S = \{-3\}$$

$$c) g(f(x)) = 0 \Rightarrow g(4x - 4) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -2 \cdot (4x - 4)^2 + 4x - 4 - 1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 32x^2 - 68x + 37 = 0, \text{ que não tem raízes reais.} \\ S = \emptyset$$

$$33. \text{ Se } f(x) = -10x + 2, \text{ então } f(g(x)) = -10g(x) + 2 = \\ = -30x - 48 \Rightarrow g(x) = 3x + 5$$

$$34. a) \text{ Como } f(x) = -7x + a, \text{ então } f(f(x)) = -7 \cdot f(x) + a = \\ = 49x - 120 \Rightarrow f(x) = -7x + \frac{120 + a}{7}$$

$$\text{Então, } -7x + a = -7x + \frac{120 + a}{7} \Rightarrow a = 20.$$

$$b) f(x) = -7x + 20 \Rightarrow f(f(3)) = f(-1) = 27$$

$$35. \text{ A função } f \text{ é do tipo } f(x) = ax + b \text{ e } f(g(x)) = \\ = a \cdot g(x) + b = a \cdot (-2x + 3) + b = -2ax + (3a + b) \\ \text{Como } f(x) = -10x + 13, \text{ então } -2a = -10 \text{ e } 3a + b = 13, \\ \text{ou seja, } a = 5 \text{ e } b = -2. \\ \text{A lei é } f(x) = 5x - 2.$$

$$36. a) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x^2 + 2) = \sqrt{3x^2 + 2}$$

$$b) (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 3(\sqrt{x})^2 + 2 \\ \text{Como } x \geq 0, \text{ vem: } (g \circ f)(x) = 3x + 2.$$

$$c) \sqrt{3x^2 + 2} = 3x + 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3x^2 + 2 = (3x + 2)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3x^2 + 2 = 9x^2 + 12x + 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow 6x^2 + 12x + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{6} \cong \frac{-6 \pm 4,90}{6}$$

Como $x_1 < 0$ e $x_2 < 0$, concluímos que não existem valores que satisfazem a equação $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

Desafio

É preciso virar as cartas **A** e **E** para checar se na outra face aparece um número par.

A "frase" a ser testada é equivalente a: "Se uma carta não tem número par em uma face (isto é, se ela tem um número ímpar), então não tem vogal na outra". Assim, é preciso virar a carta **3** para checar se na outra face não aparece uma vogal. Então, o menor número de cartas a serem viradas é 3.

Exercícios complementares

1. Vamos observar alguns valores que a função assume:

$$n = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0}{2} = 0$$

$$n = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1+1}{2} = 1 \quad \left. \begin{array}{l} n = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{2}{2} = 1 \\ n = 3 \Rightarrow f(3) = \frac{3+1}{2} = 2 \\ n = 4 \Rightarrow f(4) = \frac{4}{2} = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f \text{ não é injetora,} \\ \text{pois } f(1) = f(2). \\ f(3) = f(4) = 2 \end{array}$$

$$n = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{2}{2} = 1$$

$$n = 3 \Rightarrow f(3) = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$n = 4 \Rightarrow f(4) = \frac{4}{2} = 2$$

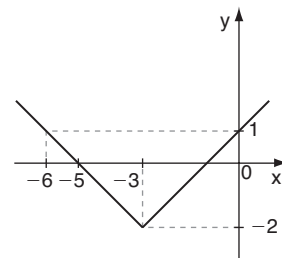
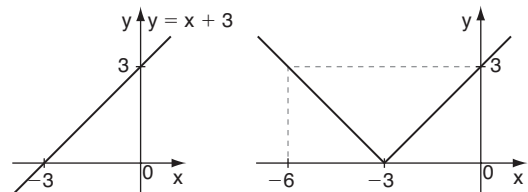
$$n = 5 \Rightarrow f(5) = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$n = 6 \Rightarrow f(6) = \frac{6}{2} = 3$$

$$\vdots \quad \vdots$$

Assim, f é sobrejetora: não é injetora nem bijetora.

2. Vamos construir o gráfico de f para determinar seu conjunto imagem; inicialmente consideramos $D = \mathbb{R}$.



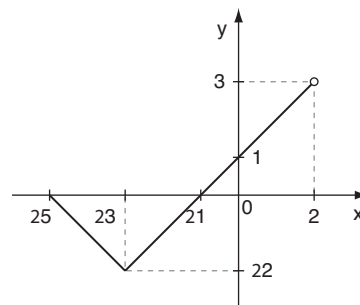
Como $D = [-5, 2]$, temos:

$$f(-5) = |-5 + 3| - 2 = |-2| - 2 = 0$$

Se $x = 2$ pertencesse ao domínio, teríamos:

$$f(2) = |2 + 3| - 2 = 3$$

Observe o gráfico de f restrita ao domínio $[-5, 2]$:



Como $\text{Im}(f) = [-2, 3]$, segue que, se $B = [-2, 3]$, então f é sobrejetora.

f não é injetora, pois $f(-1) = f(-5) = 0$, por exemplo.

3. Seja a o elemento procurado:

$$a) f^{-1}(a) = 5 \Leftrightarrow f(5) = a \Rightarrow a = \frac{4 \cdot 5 - 3}{5 + 2} = \frac{17}{7}$$

$$b) y = \frac{4x - 3}{x + 2}$$

Trocando x por y :

$$x = \frac{4y - 3}{y + 2}$$

Isolando y :

$$xy + 2x = 4y - 3 \Rightarrow (x - 4) \cdot y = -2x - 3 \Rightarrow y = \frac{-2x - 3}{x - 4}$$

$$\text{isto é, } f^{-1}(x) = \frac{-2x - 3}{x - 4}$$

■ f^{-1} está definida se $x - 4 \neq 0$, isto é, $x \neq 4$

$$D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare 5 &= \frac{-2x - 3}{x - 4} \Rightarrow 5x - 20 = -2x - 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 7x = 17 \Rightarrow x = \frac{17}{7} \end{aligned}$$

4. a) Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{-1\}$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$.

Temos:

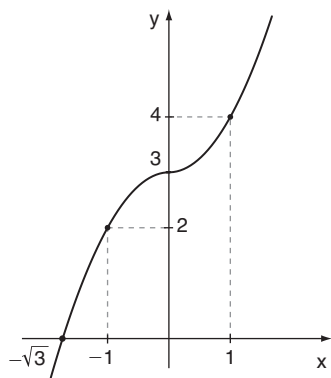
$$\begin{aligned} \frac{2x_1 + 3}{x_1 + 1} &= \frac{2x_2 + 3}{x_2 + 1} \Rightarrow (2x_1 + 3)(x_2 + 1) = \\ &= (2x_2 + 3)(x_1 + 1) \Rightarrow 2x_1x_2 + 2x_1 + 3x_2 + 3 = \\ &= 2x_2x_1 + 2x_2 + 3x_1 + 3 \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 = 2x_2 + 3x_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_2 = x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) y &= \frac{2x + 3}{x + 1} \Rightarrow y(x + 1) = 2x + 3 \Rightarrow yx - 2x = 3 - y \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{3 - y}{y - 2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3 - x}{x - 2} \end{aligned}$$

Então, o domínio de f^{-1} é $\mathbb{R} - \{2\}$.

5. Se $x \geq 0$, $f(x) = x^2 + 3$ é crescente e varia de 3 a $+\infty$. Se $x < 0$, $f(x) = -x^2 + 3$ é crescente e varia de $-\infty$ a 3. Portanto, f é crescente em \mathbb{R} , sendo, consequentemente, injetora. Além disso, o conjunto imagem de f é \mathbb{R} ; portanto, f é sobrejetora.

O gráfico de f é:



Determinemos a função f^{-1} .

Para $x \geq 0$, $y = f(x) = x^2 + 3$, então $x = +\sqrt{y - 3}$; portanto, $f^{-1}(y) = \sqrt{y - 3}$, ou seja, $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 3}$ para $x \geq 3$.

Para $x < 0$, $y = f(x) = 3 - x^2$, então $x = -\sqrt{3 - y}$; portanto, $f^{-1}(y) = -\sqrt{3 - y}$, ou seja, $f^{-1}(x) = -\sqrt{3 - x}$ para $x < 3$.

6. Façamos $2x - 1 = t$. Daí, vem $x = \frac{1 + t}{2}$, portanto:

$$f(t) = \frac{1 + t}{2} = \frac{1 + t}{3 \cdot \frac{1 + t}{2} - 6}, \text{ logo, } f(x) = y = \frac{1 + x}{3x - 9}$$

$$\begin{aligned} \text{Resultado: } (3x - 9)y &= 1 + x \Rightarrow 3xy - 9y = 1 + x \Rightarrow \\ &\Rightarrow (3y - 1)x = 9y + 1 \Rightarrow x = \frac{9y + 1}{3y - 1} = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{9x + 1}{3x - 1}$$

7. Seja f uma função bijetora e ímpar, com domínio D . Então f possui uma função inversa f^{-1} tal que $(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}, \forall a \in D$.

Sendo ímpar, f é tal que $(a, b) \in f \Rightarrow (-a, -b) \in f, \forall a \in D$. Temos:

$$(b, a) \in f^{-1} \Rightarrow (a, b) \in f \Rightarrow (-a, -b) \in f \Rightarrow (-b, -a) \in f^{-1}$$

Assim, está provado que f^{-1} é ímpar.

$$\begin{aligned} 8. f(g(x)) &= f(x^2 - 2x + 2) = m \cdot (x^2 - 2x + 2) + 3 = \\ &= mx^2 - 2mx + (2m + 3) = 0 \end{aligned}$$

A equação admite raiz real se $\Delta \geq 0$, ou seja:

$$(-2m)^2 - 4m \cdot (2m + 3) \geq 0,$$

cuja solução é

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 0\}.$$

A condição sobre m é $-3 \leq m \leq 0$.

$$9. a) g(0) = (0^2 - 0 + 6)(2 \cdot 0 - 0)^2 = 6 \cdot 0 = 0$$

$$f(g(0)) = f(0) = 2 + \sqrt{0} = 2$$

$$f(1) = 2 + \sqrt{1} = 2 + 1 = 3$$

$$g(f(1)) = g(3) = (3^2 - 3 + 6)(2 \cdot 3 - 3^2) = (12)(-3) = -36$$

$$b) f(g(x)) = 2 + \sqrt{(x^2 - x + 6)(2x - x^2)}$$

$$\text{Então é necessário } \underbrace{(x^2 - x + 6)}_A \underbrace{(2x - x^2)}_B \geq 0.$$

		0		2	
A	+		+		+
B	-		+		-
A · B	-		+		-

$$D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$$

10. Se f é uma função afim, então $f(x) = ax + b$;

$$f(f(x)) = f(ax + b) = a \cdot (ax + b) + b = a^2x + ab + b$$

Daí:

$$a^2x + (ab + b) = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 & \textcircled{1} \\ ab + b = 1 & \textcircled{2} \end{cases}$$

De $\textcircled{1}$, vem: $a = \pm 1$

$$\blacksquare \text{ Se } a = 1, \text{ em } \textcircled{2} \text{ obtemos } 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2};$$

$$f(x) = x + \frac{1}{2}$$

■ Se $a = -1$, em ② obtemos $-b + b = 1 \Rightarrow 0 \cdot b = 1 \Rightarrow \nexists b \in \mathbb{R}$, que satisfaz a condição do exercício.

a) $f(x) = x + \frac{1}{2}$

b) $f(f(2)) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$
 $f(f(-3)) = f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = -2$ } a soma pedida vale 1

11. a) $f(g(x)) = f(ax + b) = (ax + b)^2 - 2 \cdot (ax + b) = a^2x^2 + 2a(b-1)x + (b^2 - 2b)$

b) Se $x = 0$, $a^2 \cdot 0 + 2a \cdot (b-1) \cdot 0 + (b^2 - 2b) = 0$

Se $x = 1$, $a^2 \cdot 1 + 2a \cdot (b-1) + (b^2 - 2b) = 0$

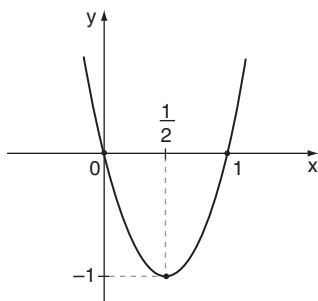
Substituindo $b = 0$ em ②, tem-se $a = 0$ ou $a = 2$.

Substituindo $b = 2$ em ②, tem-se $a = 0$ ou $a = -2$.

O sistema $\begin{cases} b^2 - 2b = 0 & \text{①} \\ a^2 + 2ab - 2a + b^2 - 2b = 0 & \text{②} \end{cases}$

tem as seguintes soluções: $a = b = 0$, $b = 0$ e $a = 2$, $b = 2$ e $a = 0$, $b = 2$ e $a = -2$, pois de ① tem-se $b = 0$ e $b = 2$.

c) Se $b = 2$ e $a = -2$, $f(x) = 4x^2 - 4x$, e seu gráfico é uma parábola de raízes 0 e 1 e concavidade para cima.



12. a) $f(g(x)) = 2x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow f(2x-3) = 2x^2 - 4x + 1$; fazendo

$t = 2x - 3$, vem $x = \frac{t+3}{2}$.

$f(t) = 2 \cdot \left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{t+3}{2}\right) + 1$

$f(t) = \frac{2(t^2 + 6t + 9)}{4} - 2t - 6 + 1$

$f(t) = \frac{t^2}{2} + 3t + \frac{9}{2} - 2t - 5$

$f(t) = \frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2 \cdot f(x) - 3 =$

$= 2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\right) - 3 = x^2 + 2x - 4$

13. a) Se $x = 2$ e $a = 2$, $f(4) = 2 \cdot f(2) = 2$ e $f(2) = 1$

Se $x = 3$, $g(3) = f(2) + 1 = 2$

b) $f(x) = f\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} \cdot f(2) = \frac{x}{2}$

c) $g(x) = 8 \Rightarrow f(x-1) + 1 = 8 \Rightarrow f(x-1) = 7$

$\frac{x-1}{2} = 7$ e $x = 15$

14. a) $f(2) = \frac{2+1}{-2+1} = -3$

b) $f(f(x)) = x \Rightarrow \frac{f(x)+1}{-f(x)+1} = x \Rightarrow \frac{\frac{x+1}{-x+1}+1}{-\frac{x+1}{-x+1}+1} = x \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x+1-x+1}{-x-1-x+1} = x \Rightarrow \frac{2}{-2x} = x \Rightarrow -2x^2 = 2 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$

Logo $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(f(x)) = x$.

c) Vimos no item b que $f(f(x)) = \frac{2}{-2x} = -\frac{1}{x}$

Daí, vem:

$f(f(f(f(x)))) = 2011 \Rightarrow f\left(f\left(-\frac{1}{x}\right)\right) = 2011$

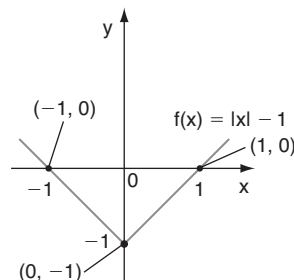
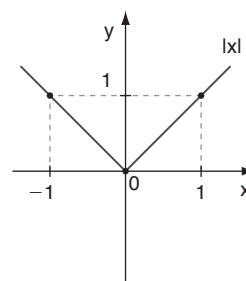
Mas $f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{-1+x}{1+x}$, então:

$f\left(f\left(-\frac{1}{x}\right)\right) = 2011 \Rightarrow f\left(\frac{-1+x}{1+x}\right) = 2011 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\frac{-1+x}{1+x}+1}{-\frac{-1+x}{1+x}+1} = 2011 \Rightarrow \frac{-1+x+1+x}{1-x+1+x} =$

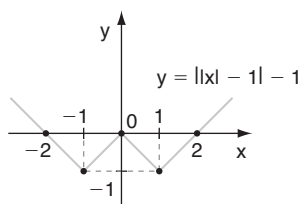
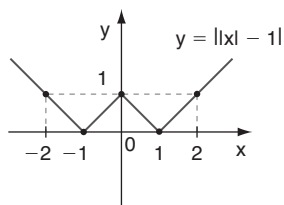
$= 2011 \Rightarrow x = 2011$

15. a) Basta deslocar verticalmente o gráfico de $y = |x|$ uma unidade para baixo:



b) $g(x) = f(f(x)) = f(|x| - 1) = ||x| - 1| - 1$

O gráfico de $y = ||x| - 1|$ é obtido do item anterior, "rebatendo-se" a parte em que $y < 0$:



c) $g(x) = 5 \Rightarrow ||x| - 1| - 1 = 5 \Rightarrow ||x| - 1| = 6 \Rightarrow |x| - 1 = 6$
 $= 6$ ou $|x| - 1 = -6$, isto é, $|x| = 7$ ou $|x| = -5$.
 $|x| = 7 \Rightarrow x = \pm 7$; $|x| = -5 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

16. a) $f(x) = x^2 + bx + c$

$$x_v = -\frac{b}{2} = 1 \Rightarrow b = -2$$

$$y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 + c = 1 \Rightarrow c = 2$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

$$g(f(x)) = 0 \Rightarrow k \cdot f(x) + 4 = 0 \Rightarrow kx^2 - 2kx + 2k + 4 = 0$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow (-2k)^2 - 4k(2k + 4) \geq 0 \Rightarrow -4k^2 - 16k \geq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq k \leq 0. \text{ Note que } k = 0 \text{ não convém porque nesse caso temos } g(x) = 4 \neq 0, \forall x.$$

17. $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(0) = 0$

$$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(0) = 3$$

$$\text{Então, } f(g(4)) + g(f(-2)) = 0 + 3 = 3$$

18. A função h é do tipo $y = ax + b$. Pelo diagrama:

$$h(f(x)) = g(x)$$

$$h(x + 320) = a \cdot (x + 320) + b = \frac{1}{5}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax + (320a + b) = \frac{1}{5}x$$

Do sistema $\begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ 320a + b = 0 \end{cases}$, tem-se que

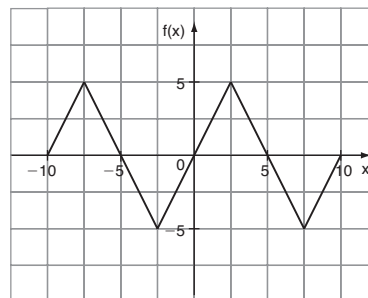
$$b = -64 \text{ e } h(y) = \frac{1}{5}y - 64.$$

$$\text{Se } y = 400, h(y) = 16.$$

19. a) (I) Se $-5 \leq x \leq 0$, temos $f(x) = -f(-x)$, ou seja, o gráfico é simétrico (em relação à origem) do gráfico dado.

(II) Se $-10 \leq x \leq -5$, temos $f(x) = f(x + 10)$, ou seja, o gráfico é igual ao gráfico dado.

(III) Se $5 \leq x \leq 10$, temos $f(x) = f(x + 10)$, ou seja, o gráfico é igual ao que foi construído em (I)
 $f(99) = f(89) = f(79) = \dots = f(9) = -2$, pois
 $f(x) = 2x - 20$, para $7,5 < x < 10$



b) $h(3) = g(f(3)) = g(10 - 2 \cdot 3) = g(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 = 0$

Se $2,5 \leq x \leq 5$, então o gráfico é o segmento de extremidades $(2,5; 5)$ e $(5, 0)$ que está sobre a reta.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2,5 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x + 2,5y - 25 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 10 - 2x = f(x)$$

$$h(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 4f(x) = (10 - 2x)^2 - 4(10 - 2x) = 4x^2 - 32x + 60$$

Testes

1. F. $f(2) = f(3)$

F. O domínio de f é $\left[-\frac{5}{2}; 6\right]$.

F. $f(4) = 3$

V

Resposta: d.

2. f é sobrejetora se $\text{Im}(f) = \underbrace{[a, +\infty[}_{\text{contradomínio}}$

Para todo $m \in \mathbb{R}^*$, $m^2 > 0$ e a parábola tem concavidade voltada para cima e seu ponto de mínimo é dado por (x_v, y_v) , em que:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[(4m)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot 1]}{4 \cdot m^2} = \frac{-(16m^2 - 4m^2)}{4m^2}$$

$$y_v = \frac{-12m^2}{4m^2} = -3 \text{ (valor mínimo que } f \text{ assume)}$$

Assim, $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -3\} = [-3, +\infty[$. Temos, portanto, $a = -3$.

Resposta: b.

3. (0-0) F. $f(-1) = -1$ e $f(1) = 1$, por exemplo.

(1-1) V. $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

(2-2) V. $(x - 1)^2 \geq 0, \forall x$, então:

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Rightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1$$

(3-3) V. Toda reta horizontal que intercepta o eixo y nos intervalos $-1 < y < 0$ ou $0 < y < 1$, intercepta o gráfico em dois pontos distintos. Note que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(4-4) F. Existem valores de y no contradomínio de f que não são imagem de qualquer x do domínio. Exemplo: $y = 2$.

4. $f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = (f(0))^2 \Rightarrow f(0) = 1$

Façamos $f(1) = a$, com $a \neq 1$. Temos:

$$f(2) = f(1 + 1) = f(1) \cdot f(1) = a^2$$

$$f(3) = f(2 + 1) = f(2) \cdot f(1) = a^2 \cdot a = a^3$$

E assim por diante. Pode-se concluir que f é uma função exponencial. Em consequência, temos:

(I) F

(II) V

(III) V

(IV) V

Resposta: e.

5. I) V. g_1 é crescente em \mathbb{R} e $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_1(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = +\infty$

II) V. g_2 é crescente em \mathbb{R}

III) F. g_3 não é injetora nem sobrejetora

Resposta: c.

6. Fazendo $f(x) = ax + b$ com a e b reais, vem:

$$f(-2) = 0 \Rightarrow -2a + b = 0$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow a \cdot 0 + b = 1$$

$$\text{Daí, } b = 1 \text{ e } a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Em consequência, } f(x) = \frac{x}{2} + 1.$$

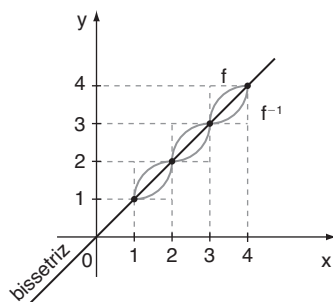
$$y = \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow x = 2y - 2$$

Permutando as variáveis, temos:

$$y = 2x - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 2$$

Resposta: c.

7. Como o gráfico de f^{-1} é simétrico do gráfico de f em relação à bissetriz do 1º e do 3º quadrante, então:



Resposta: a.

8. Fazendo $f(x) = ax + b$, temos:

$$f(0) = 3 \Rightarrow a \cdot 0 + b = 3 \Rightarrow b = 3$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow a \cdot 2 + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

Assim, $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$ e daí:

$$y = -\frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}y + 2$$

$$\text{Permutando as variáveis, } f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}x + 2.$$

Como $g(1) = 1^3 + 1 = 2$, resulta:

$$f^{-1}(g(1)) = f^{-1}(2) = -\frac{2}{3} \cdot 2 + 2 = \frac{2}{3}$$

Resposta: d.

9. $f(g(3)) - g(f(3)) = f(10) - g(7) = 21 - 22 = -1$

Resposta: a.

10. Se n é ímpar, $f(f(n)) = f(n + 1)$

$$\text{Mas } n + 1 \text{ é par, então } f(n + 1) = \frac{n + 1}{2}$$

Se $\frac{n + 1}{2}$ é ímpar, então:

$$f(f(f(n))) = f\left(\frac{n + 1}{2}\right) = \frac{n + 1}{2} + 1 = \frac{n + 3}{2} = 5 \Rightarrow n = 7$$

Se $\frac{n + 1}{2}$ é par, então:

$$f(f(f(n))) = f\left(\frac{n + 1}{2}\right) = \frac{\frac{n + 1}{2}}{2} = \frac{n + 1}{4} = 5 \Rightarrow n = 19$$

Resposta: d.

11. $h(x) = f(g(x)) = 2(g(x)) - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2}(x - 1) - 1 = x - 2$

Se $y = x - 2$, então $x = y + 2$ e $h^{-1}(x)$ é definida por

$$y = x + 2.$$

Resposta: a.

12. Se $x \leq 2$, a reta correspondente passa por $(0, 3)$ e $(1, 2)$:

$$y = ax + 3 \Rightarrow 2 = a \cdot 1 + 3 \Rightarrow a = -1; y = -x + 3$$

E se $x = 2 \Rightarrow y = -2 + 3 = 1$, isto é, $f(2) = 1$.

$$\text{Daí, } f(f(\pi)) = f(1) = 2.$$

Como $2 < \pi < 4$,

$$f(\pi) = 1$$

Resposta: d.

13. Com base na leitura dos gráficos, temos:

$$g(0) = 2 \Rightarrow f(g(0)) = f(2) = -5$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow g(f(1)) = g(0) = 2$$

Resposta: b.

14. $f(g(x)) = g(x) \Rightarrow 2(x^2 + 5x + 3) - 9 = x^2 + 5x + 3 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = -6$ ou $x = 1$

$$\text{Daí, vem } |-6| + |1| = 7.$$

Resposta: d.

15. É dado que $f(1) = 0$, então vamos impor a condição

$2x + 3 = 1$, ou seja, $x = -1$. Temos:

$$g(-1) = f(2(-1) + 3) + 5 = f(1) + 5 = 0 + 5 = 5$$

Concluimos que o gráfico de x passa pelo ponto $(-1, 5)$.

Resposta: b.

16. $f(g(x)) = 3 \cdot g(x) + 5 = 3(ax + b) + 5$
 $g(f(x)) = a \cdot f(x) + b = a(3x + 5) + b$
 Como devemos ter $f(g(x)) = g(f(x))$, $\forall x$, resulta:
 $3(ax + b) + 5 = a(3x + 5) + b$, $\forall x$
 $3b + 5 = 5a + b$
 $2b = 5a - 5$
 Resposta: a.

17. $f(g(x)) = f(x - 1) = \sqrt{(x - 1)^2 + 4(x - 1)} = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$.
 Devemos ter $x^2 + 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \leq -3$ ou $x \geq 1$.
 Resposta: a.

18. $g(0,5) = \frac{1}{f(f(0,5))} = \frac{1}{f\left(\frac{1-0,5}{1+0,5}\right)} = \frac{1}{f\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}} = 2$

Resposta: a.

19. $f(g(x)) = g(f(x))$, $\forall x$
 $m \cdot g(x) + 3 = 4 \cdot f(x) - 1$, $\forall x$
 $m \cdot (4x - 1) + 3 = 4mx + 12 - 1$, $\forall x$
 $m = -8$
 $f(x) = -8x + 3$ e $g(x) = 4x - 1$
 $f(x) = g(x) \Rightarrow x = \frac{1}{3}$
 Resposta: e.

20. $g(f(x)) = f(x) + 1 = 2x - 2 \Rightarrow f(x) = 2x - 3$
 $f(5) + g(2) = 7 + 3 = 10$
 Resposta: a.

21. $f(-1) = (-1)^2 + b(-1) + 1 = 2 - b$
 $f(f(-1)) = f(2 - b) = (2 - b)^2 + b(2 - b) + 1 = 5 - 2b$
 Como $f(f(-1)) = 3$, resulta em $5 - 2b = 3$, então $b = 1$.
 Resposta: d.

22. (01) V. Se $a \in \mathbb{Q}$, $f(a) = 5a - \sqrt{2}$ é irracional.

$\downarrow \quad \downarrow$
 $\in \mathbb{Q} \quad \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

- (02) F. $g(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 32 > 0$; duas raízes reais e distintas.

- (04) F. f é crescente, pois $a = 5 > 0$.

O vértice da parábola relativa à função g é:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y_v = g(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 1 = -8$$

Se $x \in [0, +\infty[$, g é decrescente ($0 \leq x < 3$) e crescente ($x > 3$).

- (08) V. $(f \circ g)(x) = f(x^2 - 6x + 1) = 5 \cdot (x^2 - 6x + 1) - \sqrt{2} = 5x^2 - 30x + (5 - \sqrt{2})$; o gráfico é uma parábola.

- (16) F. f é inversível (injetora e sobrejetora)
 g não é inversível, pois $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -8\}$ e o contradomínio de g é \mathbb{R} . Assim, g não é sobrejetora e, portanto, não é inversível.

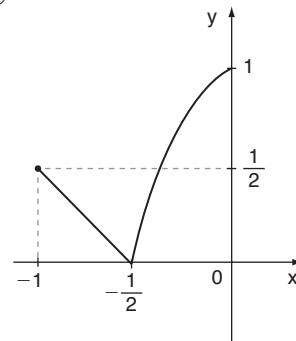
Resposta: (01) + (08) = 09.

23. (01) V. $y = f(x) \in [0, 1]$ para todos $x \in [0, 1]$.

- (02) F. $f(1) = \frac{1}{2}$ e existe a tal que $0 < a < \frac{1}{2}$ e $f(a) = \frac{1}{2}$.

- (04) V

- (08) V. $g(x) = f(-x)$ tem gráfico simétrico ao de f em relação ao eixo y .



- (16) V. $f(f(f(0))) = f(f(1)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ e

$$f(f(f(1))) = f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(0) = 1$$

- (32) F. Se $f \circ f \circ f = i$, então $f \circ f = f^{-1}$ e f^{-1} não existe, uma vez que f não é injetora.

Resposta: (01) + (04) + (08) + (16) = 29.

24. 1) V

$$f(x) \cdot g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \text{Existem três valores de } x \text{ no intervalo } [-10, 10].$$

- 2) V. No intervalo $(0, 3)$ as funções f e g assumem valores negativos, então $f(x) \cdot g(x) > 0$.

- 3) F. $g(0) < 0 \Rightarrow f(g(0)) > 0$ e

$$f(0) = 0 \Rightarrow g(f(0)) = g(0) < 0$$

- 4) F. No intervalo $[3, 10]$ a função g cresce e depois decresce.

Resposta: c.

25. Se $0 \leq x \leq 8$, a lei da função é $y = 3x + 6$.

Se $8 \leq x \leq 15$, a lei da função é $y = 30$.

Se $15 \leq x \leq 30$, a lei da função é $y = -2x + 60$.

I. $f(4) = 3 \cdot 4 + 6 = 18$
 $f(21) = -2 \cdot 21 + 60 = 18 \Rightarrow f(4) = f(21)$

II. $f(f(f(0))) = \frac{f(f(6))}{3 \cdot 6 + 6} = \frac{f(24)}{-2 \cdot 24 + 60} = 12 = \frac{f(2)}{3 \cdot 2 + 6}$

III. $f(f(6)) = f(24) = 12$

$$2 \cdot f(f(f(8))) = 2 \cdot f(f(30)) = 2 \cdot f(0) = 2 \cdot 6 = 12$$

Resposta: d.

26. Se $f(f(x)) = 6$, então $f(x) = -2$ ou $f(x) = 1$.

A equação $f(x) = -2$ tem duas soluções.

A equação $f(x) = 1$ tem quatro soluções.

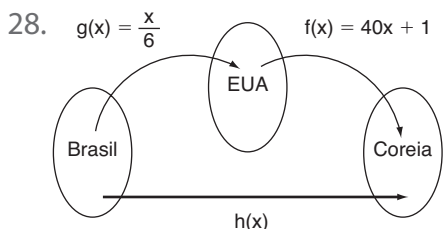
O total de soluções é 6.

Resposta: d.

27. As alternativas a e c são falsas, devido à simetria dos gráficos $g = f^{-1}$; portanto, $g(f(x)) = f(g(x)) = x, \forall x$.
A alternativa b também é falsa, porque $f(x) \neq 2^x$, uma vez que $f(2) = 5 \neq 2^2$.

A função f é tal que $f(x) = x^2 + 1$ e a inversa de f é a função $f^{-1}(x) = g(x) = \sqrt{x-1}$; portanto, a alternativa d é verdadeira.

Resposta: d .



$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{6}\right) = 40 \cdot \frac{x}{6} + 1$$

$$h(x) = \frac{20x}{3} + 1$$

Resposta: c .

29. $g(h(x)) = 4(3x - 2) + 5 = 12x - 3$

$$h(g(x)) = 3(4x + 5) - 2 = 12x + 13$$

$$g(h(2)) = 12 \cdot 2 - 3 = 21$$

$$h(g(0)) = 12 \cdot 0 + 13 = 13$$

Então a equação proposta fica:

$$(12x - 3) + (12x + 13) = 21 - 13$$

$$24x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{12}$$

Resposta: c .

Capítulo 10 Progressões

Exercícios

1. a) $a_2 = -3 + 5 \cdot 2 = 7$
b) $a_4 = -3 + 5 \cdot 4 = 17$
c) $a_{11} = -3 + 5 \cdot 11 = 52$

2. $a_1 = 3 + 2 + 1 = 6$
 $a_2 = 3 + 4 + 4 = 11$
 $a_3 = 3 + 6 + 9 = 18$
 $a_4 = 3 + 8 + 16 = 27$

3. a) $n = 1 \Rightarrow f(1) = 3 \cdot 2 = 6$
 $n = 2 \Rightarrow f(2) = 3 \cdot 3 = 9$
 $n = 3 \Rightarrow f(3) = 3 \cdot 4 = 12$
 $n = 4 \Rightarrow f(4) = 3 \cdot 5 = 15$
 \vdots

A sequência associada a f é: $(6, 9, 12, 15, \dots)$.

- b) $g(1) = 1 - 2 + 4 = 3$
 $g(2) = 4 - 4 + 4 = 4$
 $g(3) = 9 - 6 + 4 = 7$
 $g(4) = 16 - 8 + 4 = 12$
 \vdots

A sequência associada a g é: $(3, 4, 7, 12, \dots)$.

4. a) $-7 = -37 + 6n \Rightarrow 6n = 30 \Rightarrow n = 5$ (5º termo)
b) $46 = -37 + 6n \Rightarrow 83 = 6n \Rightarrow n = 13,83\dots$ ($n \notin \mathbb{N}$)
c) $123 = -37 + 6n \Rightarrow 160 = 6n \Rightarrow n \notin \mathbb{N}$
d) $251 = -37 + 6n \Rightarrow 288 = 6n \Rightarrow n = 48$ (48º termo)

5. $a_2 = 2 \cdot 3^2 = 18$;
 $a_4 = 2 \cdot 3^4 = 162 \Rightarrow a_2 + a_4 = 18 + 162 = 180$

6. $a_2 = 2 \cdot a_1 + 3 = 2 \cdot (-5) + 3 = -7$
 $a_3 = 2 \cdot a_2 + 3 = 2 \cdot (-7) + 3 = -11$
 $a_4 = 2 \cdot a_3 + 3 = 2 \cdot (-11) + 3 = -19$
 $a_5 = 2 \cdot a_4 + 3 = 2 \cdot (-19) + 3 = -35$
A sequência é: $(-5, -7, -11, -19, -35, \dots)$.

7. $a_1 = 2$
 $a_2 = 3 \cdot 2 = 6$
 $a_3 = 3 \cdot 6 = 18$
 $a_4 = 3 \cdot 18 = 54$
 $a_5 = 3 \cdot 54 = 162$
 $a_6 = 3 \cdot 162 = 486$

8. O 3º termo da sequência é $f(3) = 3^3 + 3^2 + 1 = 37$.
O 6º termo da sequência é $f(6) = 6^3 + 6^2 + 1 = 253$.
Portanto, a sequência é: $(3, 13, 37, 81, 151, 253, \dots)$.

9. a) $a_1 = -193 + 3 = -190$; $a_2 = -193 + 6 = -187$
 $a_3 = -193 + 9 = -184$; $a_4 = -193 + 12 = -181$
 $a_5 = -193 + 15 = -178$
 $(a_n) = (-190, -187, -184, -181, -178, \dots)$
 $b_1 = 220 - 4 = 216$; $b_2 = 220 - 8 = 212$
 $b_3 = 220 - 12 = 208$
 $b_4 = 220 - 16 = 204$; $b_5 = 220 - 20 = 200$
 $(b_n) = (216, 212, 208, 204, 200, \dots)$
b) $a_n > 0 \Rightarrow -193 + 3n > 0 \Rightarrow n > 64,33 \dots$; como $n \in \mathbb{N}$, temos que $n = 65$ (65º termo)
 $a_{65} = -193 + 195 = 2$
c) $b_n < 0 \Rightarrow 220 - 4n < 0 \Rightarrow n > 55 \Rightarrow n = 56$ (56º termo)
 $b_{56} = 220 - 224 = -4$
d) $a_n = b_n \Rightarrow -193 + 3n = 220 - 4n \Rightarrow 7n = 413 \Rightarrow n = 59$ (59º termo)
 $a_{59} = b_{59} = -16$

10. a, c, d e f .

11. a) $r = -3$; decrescente
 b) $r = 6$; crescente
 c) $r = 0$; constante
 d) $r = -10$; decrescente
 e) $r = \frac{2}{3}$; crescente
 f) $r = 1$; crescente

12. a) $a_8 = a_1 + 7r$
 $a_8 = 28 + 7 \cdot 8$
 $a_8 = 84$
 b) $a_{19} = a_1 + 18r$
 $a_{19} = 28 + 18 \cdot 8$
 $a_{19} = 172$

13. $r = -4$
 a) $a_{15} = a_1 + 14r$
 $a_{15} = -31 + 14 \cdot (-4)$
 $a_{15} = -31 - 56$
 $a_{15} = -87$
 b) $a_{31} = a_1 + 30r$
 $a_{31} = -31 + 30 \cdot (-4)$
 $a_{31} = -31 - 120$
 $a_{31} = -151$

14. $a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow -49 = -73 + 6r \Rightarrow 6r = 24 \Rightarrow r = 4$

15. $a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow 98 = a_1 + 9 \cdot 9 \Rightarrow a_1 = 17 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a_2 = 17 + 9 = 26$

16. $a_5 = 205$; $r = 45$
 a) $a_5 = a_1 + 4r \Rightarrow 205 = a_1 + 4 \cdot 45 \Rightarrow a_1 = 25$ (reais)
 b) $a_{12} = a_1 + 11r \Rightarrow a_{12} = 25 + 11 \cdot 45 \Rightarrow a_{12} = 520$ (reais)
 c) $a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_{10} = 25 + 9 \cdot 45 \Rightarrow 430$
 $a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow a_7 = 25 + 6 \cdot 45 \Rightarrow 295$
 A razão pedida é $\frac{430}{295} = \frac{86}{59}$.

17. (236, 211, 186, ...) é uma P.A. de razão -25 .
 a) $a_6 = a_1 + 5r \Rightarrow a_6 = 236 - 125 = 111$
 b) $a_8 = a_6 + 2r \Rightarrow a_8 = 111 - 50 = 61$
 c) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow a_n = 236 + (n-1) \cdot (-25) \Rightarrow$
 $\Rightarrow a_n = -25n + 261$
 $a_n > 0 \Leftrightarrow -25n + 261 > 0 \Rightarrow n < \frac{261}{25} \Rightarrow n < 10,44...$
 O maior valor natural de n que satisfaz a condição é $n = 10$ (meses).

18. $\begin{cases} a_4 = 24 \\ a_9 = 79 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_9 = a_4 + 5r \\ 79 = 24 + 5r \Rightarrow r = 11 \end{cases}$
 $a_4 = a_1 + 3r \Rightarrow 24 = a_1 + 33 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a_1 = -9 \Rightarrow \text{P.A.: } (-9, 2, 13, 24, 35, ...)$

19. $a_1 + a_3 + a_4 = a_1 + a_1 + 2r + a_1 + 3r$

Assim, temos: $\begin{cases} 3a_1 + 5r = 0 \\ a_1 + 5r = 40 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -20 \text{ e } r = 12$

A P.A. é: $(-20, -8, 4, 16, 28, 40, ...)$.

20. $a_1 = 310 - 8 = 302 \Rightarrow r = a_2 - a_1 = 294 - 302 = -8$
 $a_2 = 310 - 16 = 294$

21. a) $a_n = 2 + (n-1) \cdot 2$
 $a_n = 2 + 2n - 2$
 $a_n = 2n$; $n \in \mathbb{N}^*$
 b) $a_n = -1 + (n-1) \cdot 5$
 $a_n = -1 + 5n - 5$
 $a_n = 5n - 6$; $n \in \mathbb{N}^*$
 c) $a_n = 33 + (n-1) \cdot (-3)$
 $a_n = 33 - 3n + 3$
 $a_n = 36 - 3n$; $n \in \mathbb{N}^*$

22. a) $3x + 1 = \frac{3x - 5 + 25}{2} \Rightarrow 6x + 2 = 3x + 20 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = 6$
 P.A.: (13, 19, 25); $r = 6$

b) $x + 2 = \frac{-6 - x + 4x}{2} \Rightarrow 2x + 4 = 3x - 6 \Rightarrow x = 10$;
 P.A.: $(-6 - 10; 10 + 2; 4 \cdot 10) = (-16, 12, 40)$; $r = 28$

c) $x^2 = \frac{x + 3 + 6x + 1}{2} \Rightarrow 2x^2 - 7x - 4 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$
 Se $x = 4$, a P.A. é (7, 16, 25); $r = 9$
 Se $x = -\frac{1}{2}$, a P.A. é $(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}, -2)$; $r = -2,25$

23. $a_1 = 200$ (prestação do 1º ano)
 $r = 20$
 a) $a_5 = 200 + 4 \cdot 20 = 280$ reais
 b) $a_{10} = 200 + 9 \cdot 20 = 380$ reais
 O total pago no 10º ano é: $12 \cdot 380 = 4560$ reais.

24. $565 = 131 + (n-1) \cdot 7$
 $\frac{434}{7} = n - 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow n = 1 + 62 = 63$ (termos)

25. $r = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}$
 a) $a_8 = a_1 + 7r = 2 + 7 \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$
 b) $a_n = 18 \Rightarrow 18 = 2 + (n-1) \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow 16 = (n-1) \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 48 = n - 1 \Rightarrow n = 49$

26. $62, _, _, _, _, _, _, _, 97$
 $\uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $a_1 \quad \quad \quad a_8$
 $a_8 = a_1 + 7r \Rightarrow 97 = 62 + 7r \Rightarrow r = 5$
 A P.A. obtida é: (62, 67, 72, 77, 82, 87, 92, 97).

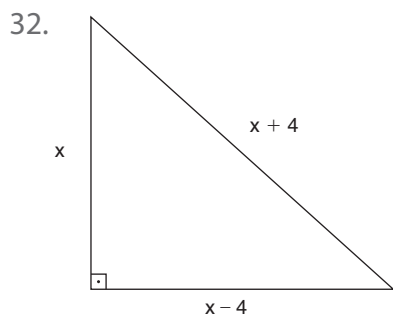
27. a) $117, _, _, _, _, _, _, _, _, _, _, _, _, _, _, _, 333$
 $\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $a_1 \quad \quad \quad a_{19}$
 $a_{19} = a_1 + 18r \Rightarrow 333 = 117 + 18r \Rightarrow r = 12$
 b) $a_{10} = a_1 + 9r = 117 + 9 \cdot 12 = 225$

28. (73, 75, 77, ..., 467)
 $\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $a_1 \quad \quad \quad a_n$
 $467 = 73 + (n-1) \cdot 2$
 $\frac{394}{2} = n-1 \Rightarrow n = 198$

29. (63, 66, 69, ..., 498)
 $\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $a_1 \quad \quad \quad a_n$
 $498 = 63 + (n-1) \cdot 3$
 $\frac{435}{3} = n-1 \Rightarrow n = 146$

30. $(x-r, x, x+r)$
 $x-r + x + x+r = 72 \Rightarrow 3x = 72 \Rightarrow x = 24$
 $(x-r) \cdot (x+r) = 560 \Rightarrow x^2 - r^2 = 560 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 24^2 - r^2 = 560 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = \pm 4$
 Se $r = 4$, a P.A. é: (24-4, 24, 24+4) = (20, 24, 28).
 Se $r = -4$, a P.A. é: (28, 24, 20).

31. medidas dos ângulos do triângulo: $(x-r, x, x+r)$
 $x+r = 105^\circ$
 $x-r + x + x+r = 180^\circ$
 $3x = 180^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$
 As medidas são: (15°, 60°, 105°).

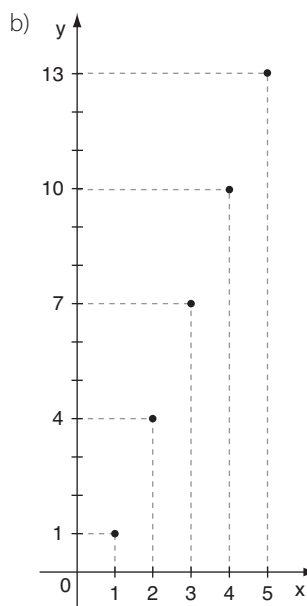


$(x+4)^2 = x^2 + (x-4)^2 \Rightarrow 8x = x^2 - 8x \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^2 - 16x = 0 \Rightarrow x = 16$
 A hipotenusa mede $16 + 4 = 20$.

33. $(\underbrace{y-r, y}_{x}, \underbrace{y, y+r}_{z}) (*)$
 ■ perímetro = 96 $\Rightarrow 3y = 96 \Rightarrow y = 32$
 ■ área = 384 $\Rightarrow \frac{(y-r) \cdot y}{2} = 384 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{(32-r) \cdot 32}{2} = 384 \Rightarrow 32-r = 24 \Rightarrow r = 8$
 Em (*), $x = 32-8 = 24$ (cm); $y = 32$ (cm) e $z = 32+8 = 40$ (cm)

34. ■ 1ª semana: (2, 4, 6, ..., 500)
 $\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $a_1 \quad \quad \quad a_n$
 $500 = 2 + (n-1) \cdot 2$
 $n = 250$ (250 pessoas)
 ■ 2ª semana: (3, 9, 15, 21, ..., 495)
 P.A. de razão 6
 $495 = 3 + (n-1) \cdot 6 \Rightarrow n = 83$ (pessoas)
 Faltam ser convocados $500 - 250 - 83 = 167$ funcionários.

35. a) $f(1) = -2 + 3 = 1$; $f(2) = -2 + 6 = 4$;
 $f(3) = -2 + 9 = 7, \dots$
 O conjunto imagem de f é $\{1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$.



36. $a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a_3 + a_4 = 80 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + r = 0 \\ 2a_1 + 5r = 80 \end{cases} \Rightarrow r = 20 \text{ e } a_1 = -10$

37. a) A sequência das medidas dos lados dos quadrados é (1, 3, 5, 7, ...).
 $a_{20} = a_1 + 19r \Rightarrow a_{20} = 1 + 19 \cdot 2 = 39$
 O perímetro de Q_{20} é $4 \cdot 39 \text{ cm} = 156 \text{ cm}$.

- b) $a_{31} = a_1 + 30r \Rightarrow a_{31} = 1 + 30 \cdot 2 = 61$
 A área de Q_{31} é $(61 \text{ cm})^2 = 3721 \text{ cm}^2$.
- c) $a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_{10} = 1 + 9 \cdot 2 = 19$
 A diagonal de Q_{10} é $19\sqrt{2} \text{ cm}$.

38. a) A sequência que representa, em metros, os pontos em que foram colocadas mesas de apoio é:
 (5 000, 5 800, 6 600, ..., 41 800(*))
 Observe que o termo geral dessa P.A. é $a_n = 5000 + (n-1) \cdot 800 \Rightarrow a_n = 800n + 4200$; fazendo $a_n = 42195$, obtemos:
 $42195 = 800n + 4200 \Rightarrow n = 47,49$.
 Assim, $a_{47} = 800 \cdot 47 + 4200 = 41800$, como mostra (*) e, desse modo, a sequência possui 47 termos.
- b) $42195 \text{ m} - 41800 \text{ m} = 395 \text{ m}$
- c) Fazendo $a_n = 30000$, obtemos:
 $30000 = 800n + 4200 \Rightarrow n = 32,25$
 $a_{32} = 800 \cdot 32 + 4200 = 29800$. Assim, no marco 29,8 km havia uma mesa de apoio (32ª). A 33ª mesa estava localizada no marco 30,6 km.
 Desse modo, o caminho mais curto era retornar à última mesa que ele havia passado.

39. a) $\begin{cases} a_1 = 1930 \\ r = 4 \\ a_n = 2014 \end{cases}$
 $2014 = 1930 + (n-1) \cdot 4$
 $84 = (n-1) \cdot 4$
 $n = 22$
 Como não houve Copa em 1942 e em 1946, concluímos que a Copa de 2014 foi a 20ª.
- b) $a_n = 2100 \Rightarrow 2100 = 1930 + (n-1) \cdot 4 \Rightarrow n \notin \mathbb{N}$; não haverá Copa em 2100.
 $a_n = 2150 \Rightarrow 2150 = 1930 + (n-1) \cdot 4 \Rightarrow n = 56$; haverá Copa em 2150.

40. $a_{15} = a_1 + 14r = -45 + 14 \cdot 4 = 11$

$$S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \frac{(-45 + 11) \cdot 15}{2} = -255$$

41. $a_{20} = a_1 + 19r = 0,15 + 19 \cdot 0,25 = 4,9$

$$S_{20} = \frac{(0,15 + 4,9) \cdot 20}{2} = 50,5$$

42. a) No plano alfa, o valor da 13ª prestação é:
 $a_{13} = a_1 + 12r = 35 + 12 \cdot 15 = 215$
 O desembolso total é:

$$\frac{(35 + 215) \cdot 13}{2} + 400 = 1625 + 400 = 2025$$

No plano beta, o desembolso total é:

$$15 \cdot 130 = 1950$$

O desembolso total é maior no plano alfa.

b) $x + 1625 = 1950 \Rightarrow x = 325$ (reais)

43. $a_3 = 1600$;
 $1600 = a_1 + 2 \cdot 400 \Rightarrow a_1 = 800$;
 $a_{12} = a_1 + 11r \Rightarrow a_{12} = 800 + 11 \cdot 400 \Rightarrow a_{12} = 5200$

$$S_{12} = \frac{(800 + 5200) \cdot 12}{2} = 36000 \text{ (DVDs)}$$

44. $a_1 = 48 - 5 = 43$
 $a_{10} = 48 - 50 = -2$

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(43 - 2) \cdot 10}{2} = 205$$

45. a) $a_1 = 240$
 $a_{12} = 240 + 11 \cdot 35 = 625$

$$S_{12} = \frac{(240 + 625) \cdot 12}{2} = 5190 > 5000$$

 Sim, a previsão do gerente estava correta.

b) ■ $a_{11} = a_{12} - 35 = 625 - 35 = 590$
 ■ $S_{11} = \frac{(a_1 + a_{11}) \cdot 11}{2} = \frac{(240 + 590) \cdot 10}{2} = 4565$
 ■ $a_5 = a_1 + 4r \Rightarrow a_5 = 240 + 4 \cdot 35 = 380$
 $45\% \text{ de } 380 = 0,45 \cdot 380 = 171$
 A quantidade vendida até o penúltimo mês é:
 $S_{11} - 380 + 171 = 4565 - 209 = 4356$
 Para atingir a meta, era necessário vender
 $5000 - 4356 = 644$ (colchões).

46. a) (1,00; 1,50; 2,00; ...)
 $a_{30} = 1 + 29 \cdot 0,5 = 15,50 \Rightarrow$

$$S_{30} = \frac{(1 + 15,50) \cdot 30}{2} = 247,50 \text{ (reais)}$$

 Observe que $\frac{247,50}{210} = 1,178 = 1 + 0,178$. Portanto,
 17,8% de aumento (aproximadamente 18%).

b) (1, 1 + r, 1 + 2r, ..., 1 + 29r)

$$\frac{(1 + 1 + 29r) \cdot 30}{2} = 210 \Rightarrow 2 + 29r = 14 \Rightarrow$$

 $\Rightarrow r \cong 0,413$
 Observe que:
 ■ Se $r = 0,41$, $a_{30} = 1 + 29 \cdot 0,41 = 12,89$ e

$$S_{30} = \frac{(1 + 12,89) \cdot 30}{2} = 208,35$$
, que é menor que
 R\$ 210,00.
 ■ Se $r = 0,42$, $a_{30} = 1 + 29 \cdot 0,42 = 13,18$ e

$$S_{30} = \frac{(1 + 13,18) \cdot 30}{2} = 212,70$$
.
 Logo, o aumento pedido é de R\$ 0,42.

$$47. \blacksquare S_{10} = 245 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 11}{2} = 245 \Rightarrow a_1 + a_{10} = 49 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2a_1 + 9r = 49$$

$$\blacksquare S_{20} = 245 + 745 = 990 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = 990 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + a_{20} = 99 \Rightarrow 2a_1 + 19r = 99$$

Do sistema acima vem $r = 5$ e $a_1 = 2$.

P.A.: (2, 7, 12, 17, ...)

$$48. a) \begin{cases} a_1 = 0,5 \\ a_n = 9,2 \\ r = 0,3 \end{cases} \\ 9,2 = 0,5 + (n-1) \cdot 0,3 \Rightarrow n = 30 \\ S_{30} = \frac{(0,5 + 9,2) \cdot 30}{2} = 145,5$$

$$b) \begin{cases} a_1 = 6,8 \\ a_n = -14 \\ r = -0,4 \end{cases} \\ -14 = 6,8 + (n-1) \cdot (-0,4) \\ 52 = n-1 \Rightarrow n = 53 \\ S_{53} = \frac{[6,8 + (-14) \cdot 53]}{2} \\ S_{53} = -190,8$$

$$49. a) n = 1 \Rightarrow S_1 = 18 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2 = 15$$

Logo, $a_1 = 15$.

$$b) n = 2 \Rightarrow S_2 = 18 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 = 24$$

Assim, $a_1 + a_2 = 24$; como $a_1 = 15$, temos:

$$15 + a_2 = 24 \Rightarrow a_2 = 9$$

P.A.: (15, 9, 3, ...); $r = -6$

$$c) a_{10} = 15 + 9 \cdot (-6) = -39$$

50. Sequência de figurinhas:

$$\begin{array}{ccc} (3, & 7, & 11, \dots, a_n) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1^\circ \text{ fileira} & 2^\circ \text{ fileira} & n\text{-ésima fileira} \end{array}$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 4 = -1 + 4n$$

$$\text{Como } S_n = 1378, \text{ temos: } \frac{[3 + (-1 + 4n)]n}{2} = 1378 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4n^2 + 2n = 2756 \Rightarrow 2n^2 + n - 1378 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{-1 \pm 105}{4} \xrightarrow{n > 0} n = 26 \text{ (fileiras)}$$

51. O perímetro do 7º quadrado é 68 cm; seu lado é

$$\ell_7 = \frac{68}{4} = 17 \text{ cm.}$$

Como $\ell_7 = \ell_1 + 6 \cdot 2$, vem:

$$17 = \ell_1 + 12 \Rightarrow \ell_1 = 5$$

$$\text{Daí: } \ell_{16} = \ell_1 + 15 \cdot 2 = 5 + 30 = 35$$

$$L = 4\ell_1 + 4\ell_2 + \dots + 4\ell_{16} = 4(\ell_1 + \dots + \ell_{16}) =$$

$$= 4 \cdot \left[\frac{(\ell_1 + \ell_{16}) \cdot 16}{2} \right] \Rightarrow L = 1280 \text{ cm} = 12,8 \text{ m}$$

52. a) $f(x) = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} x = 1, y = 3 \\ x = 3, y = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \cdot 1 + b = 3 \\ a \cdot 3 + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -2 \text{ e } b = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = -2x + 5$$

$$b) (3, 1, -1, -3, \dots); a_n = 3 + (n-1) \cdot (-2) \Rightarrow a_n = -2n + 5; \\ n \in \mathbb{N}^*$$

53. São P.G.: a, b, d e e .

$$54. a) q = 2$$

$$b) q = \frac{10^{42}}{10^{40}} = 10^2 = 100$$

$$c) q = -3$$

$$d) q = -1$$

$$e) q = \frac{1}{2}$$

$$f) q = \frac{10^{-2}}{10^{-1}} = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$55. a_8 = a_1 \cdot q^7 = -1 \cdot (-4)^7 = (-1) \cdot (-16384) = 16384$$

$$56. q = \frac{-120}{-240} = \frac{1}{2}$$

$$a_6 = a_1 \cdot q^5 = (-240) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{240}{32} = -\frac{15}{2}$$

$$57. a_4 = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow \frac{1}{250} = 4 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{1}{1000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \frac{1}{10}$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = 4 \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$$

$$58. a_7 = a_1 \cdot q^6 \\ a_3 = a_1 \cdot q^2 (\div)$$

$$\frac{a_7}{a_3} = q^4 \Rightarrow \frac{-5}{-80} = q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

(Se $q = -\frac{1}{2}$, a P.G. seria alternada.)

$$\text{Como } a_3 = -80, \text{ temos: } -80 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow a_1 = -320$$

$$59. a) a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}; n \in \mathbb{N}^*$$

$$b) a_n = 3^{27} \cdot (3^{-3})^{n-1} = 3^{27} \cdot 3^{-3n+3} \Rightarrow a_n = 3^{-3n+30}; n \in \mathbb{N}^*$$

$$c) a_n = (-2) \cdot (-4)^{n-1} = -2 \cdot (-4)^{n-1}; n \in \mathbb{N}^*$$

$$60. 2^\circ \text{ dia: } 20 \text{ m} + 10 \text{ m} = 30 \text{ m}$$

$$3^\circ \text{ dia: } 30 \text{ m} + 15 \text{ m} = 45 \text{ m, ...}$$

A P.G. é (20, 30, 45, ...); $q = \frac{3}{2}$

$$a_6 = a_1 \cdot q_5 = 20 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 20 \cdot \frac{243}{32} = 151,875$$

Portanto, o inteiro mais próximo é 152.

$$61. \begin{cases} q = 3 & a_6 = a_1 \cdot q^5 & a_3 = a_1 \cdot q^2 \\ a_6 = 1458 & 1458 = a_1 \cdot 3^5 & a_3 = 6 \cdot 3^2 = 54 \\ a_3 = ? & a_1 = 6 \end{cases}$$

Observação: Podemos fazer, diretamente:

$$a_6 = a_3 \cdot q^3 \Rightarrow 1458 = a_3 \cdot 3^3 \Rightarrow a_3 = 54$$

$$62. a) x^2 = 4 \cdot 9 \Rightarrow x = \pm 6$$

$$b) (2x + 4)^2 = (x^2 - 4) \cdot 6 \Rightarrow 4x^2 + 16x + 16 = 6x^2 - 24 \Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm 12}{2} \begin{cases} x = 10 \\ x = -2 \end{cases}$$

Para $x = 10$, temos: (96, 24, 6); P.G. de razão $\frac{1}{4}$.

Para $x = -2$, temos: (0, 0, 6); não é P.G.

Assim, $x = 10$

$$c) (x + 1)^2 = -2 \cdot (-4x + 2)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 8x - 4$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 5$$

■ Se $x = 1$, temos: (-2, 2, -2); é P.G. com $q = -1$.

■ Se $x = 5$, temos: (-2, 6, -18); é P.G. com $q = -3$.

$$d) \left(\log_{\frac{1}{4}} x\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \Rightarrow \left(\log_{\frac{1}{4}} x\right)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{4}} x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{16} \\ \text{ou} \\ \log_{\frac{1}{4}} x = -2 \Rightarrow x = 16 \end{cases}$$

63. Seja b a idade da Sra. Beatriz, temos:

$$\left(b, \frac{2}{3}b, \left(\frac{2}{3}\right)^2 b\right) \text{ é P.G.}$$

$$b - \left(\frac{2}{3}\right)^2 b = 50 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{4}\right)b = 50 \Rightarrow b = 90$$

avó: 90; filha: 60 e neta: 40.

64. a) ■ hoje: R\$ 1 200,00

$$\text{■ daqui a 1 mês: } 1200 - 0,1 \cdot 1200 = 0,9 \cdot 1200 = 1080$$

$$\text{■ daqui a 2 meses: } 0,9 \cdot 1200 - 0,1 \cdot 0,9 \cdot 1200 = 0,9^2 \cdot 1200 = 972$$

⋮ ⋮ ⋮

$$\text{■ daqui a } n \text{ meses: } 0,9^n \cdot 1200$$

A sequência pedida é (1 200, 1 080, 972, ...); é P.G. com $q = 0,9$.

$$b) a_6 = a_1 \cdot q^5 = 1200 \cdot 0,9^5 = 1200 \cdot 0,59 = 708 \text{ reais}$$

$$a_{11} = a_1 \cdot q^{10} = 1200 \cdot 0,9^{10} = 1200 \cdot [(0,9)^5]^2 = 1200 \cdot 0,59^2 = 417,72 \text{ reais}$$

$$65. a) (2 - n, 5 - n, 6 - n) \text{ é P.G.} \Rightarrow (5 - n)^2 = (2 - n) \cdot (6 - n) \Rightarrow \\ \Rightarrow 25 - 10n + n^2 = 12 - 8n + n^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 13 = 2n \Rightarrow n = 6,5$$

Observe que a P.G. é (-4,5; -1,5; -0,5).

$$b) q = \frac{-1,5}{-4,5} = \frac{1}{3}$$

$$66. a) a_3 = a_1 \cdot q^2 = 144 \quad \textcircled{1}$$

$$a_6 = a_1 \cdot q^5 = 486 \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \Rightarrow \frac{1}{q^3} = \frac{8}{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \frac{3}{2} \text{ e, em } \textcircled{1}: \\ a_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 144 \Rightarrow a_1 = 64 \text{ reais}$$

$$b) a_7 = a_1 \cdot q^6 = 64 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6 = 729 \text{ reais}$$

$$67. -4, _, _, _, _, 972$$

↓
 a_1

↓
 a_6

$$a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow 972 = (-4) \cdot q^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^5 = -243 \Rightarrow q = -3$$

A P.G. obtida é: (-4, 12, -36, 108, -324, 972).

$$68. \left(20000, _, _, _, _, _, _, \frac{1}{500}\right)$$

↓
 a_1

↓
 a_8

$$a_8 = a_1 \cdot q^7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{500} = 20000 \cdot q^7 \Rightarrow \frac{1}{5 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^4} = q^7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10^7} = q^7 \Rightarrow q = \frac{1}{10}$$

A P.G. obtida é: $\left(20000, 2000, 200, 20, 2, \frac{1}{5}, \frac{1}{50}, \frac{1}{500}\right)$.

$$a) q = \frac{1}{10}$$

$$b) 20$$

$$69. a) a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$2^{111} = 2^{31} \cdot (2^4)^{n-1} \Rightarrow 2^{111} = 2^{27+4n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 111 = 27 + 4n \Rightarrow n = 21$$

$$b) q = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{\sqrt{3}}{27}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{729} = \frac{\sqrt{3}}{27} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{27\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow 3^{-\frac{7}{2}} = \left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{7}{2} = -\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow n = 8$$

$$c) \frac{64}{15} = -\frac{1}{120} \cdot (-2)^{n-1} \Rightarrow -512 = (-2)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2)^9 = (-2)^{n-1} \Rightarrow n = 10$$

70. $(\ell, 4\ell, \ell^2)$ é P.G. $\Rightarrow (4\ell)^2 = \ell \cdot \ell^2 \Rightarrow 16\ell^2 = \ell^3 \xRightarrow{\ell \neq 0} \ell = 16$

71. a) Temos a seguinte P.G. de 5 elementos:

$$\left(\underbrace{300}_{\text{há dois anos}}, \underbrace{?}_{\text{há um ano}}, \underbrace{?}_{\text{hoje}}, \underbrace{?}_{\text{daqui a um ano}}, \underbrace{?}_{\text{daqui a dois anos}} \right).$$

$$a_5 = a_1 \cdot q_4 = 300 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^4 = 300 \cdot \frac{194481}{160000} = 364,65$$

b) $a_5 = 300 \cdot (1,2)^4 = 622,08$

72. Seja a P.G. $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$.

$$\frac{x}{q} \cdot x \cdot q = 625 \Rightarrow x^2 = 625 \xRightarrow{x > 0} x = 25$$

$$25 + 25q = 30 \Rightarrow q = \frac{1}{5} \text{ e } a_1 = \frac{x}{q} = \frac{25}{\frac{1}{5}} = 125$$

73. P.G.: $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$

$$\frac{x}{q} \cdot x \cdot x \cdot q = 216 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = 6$$

$$\frac{6}{q} + 6 = 9 \Rightarrow \frac{6}{q} = 3 \Rightarrow q = 2$$

$$\text{P.G.:} \left(\frac{6}{2}, 6, 6 \cdot 2\right) = (3, 6, 12)$$

74. a) Área $C_{10} = 2^{26}\pi = \pi r_{10}^2 = r_{10} = \sqrt{2^{26}} = 2^{13} \text{ cm}$

$$\text{Daí: } r_{10} = r_1 \cdot q^9 \Rightarrow r_{10} = r_1 \cdot 2^9 \Rightarrow 2^{13} = r_1 \cdot 2^9 \Rightarrow r_1 = 2^4 = 16 \text{ cm}$$

b) $r_4 = r_1 \cdot q^3 = 16 \cdot 2^3 = 128 \text{ cm}$

$$\text{Área } C_4 = \pi \cdot 128^2 = \pi \cdot (2^7)^2 = 2^{14} \pi \text{ cm}^2$$

75. $(x, 3, 7)$ é P.A. $\Rightarrow x = -1$

$$(-2, 6, y) \text{ é P.G. } \Rightarrow y = 6 \cdot (-3) = -18$$

76. P.G.: $(8, 2, a, b, \dots)$

$$\left\{ q = \frac{1}{4}; a = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}; b = a \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \right.$$

a) P.A. $\left(\frac{1}{8}, \frac{3}{16}, c, \dots\right)$

$$r = \frac{3}{16} - \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$$

$$c = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

b) O termo geral da P.A. é:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow a_n = \frac{1}{8} + (n-1) \cdot \frac{1}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{8} + \frac{n}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16} + \frac{n}{16}$$

$$\text{Se } a_n = \frac{1}{2}, \text{ temos: } \frac{1}{2} = \frac{1}{16} + \frac{n}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n}{16} = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{n}{16} = \frac{7}{16} \Rightarrow n = 7;$$

logo, $\frac{1}{2}$ é o sétimo termo da sequência.

77. ■ Se $(5, y, x)$ é P.A., então $y = \frac{x+5}{2}$ ①

■ Se $(x+1, y-2, 4)$ é P.G., então $(y-2)^2 = 4(x+1)$. ②

■ Substituindo ① em ②, encontramos:

$$\left(\frac{x+5}{2} - 2\right)^2 = 4(x+1) \Rightarrow x^2 - 14x - 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ \text{ou} \\ x = -1 \end{cases}$$

■ Se $x = 15$, em ①, encontramos $y = 10$. Assim, a P.A. é $(5, 10, 15)$ e a P.G. é $(16, 8, 4)$.

■ Se $x = -1$, em ①, encontramos $y = 2$. Assim, a P.A. é $(5, 2, -1)$, que não possui todos os termos positivos e deve ser descartada.

78. $a_n = 3n + 4$

$$a_1 = 3 \cdot 1 + 4 = 7$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 + 4 = 10$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 + 4 = 13$$

$$a_4 = 3 \cdot 4 + 4 = 16$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

f: $(7, 10, 13, 16, \dots)$ é P.A. de razão 3.

$$b_n = 2^{a_n}$$

$$b_1 = 2^{a_1} = 2^7$$

$$b_2 = 2^{a_2} = 2^{10}$$

$$b_3 = 2^{a_3} = 2^{13}$$

$$b_4 = 2^{a_4} = 2^{16}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

g: $(2^7, 2^{10}, 2^{13}, 2^{16}, \dots)$ é P.G. de razão $2^3 = 8$.

79. P.A. $(30-r, 30, 30+r, 30+2r)$

P.G. $(x, 30, y, z)$

■ Soma $= 90 \Rightarrow 120 + 2r = 90 \Rightarrow r = -15$; a P.A. é $(45, 30, 15, 0)$.

■ P.G.: $y = 45$; $q = \frac{45}{30} = 1,5 \Rightarrow x \cdot 1,5 = 30 \Rightarrow x = 20$;

$$z = y \cdot 1,5 = 45 \cdot 1,5 = 67,5 \text{ é o } 4^\circ \text{ termo da P.G.}$$

80. ■ P.A.: $a_2 = 2 + r$; $a_5 = 2 + 4r$ e $a_{14} = 2 + 13r$

■ P.G.: $(2+r, 2+4r, 2+13r) \Rightarrow (2+4r)^2 = (2+r) \cdot (2+13r)$

$$\cancel{4} + 16r + 16r^2 = 13r^2 + 28r + \cancel{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3r^2 - 12r = 0 \xRightarrow{r \neq 0} r = 4$$

■ A P.G. obtida é $(6, 18, 54)$, cuja razão é $q = 3$.

81. (a, b, c) é P.A. $\Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$ ①

(a, b, c) é P.G. $\Rightarrow b^2 = a \cdot c$ ②

$$\text{① em ②} \Rightarrow \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = ac \Rightarrow a^2 + 2ac + c^2 = 4ac \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 2ac + c^2 = 0 \Rightarrow (a-c)^2 = 0 \Rightarrow a = c; \text{ em ① vem } b = a = c.$$

$$82. (3, m, n) \text{ é P.A. } \Rightarrow m = \frac{n+3}{2} \Rightarrow n = 2m-3 \quad \textcircled{1}$$

$$(3, m+1, n+5) \text{ é P.G. } \Rightarrow (m+1)^2 = 3 \cdot (n+5) \quad \textcircled{2}$$

Fazendo $\textcircled{1}$ em $\textcircled{2}$:

$$(m+1)^2 = 3 \cdot (2m-3+5) \Rightarrow m^2 + 2m + 1 = 6m + 6 \Rightarrow m^2 - 4m - 5 = 0 \Rightarrow (m = -1 \text{ e } n = -5) \text{ ou } (m = 5 \text{ e } n = 7)$$

$$83. q = -2; S_6 = \frac{a_1 \cdot (q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{(-2) \cdot [(-2)^6 - 1]}{-2 - 1} = \frac{(-2) \cdot 63}{-3} = 42$$

$$84. q = \frac{1}{2}; S_8 = \frac{a_1 \cdot (q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{320 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{320 \cdot \left(-\frac{1}{256}\right)}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_8 = \frac{320 \cdot \left(-\frac{255}{256}\right)}{-\frac{1}{2}} = 320 \cdot \frac{255}{128} \cdot 2 = 637,5$$

$$85. a) m = 1: \text{P.G. é } (1, 1, 1, \dots); S_{10} = 10 \cdot 1 = 10$$

$$b) m = 2: \text{P.G. é } (2, 2^2, 2^3, \dots); S_{10} = \frac{2 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2046$$

$$c) m = \frac{1}{3}: \text{P.G. é } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots\right);$$

$$S_{10} = 1 \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{59049} - 1\right)}{-\frac{2}{3}} \Rightarrow S_{10} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-59048}{59049}\right) = \frac{29524}{59049}$$

$$d) m = 0: \text{P.G. é } (0, 0, 0, \dots); S_{10} = 0$$

$$86. \text{Gastos por semana: } (80; 84; 88,20; \dots)$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ \\ \frac{84}{80} = 1,05; & \frac{88,20}{84} = 1,05; & \dots \end{array}$$

P.G.: $q = 1,05$

$$S_{14} = \frac{80 \cdot (1,05^{14} - 1)}{1,05 - 1}; 1,05^{14} = (1,05^7)^2 = 1,4^2 = 1,96$$

Daí:

$$S_{14} = \frac{80 \cdot (1,96 - 1)}{0,05} = \frac{76,8}{0,05} = 1536 \text{ (reais)}$$

$$87. (100; 110; 121, \dots) \text{ é P.G., pois } \frac{110}{100} = 1,1; \frac{121}{110} = 1,1 \text{ etc.}$$

a) O valor da prestação no 6º ano será:

$$a_6 = a_1 \cdot q^5 = 100 \cdot 1,1^5 = 161,05$$

O desembolso total no 6º ano será:

$$12 \cdot 161,05 = 1932,61 \text{ reais}$$

b) Vamos analisar a sequência de desembolsos anuais:

$$\underbrace{(1200; 1320; 1452; \dots; 1932,61)}_{100 \cdot 12} \quad \underbrace{\quad}_{110 \cdot 12} \quad \underbrace{\quad}_{121 \cdot 12} \quad \underbrace{\quad}_{161,05 \cdot 12}$$

Temos uma P.G. de razão $q = 1,1$.

$$S_6 = \frac{1200 \cdot (1,1^6 - 1)}{1,1 - 1} = \frac{1200 \cdot 0,771561}{0,1} \cong 9258,73 \text{ (reais)}$$

$$88. a_1 = \frac{3^1}{6} = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{3^2}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2};$$

$$a_3 = \frac{3^3}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \dots\right)$ é uma P.G. com $q = 3$.

$$a) \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$$

b) Devemos determinar n tal que $S_n = 14762$:

$$14762 = \frac{\frac{1}{2} \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} \Rightarrow$$

$$59048 = 3^n - 1 \Rightarrow 3^n = 59049 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^n = 3^{10} \Rightarrow n = 10 \text{ termos}$$

$$89. q = 2; S_n = 12285; n = ?$$

$$12285 = \frac{3 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} \Rightarrow 4095 = 2^n - 1 \Rightarrow 2^n = 4096 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^n = 2^{12} \Rightarrow n = 12 \text{ termos}$$

$$90. a) \ell_2 = 1 \Rightarrow p \text{ (perímetro) de } T_2 \text{ é } 3;$$

$$\frac{5}{4} \cdot p(T_1) = p(T_2) \Rightarrow p(T_1) = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ m}$$

(note que o lado ℓ_1 mede 0,8 m)

A sequência que representa as medidas dos lados dos triângulos é $(0,8; 1; 1,25; \dots)$; P.G. com $q = \frac{5}{4} = 1,25$.

$$b) \ell_4 = \ell_1 \cdot q^3 = 0,8 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3 = 1,5625 \text{ (m)}$$

$$c) S_7 = \frac{a_1 \cdot (q^7 - 1)}{q - 1}, \text{ sendo } a_1 \text{ o perímetro do } 1^\circ \text{ triângulo.}$$

$$S_7 = \frac{2,4 \cdot (1,25^7 - 1)}{1,25 - 1} = \frac{2,4 \cdot (4,8 - 1)}{0,25} = 36,48 \text{ (m);}$$

o número inteiro mínimo pedido é 37 m.

$$91. 1^\circ \text{ dia} \rightarrow 5$$

$$2^\circ \text{ dia} \rightarrow 10 \text{ novas pessoas}$$

$$3^\circ \text{ dia} \rightarrow 20 \text{ novas pessoas}$$

:

$$S_8 = \frac{a_1 \cdot (q^8 - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{5 \cdot (2^8 - 1)}{2 - 1} = 1275$$

$$92. a) \frac{a_1}{1 - q} = \frac{20}{1 - 0,5} = 40$$

$$b) \frac{90}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{90}{\frac{9}{10}} = 100$$

$$c) \frac{0,001}{1-0,1} = \frac{0,001}{0,9} = \frac{1}{900}$$

$$d) \frac{2\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$$

93. a) $\left(-25, -5, -1, \frac{1}{5}, \dots\right)$ é uma P.G. com $q = \frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} & (-25) + (-5) + (-1) + \left(-\frac{1}{5}\right) + \dots = \\ & = -25 - 5 - 1 - \frac{1}{5} - \dots = \frac{-25}{1 - \frac{1}{5}} = \\ & = \frac{-25}{\frac{4}{5}} = -\frac{125}{4} \end{aligned}$$

b) $\left(9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots\right)$ é uma P.G. alternada com

$$\begin{aligned} q &= -\frac{1}{3} \left(-1 < -\frac{1}{3} < 1\right). \\ 9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots &= \frac{9}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \\ &= \frac{9}{\frac{4}{3}} = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

c) $\left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots\right)$ é uma P.G. alternada com

$$\begin{aligned} q &= -\frac{1}{2} \\ \left(-1 < -\frac{1}{2} < 1\right). \\ \text{Daí: } -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots &= \frac{-1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$94. a) 0,444\dots = 0,4 + 0,04 + 0,004 + \dots = \frac{0,4}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{(0,4; 0,04; 0,004; \dots)}{\text{P.G. com } q = \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{0,4}{\frac{9}{10}} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{4}{9}$$

b) $1,777\dots = 1 + 0,7 + 0,07 + 0,007 + \dots =$

$$\begin{aligned} & \frac{(0,7; 0,07; 0,007; \dots)}{\text{P.G. com } q = \frac{1}{10}} \\ &= 1 + \frac{a_1}{1-q} = 1 + \frac{0,7}{1-0,1} = 1 + \frac{0,7}{0,9} = \\ &= 1 + \frac{7}{9} = \frac{16}{9} \end{aligned}$$

c) $0,2\overline{7} = 0,27 + 0,0027 + 0,000027 + \dots =$

$$= \frac{0,27}{1-0,01} = \frac{0,27}{0,99} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

$$d) 2,3\overline{6} = 2,3 + \underbrace{0,06 + 0,006 + 0,0006 + \dots}_{\text{P.G. com } q = \frac{1}{10}} =$$

$$= 2,3 + \frac{0,06}{1-0,1} = \frac{23}{10} + \frac{\frac{6}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{23}{10} + \frac{2}{30} = \frac{71}{30}$$

95. Sejam ℓ_i , p_i , A_i as medidas dos lados, do perímetro e da área, respectivamente, do quadrado Q_i ($i = 1, 2, \dots$).

$$\begin{cases} Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ \ell_1 = 10 & \ell_2 = 1 & \ell_3 = \frac{1}{10} \\ p_1 = 40 & \Rightarrow p_2 = 4 & \Rightarrow p_3 = \frac{4}{10} \Rightarrow \dots \\ A_1 = 100 & A_2 = 1 & A_3 = \frac{1}{100} \end{cases}$$

a) A sequência de perímetros é:

$$\left(40, 4, \frac{4}{10}, \dots\right), \text{ que é P.G. de razão } \frac{1}{10}.$$

A soma infinita converge para:

$$\frac{40}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{400}{9} = 44,4\overline{4} \text{ (cm)}$$

b) A sequência de áreas é:

$$\left(100, 1, \frac{1}{100}, \dots\right), \text{ que é P.G. de razão } \frac{1}{100}.$$

A soma infinita é igual a:

$$\frac{100}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{10000}{99} = 101,01\overline{01} \text{ (cm}^2\text{)}$$

96. a) $\left(x^2, \frac{x^3}{2}, \frac{x^4}{4}, \dots\right)$ é uma P.G. com $q = \frac{x}{2}$; $-1 < q < 1$.

$$\frac{x^2}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 1 - \frac{x}{2} \Rightarrow 6x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= \frac{-1 \pm 7}{12} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(\text{convém, pois } q = \frac{1}{4}\right) \\ x = -\frac{2}{3} \left(\text{convém, pois } q = -\frac{1}{3}\right) \end{cases} \\ S &= \left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\} \end{aligned}$$

b) $(1+x, (1+x)^2, (1+x)^3, \dots)$ é uma P.G. com $q = 1+x$; $-1 < q < 1$.

$$\frac{1+x}{1-(1+x)} = 3 \Rightarrow \frac{1+x}{-x} = 3 \Rightarrow 1+x = -3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{4}; S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$$

Nesse caso, a razão da P.G. é $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

b) A p.g. é $[f(1), f(2), f(3), f(4), \dots]$, isto é:

$$104. a) x = 3, y = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{1} \Leftrightarrow 3_{3+k} = 9 \Leftrightarrow 3_{3+k}$$



O conjunto imagem de f é $\left\{2, 1, \frac{2}{1}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$.

$$\dots \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2} \right) \cdot 4 = f(4)$$

$$f(3) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{1}$$

$$f(2) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$103. a) f(1) = 4 \cdot 0,5 = 2;$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } P^u &= 3_{10} \cdot (-1)_2 = 3_{10} \cdot (-1)^{45} = -59049 \\ &= (-1) \cdot 3_{10} = -59049 \end{aligned}$$

102. a) $P_n = 3_5 \cdot (-1)^{\frac{5 \cdot 4}{2}} = 3_5 \cdot (-1)^{10} = 3_5 = 243$

$$\Rightarrow n_2 + n - 156 = 0 \stackrel{n \geq 0}{\Longleftarrow} n = 12$$

$$\Leftrightarrow 651 = n - n^2 + 2n \Leftrightarrow$$

$$\Leftarrow 39 = \frac{4}{n(n-1)} + \frac{2}{n} \Leftarrow$$

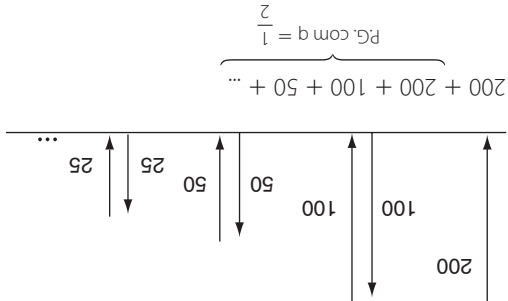
$$\Leftrightarrow 2^{\frac{2}{n}} \cdot 2^{\frac{4}{n(n-1)}} = 2^{\frac{2}{n}} \Leftrightarrow 2^{\frac{4}{n(n-1)}} = 2^{\frac{4}{n(n-1)}} + \frac{4}{n(n-1)} = 2^{\frac{4}{n(n-1)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftarrow \frac{z}{(1-u)u} \left(\frac{z}{1} z \right) \cdot_u \left(\frac{z}{1} z \right) = {}_{63}z \Leftarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{n(n-1)} \binom{n}{z} \cdot \binom{n}{n-z} = z^{\frac{n}{2}} = 101. \text{ p. } 101$$

$$= \frac{z}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{01}{1} \right) \cdot {}^8_8 001 = {}^8_8 p \Leftarrow \frac{z}{(-1)^u} b \cdot {}^1_u a = {}^u_p d \cdot 100.$$

$$99. p^n \cdot a_n^1 \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} \Leftrightarrow p^6 = 36 \cdot 2^{\frac{6 \cdot 5}{2}} = 36 \cdot 2^{15}$$



86.

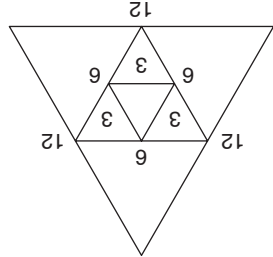
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{144}{1 - \frac{4}{1}} \right) = 48\sqrt{3} \text{ (cm}_2\text{)}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{3}}{4}(144 + 36 + 9 + \dots) =$$

$$= \dots + \frac{1}{3^2 \sqrt{3}} + \frac{1}{6^2 \sqrt{3}} + \frac{1}{12^2 \sqrt{3}} \quad (b)$$

$$\text{a) } 36 + 18 + 9 + \dots = \frac{36}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}} = 72 \text{ (cm)}$$

Pelo teorema da base média do triângulo, vem:



97.

$$\{2\} = S$$

que, nesse caso, a razão da P.G. é $q = -\frac{4}{2} = -\frac{1}{2}$.

$$\frac{x}{1 + \frac{4}{x}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4 + x = 3x \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2; \text{note}$$

Date:

$$\frac{\frac{b}{x} + 1}{x} = \frac{\left(\frac{b}{x}\right) - 1}{x} = \frac{b - 1}{x^2} = \dots + \frac{b^4}{x^4} - \frac{b^3}{x^3} + \frac{b^2}{x^2} - x$$

$$l > b > l_-$$

$$(c) \left(x_1, -\frac{4}{x_2}, \frac{16}{x_3}, -\frac{64}{x_4}, \dots \right) \text{ é uma P.G. com } q = -\frac{4}{x_1}.$$

Desafio

Seja $N = abcd$ o número de 4 algarismos pensados:

$$N = 1000a + 100b + 10c + d$$

A soma dos algarismos de N é: $a + b + c + d$.

A diferença entre N e a soma de seus algarismos é:

$$(1000a + 100b + 10c + d) - (a + b + c + d) = \\ = \underbrace{999a + 99b + 9c}_{\text{múltiplo de 9}} = 9 \cdot (111a + 11b + c)$$

Maria sabe, então, que o resultado obtido é um múltiplo de 9. Sabe também que um número é múltiplo de 9 quando a soma de seus algarismos resulta em um múltiplo de 9.

Assim, no momento em que João disse o resultado, Maria calculará rapidamente a soma dos algarismos e verá qual é o múltiplo de 9 mais próximo dessa soma.

Exemplo:

- número pensado por João: 5 376
- soma dos algarismos: 21
- a diferença é: 5 355
- João oculta o 3: $5 \square 55$
- Maria soma: $5 + 5 + 5 = 15$
- o próximo múltiplo de 9 é o 18; de 15 para 18 faltam 3 unidades.

Logo, o algarismo oculto é o 3.

Exercícios complementares

1. Agrupando de dois em dois, podemos escrever:

$$S = (200^2 - 199^2) + (198^2 - 197^2) + (196^2 - 195^2) + \dots + (2^2 - 1^2)$$

Usando a fatoração sugerida, vem:

$$S = (200 + 199) \cdot \underbrace{(200 - 199)}_1 + (198 - 197) \cdot \underbrace{(198 + 197)}_1 + \dots + (2 + 1) \cdot \underbrace{(2 - 1)}_1$$

$$S = (200 + 199) + (198 + 197) + \dots + (2 + 1)$$

Observe que S representa a soma dos 200 primeiros naturais não nulos, a saber:

$$S = \frac{(200 + 1) \cdot 200}{2} = 201 \cdot 100 = 20100$$

2. a) $a_n = 3 \cdot 2^n$

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 3 \cdot 2^1 = 6$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3 \cdot 2^3 = 24$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 3 \cdot 2^4 = 48$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

Temos a P.G. (6, 12, 24, 48, ...); $q = 2$

$$b_n = \log_2(a_n)$$

$$b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 6$$

$$b_2 = \log_2 a_2 = \log_2 12 = \log_2 (2 \cdot 6) = 1 + \log_2 6$$

$$b_3 = \log_2 a_3 = \log_2 24 = \log_2 (2^2 \cdot 6) = 2 \cdot \log_2 2 + \log_2 6 = 2 + \log_2 6$$

$$b_4 = \log_2 a_4 = \log_2 48 = \log_2 (2^3 \cdot 6) = 3 \cdot \log_2 2 + \log_2 6 = 3 + \log_2 6$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

Temos a P.A.:

$$(\log_2 6, 1 + \log_2 6, 2 + \log_2 6, 3 + \log_2 6, \dots); r = 1$$

$$b) S_{10} = \frac{a_1 \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{6 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} =$$

$$= 6 \cdot (2^{10} - 1) = 6138$$

$$c) \log_2 6 + (1 + \log_2 6) + (2 + \log_2 6) + (3 + \log_2 6) + (4 + \log_2 6) = 10 + 5 \cdot \log_2 6 = 10 + 5 \cdot 2,6 = 23$$

3. Sequência dos raios dos círculos: $\left(r, \frac{3r}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2 r, \left(\frac{3}{4}\right)^3 r, \dots\right)$
ou $\left(r, \frac{3r}{4}, \frac{9r}{16}, \frac{27r}{64}, \dots\right)$.

- a) A sequência dos perímetros é:

$$\left(2\pi r, 2\pi \cdot \frac{3r}{4}, 2\pi \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 r, \dots\right)$$

A soma dos infinitos termos dessa sequência é:

$$\frac{a_1}{1 - q} = \frac{2\pi r}{1 - \frac{3}{4}} = 8\pi r$$

- b) A sequência das áreas é: $\left(\pi r^2, \pi \cdot \frac{9r^2}{16}, \pi \cdot \frac{81r^2}{256}, \dots\right)$.

$$\text{A soma infinita vale: } \frac{\pi r^2}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{16\pi r^2}{7}$$

4. a) passo 1: $\frac{1}{2}$ do quadrado preenchido;

$$\text{passo 2: } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \text{ do quadrado preenchido;}$$

$$\text{passo 3: } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \text{ do quadrado preenchido;}$$

$$\text{passo 4: } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{8 + 4 + 2 + 1}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375$$

93,75% do quadrado preenchido.

- b) Em geral, no passo n , temos:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ do quadrado preenchido.}$$

Devemos determinar o menor valor de n para o qual:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{99,9}{100}$$

O primeiro membro representa a soma dos n primeiros termos da P.G. $\left(\frac{1}{2}; \left(\frac{1}{2}\right)^2; \left(\frac{1}{2}\right)^3; \dots\right)$, a saber:

$$\left(\frac{1}{2}; \left(\frac{1}{2}\right)^2; \left(\frac{1}{2}\right)^3; \dots\right), \text{ a saber:}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} \geq \frac{99,9}{100} \Rightarrow (-1) \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right] \geq 0,999$$

$$\Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0,999 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,001 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,001$$

- Se $n = 9$, temos: $\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512} > \frac{1}{1000}$

- Se $n = 10$, temos: $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000}$
Logo, $n = 10$, isto é, 10 passos no mínimo.

5. a) $\log x + 2 \log x + 3 \log x + \dots + 500 \cdot \log x = 5,01 \cdot 10^5$
 $(1 + 2 + \dots + 500) \cdot \log x = 5,01 \cdot 10^5$

$$\frac{(1 + 500) \cdot 500}{2} \cdot \log x = 5,01 \cdot 10^5$$

$$\left(\frac{5,01 \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot 10^2}{2}\right) \cdot \log x = 5,01 \cdot 10^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2,5 \cdot 10^4 \cdot \log x = 10^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log x = \frac{10^5}{2,5 \cdot 10^4} = \frac{10}{2,5} = 4 \Rightarrow \log x = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 10^4$$

$$S = \{10^4\}$$

b) $3^x + \frac{3^x}{3^1} + \frac{3^x}{3^2} + \dots = 40,5$

$$3^x \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) = 40,5 \Rightarrow 3^x \cdot \frac{3}{2} = 40,5 \Rightarrow$$

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow x = 3; S = \{3\}$$

c) $\log_5 x^{\frac{1}{2}} - \log_5 x^{\frac{1}{4}} + \log_5 x^{\frac{1}{8}} - \log_5 x^{\frac{1}{16}} + \dots = -\frac{2}{3}$

$$\frac{1}{2} \cdot \log_5 x - \frac{1}{4} \cdot \log_5 x + \frac{1}{8} \cdot \log_5 x - \frac{1}{16} \cdot \log_5 x + \dots =$$

$$= -\frac{2}{3}$$

$$\log_5 x \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots\right) = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\log_5 x \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \log_5 x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{25}$$

$$S = \left\{\frac{1}{25}\right\}$$

6. a) A sequência de novos internautas é (100, 200, 400, ...). Trata-se de uma P.G. em que $a_1 = 100$ e $q = 2$. É necessário determinar $a_6 = a_1 \cdot q^5 = 100 \cdot 2^5 = 3200$. Devemos obter o valor de:

$$150 + (100 + 200 + 400 + 800 + 1600 + 3200) =$$

$$= 150 + \frac{100 \cdot (2^6 - 1)}{2 - 1} = 150 + \frac{100 \cdot 63}{1} = 6450$$

- b) O número de membros do site B é dado por:

$$2200 + (100 + 200 + 300 + \dots)$$

Para chegar aos 10 000 membros, a soma dos n primeiros termos da P.A. (100, 200, 300, ...) deve ser $10\,000 - 2200 = 7800$:

$$\frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = 7800$$

$$a_n = 100 + (n - 1) \cdot 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = 100 + 100n - 100 = 100n$$

$$\frac{(100 + 100n) \cdot n}{2} = 7800 \Rightarrow \frac{100 \cdot (1 + n) \cdot n}{2} =$$

$$= 7800 \Rightarrow \frac{n(n + 1)}{2} = 78 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 156 = 0 \Rightarrow n = 12; 12 \text{ semanas.}$$

7. Observe os elementos de A:

$$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{8}{7}, \dots, \frac{13}{7}, \frac{15}{7}, \dots, \frac{20}{7}, \frac{22}{7}, \dots$$

$$\dots, \frac{34}{7}, \frac{36}{7}, \frac{37}{7}, \frac{38}{7}, \frac{39}{7}, \frac{40}{7}, \frac{41}{7}$$

Devemos calcular:

$$S = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \dots + \frac{6}{7} + \frac{8}{7} + \dots + \frac{41}{7} (*)$$

Calculemos a soma dos 41 primeiros naturais não nulos, a saber:

$$S_{41} = \frac{(a_1 + a_{41}) \cdot 41}{2} = \frac{(1 + 41) \cdot 41}{2} = 861$$

Devemos, desse valor, descontar os múltiplos de 7, de 7 a 35, a saber: $7 + 14 + 21 + 28 + 35 = 105$.

Em (*), temos:

$$S = \frac{861 - 105}{7} = \frac{756}{7} = 108$$

8. As quantias distribuídas são $(x - 3y, x - y, x + y, x + 3y)$; a razão da P.A. é $2y$.

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{ao filho} & \text{ao filho} & \text{ao filho} & \text{ao filho} \\ \text{de} & \text{de} & \text{de} & \text{de} \\ 6 \text{ anos} & a \text{ anos} & b \text{ anos} & 66 \text{ anos} \end{array}$$

Como o valor da herança é 1800 U.M., temos:

$$x - 3y + x - y + x + y + x + 3y = 1800$$

$$4x = 1800 \Rightarrow x = 450$$

Usando a proporcionalidade, escrevemos:

$$\frac{450 - 3y}{6} = \frac{450 - y}{a} = \frac{450 + y}{b} = \frac{450 + 3y}{66} (*)$$

Comparando a 1ª e a 4ª razões, vem $y = 125$ e, substituindo tal valor em (*), encontramos $a = 26$ e $b = 46$.

Assim, as idades são 6, 26, 46 e 66; as quantias são 75, 325, 575 e 825 U.M.

9. Vamos dispor as parcelas dessa soma infinita da seguinte maneira:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \dots \\ \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \dots \\ \frac{3}{2^3} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} \dots \\ \frac{4}{2^4} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} \dots \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \vdots \end{array} + \begin{array}{c} \frac{1}{2^2} \\ \frac{1}{2^2} \\ \frac{1}{2^3} \\ \vdots \end{array} + \begin{array}{c} \frac{1}{2^3} \\ \frac{1}{2^4} \\ \frac{1}{2^4} \\ \vdots \end{array} + \dots$$

$$1 - \frac{1}{2} = 1 \quad 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Daí: } \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

10. ■ A pessoa nº 1 cumprimenta as outras 599 pessoas;
 ■ A pessoa nº 2 cumprimenta 598 pessoas, pois excluímos o aperto de mão já contado para a pessoa nº 1;
 ■ A pessoa nº 3 cumprimenta 597 pessoas, pois excluímos os apertos de mão, já contados para as pessoas nº 1 e 2;
 ⋮
 ■ A pessoa nº 599 cumprimenta 1 pessoa (apenas a nº 600), pois já contamos todas as outras saudações;
 ■ A pessoa nº 600 já cumprimentou todas as demais.
 A soma pedida é:

$$599 + 598 + 597 + \dots + 1 = \frac{(599 + 1) \cdot 599}{2} =$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ a_1 & & a_n \end{array}$$

$$= 179700$$

11. 1ª camada:

$$10, 10 + r, 10 + 2r, \dots, \underbrace{10 + 99r}_{490} \quad (*)$$

$$\text{A soma é } \frac{(10 + 490) \cdot 100}{2} = \frac{500 \cdot 100}{2}$$

2ª camada:

- o primeiro tijolo recebeu o número

$$\frac{10 + 10 + r}{2} = \frac{20 + r}{2} = 10 + \frac{r}{2}$$

- o segundo tijolo recebeu o número

$$\frac{(10 + r) + (10 + 2r)}{2} = \frac{20 + 3r}{2} = 10 + \frac{3r}{2}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

- o último (99º) tijolo recebeu o número

$$\frac{(10 + 98r) + (10 + 99r)}{2} = \frac{20 + 197r}{2} = 10 + \frac{197r}{2}$$

A soma é:

$$\underbrace{\left(10 + \frac{r}{2}\right)}_{a_1} + \left(10 + \frac{3r}{2}\right) + \dots + \underbrace{\left(10 + \frac{197r}{2}\right)}_{a_{99}} =$$

$$= \frac{\left(10 + \frac{r}{2} + 10 + \frac{197r}{2}\right) \cdot 99}{2} =$$

$$= (20 + 99r) \cdot \frac{99}{2} \stackrel{(*)}{=} 500 \cdot \frac{99}{2}$$

3ª camada:

- o primeiro tijolo recebeu o número

$$\frac{\left(10 + \frac{r}{2} + 10 + \frac{3r}{2}\right)}{2} = \frac{(20 + 2r)}{2} = 10 + r$$

- o segundo tijolo recebeu o número

$$\frac{\left(10 + \frac{3r}{2} + 10 + \frac{5r}{2}\right)}{2} = \frac{(20 + 4r)}{2} = 10 + 2r$$

⋮ ⋮ ⋮

- o último (98º) tijolo recebeu o número

$$\frac{\left(10 + \frac{195r}{2}\right) + \left(10 + \frac{197r}{2}\right)}{2} = 10 + 98r$$

A soma é:

$$\frac{[(10 + r) + (10 + 98r)] \cdot 98}{2} =$$

$$= (20 + 99r) \cdot \frac{98}{2} \stackrel{(*)}{=} 500 \cdot \frac{98}{2}$$

A soma de todos os números escritos nos tijolos é:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^\text{a} \text{ camada} \rightarrow 500 \cdot \frac{100}{2} \\ 2^\text{a} \text{ camada} \rightarrow 500 \cdot \frac{99}{2} \\ 3^\text{a} \text{ camada} \rightarrow 500 \cdot \frac{98}{2} \\ \vdots \\ \text{última camada} \rightarrow 500 \cdot \frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 500 \cdot \left(\frac{100}{2} + \frac{99}{2} + \frac{98}{2} + \dots + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{500 \cdot 5050}{2} = 1262500$$

12. a) Um divisor de 2^{13} é um número da forma 2^a , em que $a \in \{0, 1, \dots, 13\}$

$$\text{Assim, } D(2^{13}) = \{2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{12}, 2^{13}\}$$

b) Devemos calcular:

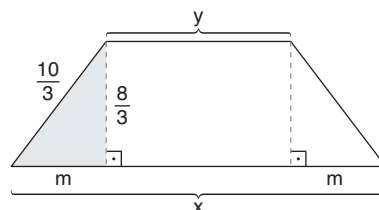
$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{13}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{13}} = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} =$$

$$= \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{14} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{14}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{14}\right] =$$

$$= 2 - \frac{1}{2^{13}} = 2 - 2^{-13}$$

13.



$$\left(y, x, \underbrace{\frac{(x+y) \cdot \frac{8}{3}}{2}}_{\text{área do trapézio}} \right) \text{ é P.G. (*)}$$

$$\Delta \text{ sombreado: } \left(\frac{10}{3} \right)^2 = \left(\frac{8}{3} \right)^2 + m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 = \frac{36}{9} \Rightarrow m = 2$$

$$\text{Como } 2m + y = x \Rightarrow 4 + y = x.$$

Em (*), podemos escrever:

$$\left(y, y + 4, \frac{(2y + 4) \cdot 4}{3} \right) \text{ é P.G.}$$

$$(y + 4)^2 = y \cdot \frac{(2y + 4) \cdot 4}{3}$$

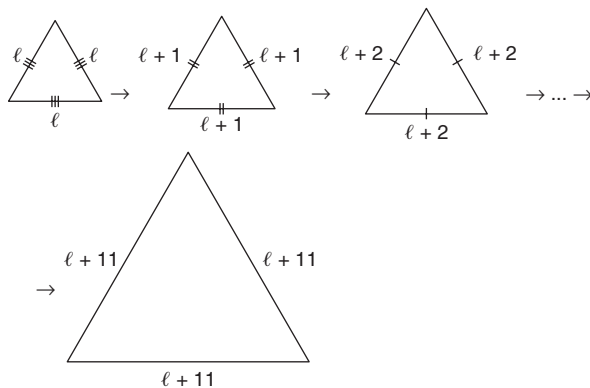
$$y^2 + 8y + 16 = \frac{8y^2 + 16y}{3}$$

$$5y^2 - 8y - 48 = 0$$

$$y = -2,4 \text{ (não convém) ou } y = 4 \text{ cm (base menor)}$$

$$\text{e } x = 8 \text{ cm (base maior)}$$

$$14. T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3 \rightarrow \dots \rightarrow T_{12}$$



A sequência dos perímetros é:

$$(3, 3l + 3, 3l + 6, \dots, 3l + 33)$$

Como a soma dos termos da sequência acima é 342, escrevemos:

$$\frac{(3l + 3l + 33) \cdot 12}{2} = 342$$

$$6l + 33 = 57 \Rightarrow l = 4 \text{ (cm)}$$

$$15. a) a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow 6x = \frac{(1 + x) + (2x^2 + 4)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 11x + 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ (a P.A. é (6, 30, 54)) ou}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ (a P.A. é } \left(\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2} \right))$$

$$b) \text{ P.A.: } \left(\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2}, \dots \right)$$

$$a_{100} = a_1 + 99r = \frac{3}{2} + 99 \cdot \frac{3}{2} = 150$$

$$S_{100} = \frac{\left(\frac{3}{2} + 150 \right)}{2} \cdot 100 = \frac{303}{2} \cdot 50 = 7575$$

$$16. a) a_1 = 2$$

$$a_2 + a_3 = 2q + 2q^2 = 12 \Rightarrow q^2 + q - 6 = 0 \Rightarrow q = -3$$

$$\text{ou } q = 2$$

Como a P.G. é alternada, devemos ter $q = -3$, e a P.G.

é $(2, -6, 18, \dots)$.

b) Seja n o número pedido: $(2, -6 + n, 18)$ é P.A.

$$-6 + n = \frac{2 + 18}{2} \Rightarrow n = 16$$

$$17. S_{20} = 2780 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = 2780 \Rightarrow a_1 + a_1 + 19r = 2780$$

$$S_5 = 170 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2} = 170 \Rightarrow a_1 + a_1 + 4r = 68$$

Segue o sistema:

$$\begin{cases} 2a_1 + 19r = 2780 \\ 2a_1 + 4r = 68 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 6 \text{ e } r = 14$$

$$S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2}; a_{15} = 6 + 14 \cdot 14 = 202$$

$$S_{15} = \frac{(6 + 202) \cdot 15}{2} = 1560$$

Daí a soma dos cinco últimos termos é:

$$S_{20} - S_{15} = 2780 - 1560 = 1220$$

$$18. a) \begin{cases} a_3 + a_4 = -24 \Rightarrow \begin{cases} a_1 q^2 + a_1 q^3 = -24 \\ a_4 + a_5 = 48 \Rightarrow \begin{cases} a_1 q^3 + a_1 q^4 = 48 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 q^2(1 + q) = -24 \text{ (1)} \\ a_1 q^3(1 + q) = 48 \text{ (2)} \end{cases}$$

Dividindo (1) por (2), vem:

$$\frac{1}{q} = -\frac{1}{2} \Rightarrow q = -2$$

b) Em (1), vem:

$$a_1 \cdot 4 \cdot (-1) = -24 \Rightarrow a_1 = 6$$

A P.G. é $(6, -12, 24, -48)$, e a soma dos seus quatro primeiros termos é -30 .

19. Observe que:

$$\blacksquare \log_2 4x = \log_2 4 + \log_2 x = 2 + \log_2 x$$

$$\blacksquare \log_2 32x = \log_2 32 + \log_2 x = 5 + \log_2 x$$

Devemos ter:

$$\log_2 4x = \frac{\log_2 (x - 2) + \log_2 32x}{2}$$

$$2 + \log_2 x = \frac{\log_2 (x - 2) + 5 + \log_2 x}{2}$$

$$4 + 2 \log_2 x = \log_2 (x - 2) + 5 + \log_2 x$$

$$\log_2 x - \log_2 (x - 2) = 1$$

$$\log_2 \left(\frac{x}{x - 2} \right) = 1$$

$$2^1 = \frac{x}{x - 2} \Rightarrow x = 4$$

20. Devemos ter:

$$(2^x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3x} \cdot 4 \cdot 3^x + 7$$

$$2^{2x} = 2^{3x} \cdot 2^{6x} + 6x + 14$$

$$2^{2x} = 2^{3x} + 6x + 14$$

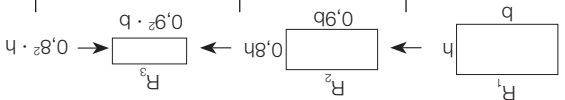
$$2x = 9x + 14$$

$$x = -2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{64}{1}; a_2 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = 4^{-6+7} = 4; \text{P.G.} \left(\frac{1}{64}, \frac{1}{4}, 4\right); q = 16$$

21. $n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}; n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{2}{3}$
 $n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}; n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{4}{5}$
 $\left(1, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \dots\right)$ é uma P.A. de razão $\frac{2}{1}$
 $b_1 = 2^1 = 2$
 $b_2 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{2}$
 $b_3 = 2^2 = 4$
 $b_4 = 2^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{2^2} = 4\sqrt[5]{2}$
 \vdots
 $b_n: (2, 2\sqrt[3]{2}, 4, 4\sqrt[5]{2}, \dots)$ é P.G. de razão $q = \sqrt{2}$.

$$S_{10} = \frac{b_1 \cdot (q^{10} - 1)}{2 \cdot (\sqrt[10]{2} - 1)} = \frac{q - 1}{2 \cdot (\sqrt[10]{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 \cdot (32 - 1)} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 \cdot 31 \cdot (1 + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} + 1}{62 \cdot (1 + \sqrt{2})}$$

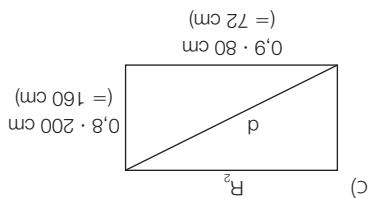
22. 

perímetro $2b + 2h$	área
$1,8b + 1,6h$	$0,9b \cdot 0,8h = 0,72b \cdot h$
$1,62 + 1,28h$	$0,81b \cdot 0,64h = 0,5184b \cdot h$
...	...

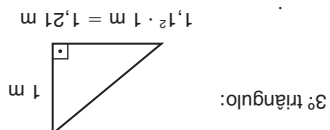
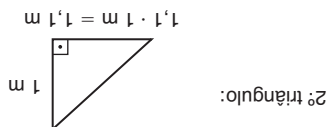
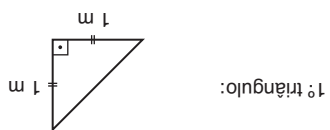
a) Não é P.A. nem P.G.

b) Sim. $(b \cdot h; 0,9b \cdot 0,8h; 0,9^2 \cdot b \cdot 0,8^2 \cdot h \dots)$ é P.G. de razão $0,72$.

A soma dos infinitos termos é $\frac{1}{a} = \frac{1}{b \cdot h} = \frac{1}{0,72} = \frac{b \cdot h}{0,28} = \frac{7}{25} b \cdot h$.



25. a)



24. Na base da torre de 4 andares, encontramos: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ cubos.
 Na base da torre de 5 andares, encontramos: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ cubos.
 Na base da torre de 100 andares, encontraremos: $100 + 99 + 98 + \dots + 1 = \frac{(100 + 1) \cdot 100}{2} = 5050$ cubos.


b) $a_{18} = a_2 + 16r$ ($a_2 = x = 5$)
 $a_{18} = 5 + 16 \cdot 3$
 $a_{18} = 53$

Como a P.A. é formada apenas por números inteiros, devemos ter $x = 5$ em (*). Assim, $r = 3$ é o menor valor possível para razão.

$\Rightarrow r = 0$ ou $r = \frac{5}{3x}$ (*)
 $\Rightarrow x^2 + 10xr + 25r^2 = x^2 + 25xr$
 $(x + 5r)^2 = x^2 + 10xr + 25r^2 \Rightarrow (x + 5r)^2 = x \cdot (x + 25r)$

$a_{27} = x + 25r$
 $a_7 = x + 5r$

23. a) $a_2 = x$

$d^2 = 0,72^2 + 1,6^2$
 $d^2 = \frac{58}{25}$
 $d = \frac{\sqrt{58}}{5} \text{ m}$
 R_4 
 perímetro é: $2 \cdot (0,9^3 \cdot 80 + 0,8^3 \cdot 200)$
 $2 \cdot (58,32 + 102,40)$
 $p = 3,2144 \text{ m}$

Devemos calcular a soma dos 30 primeiros termos da P.G. $(1; 1,1; 1,21; \dots)$ em que $q = 1,1$.

$S_{30} = \frac{a_1 \cdot (q^{30} - 1)}{1 - q} = \frac{1 \cdot (1,1^{30} - 1)}{1,1 - 1} = \frac{1,1^{30} - 1}{0,1}$ (*)

Como $11^{30} = 1,745 \cdot 10^{31}$, temos que:

$$1,1^{30} = \left(\frac{11}{10}\right)^{30} = \frac{1,745 \cdot 10^{31}}{10^{30}} = 1,745 \cdot 10 = 17,45$$

$$\text{Em (*)}, S_{30} = \frac{17,45 - 1}{1,1 - 1} = \frac{16,45}{0,1} = 164,5 \text{ m.}$$

b) Sequência das áreas:

$$\left(\frac{1 \cdot 1}{2}, \frac{1,1 \cdot 1}{2}, \frac{1,1^2 \cdot 1}{2}, \dots, \frac{1,1^{30} \cdot 1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{A soma das áreas é: } & \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{1,1 \cdot 1}{2} + \frac{1,1^2 \cdot 1}{2} + \dots + \\ & + \frac{1,1^{30} \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (1 + 1,1 + 1,1^2 + \dots + 1,1^{30}) = \\ & = \frac{1}{2} \cdot 164,5 = 82,25 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Logo, são necessários $\frac{82,25}{10} = 8,225$ litros.

26. a) (7000; 7000 + 2 · 400; 7000 + 4 · 400; ...)
(7000, 7800, 8600, ...) P.A. de razão 800.

b) O termo geral da P.A. é $a_n = 7000 + (n - 1) \cdot 800 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a_n = 800n + 6200$
Devemos determinar n tal que $a_n = 15000$:
 $800n + 6200 = 15000 \Rightarrow n = 11$ (11ª semana).

27. Seja n o número inicial de bactérias.

- 1ª semana: $0,8n(n - 0,2 \cdot n)$
- 2ª semana: $1,1 \cdot 0,8n = 0,88n$ ($0,8n + 0,1 \cdot 0,8n$)
- 3ª semana: $0,88n + 12 \Rightarrow a_1 = 0,88n + 12$
- 4ª semana: $0,88n + 2 \cdot 12 \Rightarrow a_2 = 0,88n + 24$
- ⋮ ⋮ ⋮
- 15ª semana: $0,88n + 13 \cdot 12 \Rightarrow a_{13} = 0,88n + 156$

Devemos ter:

$$0,88n + 156 = n \Rightarrow n = 1300$$

28. a) Em (ii), se $n = 1$, temos: $a_2 = 1 \cdot a_1 = 1$

Em (iii), se $n = 2$, temos: $a_3 = 2$

Em (ii), se $n = 2$, temos: $a_4 = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 1 = 2$

Em (iii), se $n = 2$, temos: $a_5 = 2$

Em (ii), se $n = 3$, temos: $a_6 = 3 \cdot a_3 = 3 \cdot 2 = 6$

⋮ ⋮ ⋮

Enfim, os termos de ordem ímpar ($1^\circ, 3^\circ, 5^\circ, 7^\circ, \dots$) são iguais a 2 e os termos de ordem par são tais que $a_4 = 2 \cdot a_2$; $a_6 = 3 \cdot a_3$; $a_8 = 4 \cdot a_4$; $a_{10} = 5 \cdot a_5$; $a_{12} = 6 \cdot a_6$. Assim, segue a sequência:

(1, 1, 2, 2, 2, 6, 2, 8, 2, 10, 2, 36, 2, 14, 2, 64)

b) 2^{50} é par e sua metade é $\frac{2^{50}}{2} = 2^{49}$.

$$a_{2^{50}} = 2^{49} \cdot a_{2^{49}} \quad (1)$$

2^{49} é par e sua metade é $\frac{2^{49}}{2} = 2^{48}$.

$$a_{2^{49}} = 2^{48} \cdot a_{2^{48}} \quad (2)$$

■ 2^{48} é par e sua metade é $\frac{2^{48}}{2} = 2^{47}$.

$$a_{2^{48}} = 2^{47} \cdot a_{2^{47}} \quad (3)$$

⋮ ⋮ ⋮

■ 2^2 é par e sua metade é $\frac{2^2}{2} = 2$.

$$a_{2^2} = 2 \cdot a_{2^1} \quad (49)$$

■ 2 é par e sua metade é $\frac{2}{2} = 1$.

$$a_2 = 1 \cdot a_1 = 1 \cdot 1 = 1 \quad (50)$$

Substituindo (50), (49), (48) ..., (3), (2) em (1), vem:

$$a_{2^{50}} = 2^{49} \cdot 2^{48} \cdot 2^{47} \cdot \dots \cdot 2^1 \cdot 1$$

$$a_{2^{50}} = 2^{49+48+\dots+1} = 2^{1225}$$

29. a) $a_2 = a_1 + r$

$$a_4 = a_1 + 3r$$

$$a_6 = a_1 + 5r$$

⋮ ⋮ ⋮

Devemos somar os $\frac{n}{2}$ primeiros termos da sequência (b_n):

($\underbrace{a_1 + r}_{b_1}, \underbrace{a_1 + 3r}_{b_2}, \underbrace{a_1 + 5r}_{b_3}, \dots$), que é uma P.A. de razão $r' = 2r$

$$b_{\frac{n}{2}} = b_1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot r'$$

$$b_{\frac{n}{2}} = a_1 + r + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot 2r$$

$$b_{\frac{n}{2}} = a_1 + r + nr - 2r = a_1 + r(n - 1)$$

$$S_{\frac{n}{2}} = \frac{(b_1 + b_{\frac{n}{2}}) \cdot \frac{n}{2}}{2} = \frac{[a_1 + r + a_1 + r(n - 1)] \cdot n}{4}$$

$$S_{\frac{n}{2}} = \frac{(2a_1 + nr) \cdot n}{4} = \frac{n}{4} \cdot (2a_1 + n \cdot r)$$

b) $a_n = -224 + (n - 1) \cdot 4$

$$a_n = 4n - 228$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(-224 + 4n - 228) \cdot n}{2} = \\ &= \frac{(4n - 452) \cdot n}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Devemos ter } \frac{(4n - 452) \cdot n}{2} > 0 \Rightarrow 4n^2 - 452n > 0 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}^*}$$

$$\Rightarrow n > 113.$$

Devemos somar, no mínimo, 114 termos.

30. Notemos inicialmente que 2001 não pertence à P.A.

(1089, 1104, 1119, ...), pois

$$a_n = 1089 + (n - 1) \cdot 15 = 1089 + 15n - 15 = 1074 + 15n$$

Se $a_n = 2001 \Rightarrow n \notin \mathbb{N}$ ($n = 61,8$)

No entanto, $a_{62} = 1074 + 15 \cdot 62 = 2004$ é o primeiro termo da P.A. que é maior que 2000. Assim, no século XXI, haverá festa em: 2004, 2019, 2034, 2049, 2064, 2079 e 2094.

É preciso analisar qual desses termos pertence à P.A. (2001, 2013, ...), que corresponde aos anos da serpente.

Como $2001 + 12 \cdot 4 = 2049$ é o 5º termo dessa última P.A., concluímos que a resposta procurada é 2049.

31. (01) V. Como $n^2 > 0$, o quociente $\frac{n^2+1}{n^2} > 0$, de modo que o sinal de $a_n = (-1)^n \cdot \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$ depende de $(-1)^n$, que é alternadamente 1 ou -1, conforme n seja par ou ímpar. Logo, o produto é negativo.
- (02) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1 > n^2 \Rightarrow \frac{n^2+1}{n^2} < 1$
- Se n é par, $a_n = \frac{n^2+1}{n^2} < 1$
- Se n é ímpar, $a_n = -\frac{n^2+1}{n^2} > -1$
- (04) $\forall b_1 = 1$
- $b_2 = \frac{2}{3} \cdot b_1 = \frac{2}{3}$
- $b_3 = \frac{3}{4} \cdot b_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$
- Em geral, como $n+2 > n+1$, o quociente $\frac{n+2}{n+1} > 1$
- $b_{n+1} > b_n$
- (08) $f: (-1)^n \cdot \frac{n^2+1}{1} = \frac{2}{1}$
- Se n é par, segue que $2n^2 = n^2 + 1 \Rightarrow n = 1$ (ímpar).
- Se n é ímpar, temos: $-2n^2 = n^2 + 1 \Rightarrow n \notin \mathbb{R}$.
- (16) $\forall b_n = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \dots\right)$ P.A. de razão $\frac{2}{1}$.
- (32) $f: a_1 = 1$
- $a_2 = 1 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$
- $a_3 = (-1) \cdot \frac{10}{9} = -\frac{10}{9}$
- $\left(1, \frac{4}{9}, -\frac{10}{9}, \dots\right)$ não é P.G.
- A soma é: $(01) + (02) + (04) + (16) = 23$.
32. ordem de erro
- | | | |
|----|------------|--------------------------|
| 1º | 4 · 1 = 4 | total de letras escritas |
| 2º | 4 · 2 = 8 | |
| 3º | 4 · 3 = 12 | |
| : | : | |
| n | 4 · n | |
- O número total de letras escritas até o n -ésimo erro é $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(4 + 4n) \cdot n}{2} = 2n + 2n^2$
- Do enunciado, devemos ter:
- $2n + 2n^2 = 10 \cdot 4n$
- $n^2 + n = 20n \Rightarrow n = 19$
- O número total de letras escritas até o fim do jogo é $S_{19} = \frac{(4 + 4 \cdot 19) \cdot 19}{2} = 760$.

33. a) $t(x) = ax + b$
- $\begin{cases} 35 = a \cdot 23,8 + b \\ 42 = a \cdot 27,3 + b \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = -12,6$
- $t(x) = 2x - 12,6$
- $(a = 2 \text{ e } b = -12,6)$
- ou, isolando x em função de t , vem:
- $2x = t + 12,6 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}t + 6,3$ ($c = 0,5$ e $d = 6,3$)
- b) $n_5 = n_1 + 4r$
- $n_5 = 5 + 4 \cdot 0,5 = 7$
- $n_5 = f(c_5)$, isto é, $7 = \frac{5 \cdot (c_5 - 20)}{3} \Rightarrow c_5 = 24,2 \text{ cm}$
34. Experimento A: $a_1 = \frac{100}{6}$ e $a_5 = \frac{100}{24}$: $a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow \frac{100}{24} = \frac{100}{6} \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{100}{6} \cdot \frac{6}{100} = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \sqrt[4]{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2^2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Experimento B: $a_1 = \frac{100}{11}$ e $a_7 = \frac{100}{85}$: $a_7 = a_1 \cdot q^6 \Rightarrow \frac{100}{85} = \frac{100}{11} \cdot q^6 \Rightarrow q^6 = \frac{100}{85} \cdot \frac{11}{100} = \frac{11}{85} \Rightarrow q = \sqrt[6]{\frac{11}{85}} \approx \sqrt[6]{0,1294} \approx 0,97$
- Como $q_A > q_B$, no experimento A verificamos maior velocidade de propagação.
35. a) Se a média é de 30 crimes por ano, então nesse período de 5 anos foram cometidos $30 \cdot 5 = 150$ crimes, isto é, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 150$ e $a_5 = 40$.
- $(a_2 - r) + a_2 + (a_2 + r) + (a_2 + 2r) + (a_2 + 3r) = 150$
- $5a_2 + 5r = 150 \Rightarrow 5 \cdot 40 + 5r = 150 \Rightarrow r = -10$
- b) $a_5 = a_2 + 3r = 40 + 3 \cdot (-10) = 10$
- Assassínatos: a ; roubos: $2a$; estelionatos: $2a$
- $a + 2a + 2a = 10 \Rightarrow a = 2$; $2 \cdot 2 = 4$ estelionatos
- c) n° total de crimes de 2000 a 2011 = $150 + 30 = 180$;
- n° de crimes em 2006 = $a_7 - r = 40 - (-10) = 50$
- médias entre 2007 e 2011 = $\frac{180 - 50}{5} = 26$
36. Como o triângulo é isósceles, a altura relativa à base também divide o lado ao meio:
-
- $L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$
- $L^2 = h^2 + \frac{L^2}{4} \Rightarrow h^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}L$ (*)
- $h^2 = \frac{16}{15L^2} \Rightarrow h = \frac{4}{L \cdot \sqrt{15}}$ (*)
- (L, h, a) é P.G.
- $h^2 = L \cdot a$
- Mas $a = \frac{L}{2} \cdot h$ (*) $\Rightarrow \frac{L}{2} \cdot \frac{4}{L \cdot \sqrt{15}} = \frac{2}{L^2 \cdot \sqrt{15}}$
- $\frac{16}{15L^2} = \frac{2}{L^2 \cdot \sqrt{15}} \Rightarrow \frac{16}{15} = \frac{2}{\sqrt{15}} \Rightarrow L^2(L\sqrt{15} - 15) = 0$
- $L \neq 0 \Rightarrow L^2(L\sqrt{15} - 15) = 0 \Rightarrow L = \frac{15}{\sqrt{15}} = \sqrt{15} \text{ cm}$.

$$37. a) S_5 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a_1 \cdot (q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$a_7 - a_2 = 3 \Rightarrow a_1 \cdot q^6 - a_1 \cdot q = 3 \Rightarrow a_1 \cdot q(q^5 - 1) = 3 \Rightarrow a_1 \cdot (q^5 - 1) = \frac{3}{q} \quad (2)$$

$$(2) \text{ em } (1) \Rightarrow \frac{3}{q} \cdot \frac{1}{q-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow q^2 - q - 6 = 0 \quad \begin{matrix} q < 0 \\ \Rightarrow \\ q < 0 \end{matrix} \Rightarrow q = -2$$

$$b) \text{ Em } (2), \text{ vem: } a_1 \cdot (-32 - 1) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a_1 \cdot (-33) = -\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{22}$$

$$a_2 = \frac{1}{22} \cdot (-2) = -\frac{1}{11}$$

$$a_3 = \left(-\frac{1}{11}\right) \cdot (-2) = \frac{2}{11}$$

$$\text{A soma é } \frac{1}{22} - \frac{1}{11} + \frac{2}{11} = \frac{3}{22}.$$

38. a) O número de elementos de cada linha varia de acordo com a P.A. (1, 3, 5, 7, ...). Na décima linha, encontramos $a_{10} = 1 + 9 \cdot 2 = 19$ números.

A décima linha começa por 10: (10, 11, 12, ...)

Seu 19º (último) número é $b_{19} = 10 + 18 \cdot 1 = 28$.

$$S_{19} = \frac{(b_1 + b_{19}) \cdot 19}{2} = \frac{(10 + 28) \cdot 19}{2} = 361$$

b) O número de elemento da linha n é:

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_n = 2n - 1$$

A n -ésima linha começa por n : ($n, n + 1, n + 2, \dots$)

Seu $(2n - 1)$ -ésimo termo é:

$$b_{2n-1} = b_1 + (2n - 2) \cdot r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{2n-1} = n + (2n - 2) \cdot 1 = 3n - 2$$

$$\text{A soma pedida é: } \frac{(n + 3n - 2) \cdot (2n - 1)}{2} =$$

$$= \frac{(4n - 2) \cdot (2n - 1)}{2} = (2n - 1)^2$$

39. (01) F. ($r_1, r_1 \cdot q, r_1 \cdot q^2, \dots$): sequência dos raios

($\pi r_1^2, \pi \cdot (r_1 \cdot q)^2, \pi \cdot (r_1 \cdot q^2)^2, \dots$): sequência das áreas

↓

($\pi r_1^2, \pi r_1^2 \cdot q^2, \pi r_1^2 \cdot q^4, \dots$) é P.G. de razão q^2 .

(02) V.

$$\text{Receita: } \left(300\,000; 300\,000 \cdot \frac{6}{5}; 300\,000 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2; 300\,000 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^3 \right)$$

↓

↓

↓

↓

novembro

dezembro

janeiro

fevereiro

360 000

432 000

518 400

despesas: (350 000; 405 000; 460 000; 515 000; ...)

↓

↓

↓

↓

novembro

dezembro

janeiro

fevereiro

(04) V. A sequência dos aumentos anuais é $\left(4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots\right)$.

$$\text{Como } 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = 8,$$

o limite da soma é 8 e, desse modo, ele não atingirá os 68 kg.

$$(08) \text{ V.P.A. } (a_1, 5, a_3) \Rightarrow \frac{a_1 + a_3}{2} = 5 \Rightarrow a_1 + a_3 = 10$$

$$\text{P.G. } (a_1, 4, a_3) \Rightarrow a_1 \cdot a_3 = 4^2 \Rightarrow a_1 \cdot a_3 = 16$$

Daí, $a_1 = 2$ e $a_3 = 8$.

P.A. (2, 5, 8); P.G. (2, 4, 8)

↓

$$a_{10} = 2 + 9 \cdot 3 = 29$$

$$S_{10} = \frac{(2 + 29) \cdot 10}{2} = 155$$

A soma é: (02) + (04) + (08) = 14.

40. $n_1 = 3$;

$$n_2 = \frac{n_1 - 1}{n_1 + 2} = \frac{3 - 1}{3 + 2} = \frac{2}{5};$$

$$n_3 = \frac{n_2 - 1}{n_2 + 2} = \frac{\frac{2}{5} - 1}{\frac{2}{5} + 2} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4};$$

$$n_4 = \frac{n_3 - 1}{n_3 + 2} = \frac{-\frac{1}{4} - 1}{-\frac{1}{4} + 2} = -\frac{5}{7};$$

$$n_5 = \frac{n_4 - 1}{n_4 + 2} = \frac{-\frac{5}{7} - 1}{-\frac{5}{7} + 2} = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3};$$

$$n_6 = \frac{n_5 - 1}{n_5 + 2} = \frac{-\frac{4}{3} - 1}{-\frac{4}{3} + 2} = -\frac{7}{2};$$

$$n_7 = \frac{n_6 - 1}{n_6 + 2} = \frac{-\frac{7}{2} - 1}{-\frac{7}{2} + 2} = \frac{-9}{-3} = 3 = n_1;$$

$$n_8 = \frac{n_7 - 1}{n_7 + 2} = \frac{2}{5} = n_2$$

$$n_9 = \frac{n_8 - 1}{n_8 + 2} = -\frac{1}{4} = n_3$$

⋮ ⋮ ⋮

Assim, os valores de n_j , para $j \in \{1, 2, 3, \dots\}$, variam de 6 em 6.

$$2013 = 6 \cdot 335 + 3 \Rightarrow n_{2013} = n_3 = -\frac{1}{4}$$

$$41. a_{50} = a_1 + 49 \cdot r = 0,7 + 49 \cdot 0,05 = 3,15$$

$$S_{50} = \frac{(0,7 + 3,15) \cdot 50}{2} = 96,25 \text{ metros}$$

42. a) O número de bloquinhos varia de acordo com a P.A.:

1,	2,	3,	4, ...
↓	↓	↓	
1ª linha	2ª linha	3ª linha	

$$\text{Devemos determinar } S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = (1 + 10) \cdot 5 = 55.$$

b) Observemos que nas três primeiras linhas o maior número é $S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$; nas quatro primeiras linhas, o maior número é $S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$; nas cinco primeiras linhas, o maior número é $S_5 = S_4 + 5 = 15$, e assim por diante.

Desse modo, nas 30 primeiras linhas da pirâmide, o último (maior) número escrito é $S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2} = (1 + 30) \cdot 15 = 465$.

c) $S_{29} = \frac{(1 + 29) \cdot 29}{2} = 435$. Assim, a trigésima linha começa com 436 e termina com 465, e a soma é:

$$436 + 437 + \dots + 465 = \frac{(436 + 465) \cdot 30}{2} = 13\,515$$

43. Sejam n o número de mulheres e $52 - n$ o número de homens.

1ª mulher \rightarrow 7 homens $= a_1$

2ª mulher \rightarrow 8 homens $= a_2$

3ª mulher \rightarrow 9 homens $= a_3$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

n -ésima mulher $\rightarrow (52 - n)$ homens $= a_n$

Como $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, podemos escrever:

$$52 - n = 7 + (n - 1) \cdot 1 \Rightarrow 52 - n = 6 + n \Rightarrow 2n = 46$$

$$n = 23 \text{ (mulheres)} \Rightarrow \text{homens} = 52 - 23 = 29$$

44. a) ■ O raio do círculo da etapa 1 é $R_1 = \frac{L}{2}$ e sua área é

$$\pi \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{L^2}{4}.$$

■ A área de cada círculo da etapa 2 é $R_2 = \frac{L}{4}$ e a área

$$\text{é } \pi \cdot \left(\frac{L}{4}\right)^2 = \pi \cdot \frac{L^2}{16}.$$

■ A área de cada círculo da etapa 3 é $R_3 = \frac{L}{8}$ e a área

$$\text{é } \pi \cdot \left(\frac{L}{8}\right)^2 = \pi \cdot \frac{L^2}{64}.$$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

■ O raio de cada círculo da etapa n é $R_n = \frac{L}{2^n}$ e a área

$$\text{é } \pi \cdot \left(\frac{L}{2^n}\right)^2 = \pi \cdot \frac{L^2}{2^{2n}}.$$

b) etapa 1: 1 círculo

etapa 2: 4 círculos (4^{2-1})

etapa 3: 16 círculos (4^{3-1})

\vdots

etapa n : 4^{n-1} círculos, cada um com área $\pi \cdot \frac{L^2}{2^{2n}}$.

A área pedida é, portanto, $4^{n-1} \cdot \pi \cdot \frac{L^2}{2^{2n}} =$

$$= \frac{4^{n-1}}{4} \cdot \pi \cdot \frac{L^2}{2^{2n}} = \frac{\pi \cdot L^2}{4}.$$

45. a) O 1º conjunto tem 1 elemento; o 2º tem 2; o 3º tem 3; ... o 21º conjunto tem 21 elementos: $\{211, 212, \dots, a_{21}\}$.

$$a_{21} = a_1 + 20r = 211 + 20 = 231$$

$$S_{21} = \frac{(211 + 231) \cdot 21}{2} = 4\,641$$

b) O maior elemento do 1º conjunto é 1.

O maior elemento do 2º conjunto é $3 = 1 + 2$.

O maior elemento do 3º conjunto é $6 = 1 + 2 + 3$.

O maior elemento do 4º conjunto é $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

O maior elemento do 99º conjunto é

$$S_{99} = \frac{(a_1 + a_{99}) \cdot 99}{2} = \frac{(1 + 99) \cdot 99}{2} = 4\,950.$$

Assim, o menor elemento do 100º conjunto é $a_1 = 4\,951$ e o maior é $a_{100} = 4\,951 + 99 \cdot 1 = 5\,050$.

$$\text{A soma pedida é } \frac{(4\,951 + 5\,050) \cdot 100}{2} = 500\,050.$$

$$46. (01) F. 1^\circ \text{ dia } \rightarrow V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3}{0,5} = 6 \text{ km/h}$$

$$2^\circ \text{ dia } \rightarrow V_m = \frac{3,5}{0,5} = 7 \text{ km/h}$$

$$3^\circ \text{ dia } \rightarrow V_m = \frac{4,0}{0,5} = 8 \text{ km/h}$$

\vdots

Trata-se de uma P.A. de razão 1 km/h.

(02) V.

$$V_m \text{ de João} = \frac{6 \text{ km}}{\left(\frac{40}{60}\right)h} = 9 \text{ km/h}$$

$$V_m \text{ de Pedro} = \frac{4,5 \text{ km}}{0,5 h} = 9 \text{ km/h}$$

(04) V. (3; 3,5; 4, ...)

$$a_{10} = a_1 + 9r = 3 + 9 \cdot 0,5 = 7,5 \text{ km}$$

(08) V. $a_{13} = a_1 + 12r = 3 + 12 \cdot 0,5 = 9 \text{ km}$

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{13}) \cdot 13}{2} = \frac{(3 + 9) \cdot 13}{2} = 78 \text{ km}$$

A distância total percorrida por João é $13 \cdot 6 = 78 \text{ km}$.

(16) F. Pedro: $a_{15} = a_1 + 14r = 3 + 14 \cdot 0,5 = 10 \text{ km}$

$$S_{15} = \frac{(3 + 10) \cdot 15}{2} = 97,5 \text{ km}$$

João: $15 \cdot 6 = 90 \text{ km}$

A diferença é de $7,5 \text{ km} < 10 \text{ km}$.

A soma pedida é: (02) + (04) + (08) = 14.

47. a) V

nível 1: 3
nível 2: $9 = 3^2$
nível 3: $27 = 3^3$
 \vdots
nível n : $n = 3^n$

b) V

nível 1: 8 cm
nível 2: 8 cm
nível 3: 8 cm
 \vdots
nível n : 8 cm

c) F

nível 1: $3 \cdot (1 \text{ cm}^2) = 3 \text{ cm}^2$
nível 2: $9 \cdot \left(\frac{1}{2} \text{ cm}\right)^2 = \frac{9}{4} \text{ cm}^2$
nível 3: $27 \cdot \left(\frac{1}{4} \text{ cm}\right)^2 = \frac{27}{16} \text{ cm}^2$
 \vdots
 $\left(3, \frac{9}{4}, \frac{27}{16}, \dots\right)$ é P.G.; $q = \frac{3}{4}$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 3 \cdot \frac{81}{256} < 1$$

d) F

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

Se $n \rightarrow \infty$, $a_n \rightarrow 0$

e) V

f) V

48. áreas removidas após:

$$\begin{cases} 1^\circ \text{ corte: } \frac{b}{2} \cdot h \\ 2^\circ \text{ corte: } \frac{b}{4} \cdot h = \frac{b}{2^2} \cdot h \\ 3^\circ \text{ corte: } \frac{b}{8} \cdot h = \frac{b}{2^3} \cdot h \\ \vdots \\ n\text{-ésimo corte: } \frac{b}{2^n} \cdot h \end{cases}$$

O valor pedido é:

$$\begin{aligned} &= \frac{b}{2} \cdot h + \frac{b}{2^2} \cdot h + \frac{b}{2^3} \cdot h + \dots + \frac{b}{2^n} \cdot h \\ &= b \cdot h \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) \\ &= b \cdot h \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} \\ &= b \cdot h \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]}{-\frac{1}{2}} \\ &= b \cdot h \cdot (-1) \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right] \\ &= b \cdot h \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \end{aligned}$$

49. (01) F. Seja a P.A.: $(a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, \dots)$.

Ao aplicarmos a função f , dada por $f(x) = 2x + 5$, aos seus termos, obtemos a sequência:

$(2a_1 + 5; 2(a_1 + r) + 5; 2(a_1 + 2r) + 5; \dots)$, isto é, $(2a_1 + 5; 2a_1 + 2r + 5; 2a_1 + 4r + 5; \dots)$ é uma P.A. de razão igual a $2r$.

(02) V. Seja a P.A. $(a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, \dots)$. Aplicando $f(x) = 3x$ aos seus termos, obtemos a sequência:

$(3a_1; 3 \cdot (a_1 + r); 3 \cdot (a_1 + 2r); \dots)$, isto é:

$(3a_1, 3a_1 + 3r, 3a_1 + 6r, \dots)$ é uma P.A. de razão igual a $3r$.

(04) V. Seja a P.A. $(a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, \dots)$. Aplicando $f(x) = 2^x$ aos seus termos, obtemos a sequência:

$(2^{a_1}, 2^{a_1 + r}, 2^{a_1 + 2r}, \dots)$, isto é:

$(2^{a_1}, 2^{a_1} \cdot 2^r, 2^{a_1} \cdot 2^{2r}, \dots)$ é uma P.G. de razão $\frac{2^{a_1} \cdot 2^r}{2^{a_1}} = 2^r$;

note que $\frac{a_1 \cdot 2^{2r}}{a_1 \cdot 2^r} = 2^r$.

(08) V. Seja a P.G. $(a_1, a_1 \cdot 9, a_1 \cdot 9^2, \dots)$. Aplicando f , obtemos $(\log_3 a_1, \log_3 (a_1 \cdot 9), \log_3 (a_1 \cdot 9^2), \dots)$, isto é, $(\log_3 a_1,$

$\log_3 a_1 + \frac{\log_3 9}{2}, \log_3 a_1 + 2 \cdot \frac{\log_3 9}{2}, \dots)$ é uma P.A.

de razão igual a 2.

A soma é: (02) + (04) + (08) = (14).

Testes

6. $S_n = 3 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 3 \cdot (2^n - 1)$

$n = 14 \Rightarrow S_{14} = 49\,149$

$n = 15 \Rightarrow S_{15} = 98\,301$

Resposta: b.

12.

$A_1 = 1$

$\ell_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\ell_2^2 = \frac{1}{2} \left(\ell = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$A_2 = \frac{1}{2}$

$\ell_3^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2$

$\ell_3^2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$A_3 = \frac{1}{4} \dots$

Devemos calcular a soma dos dez primeiros termos da

P.G. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right)$, a saber:

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{1024} - 1}{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{-\frac{1023}{1024}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1023}{512} \end{aligned}$$

Resposta: d.

13. Note que

- A 20ª linha contém 20 números.
- A sequência formada pelos primeiros elementos de cada linha é $(1, 3, 7, 13, 21, \dots)$, isto é, os aumentos formam uma P.A. O 19º aumento é $2 \cdot 19 = 38$.

Assim, o 20º termo da sequência $(1, 3, 7, 13, 21, \dots)$ é igual a $1 + (2 + 4 + 6 + \dots + 38) = 1 + \frac{(2 + 38) \cdot 19}{2} = 381$.

20ª linha: $(381, 383, \dots)$
Seu 4º termo é 387.

Resposta: c.

15. A soma dos números escritos nos dezesseis quadrados é igual a $1 + 2 + 3 + \dots + 16 = \frac{(1 + 16) \cdot 16}{2} = 136$.

A soma dos elementos de uma linha (ou de uma coluna) é $\frac{4}{136} = 34$, donde concluímos que

$$A = 1, B = 13, C = 9 \text{ e } D = 5 \Rightarrow A + B + C + D = 28$$

Resposta: a.

$$16. \ell_1 = 1 \Rightarrow p_1 = 3$$

$$\ell_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow p_2 = 3 \cdot \frac{3}{2} = 2$$

$$\ell_3 = \frac{9}{4} \Rightarrow p_2 = 3 \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

:

$$\left(3, 2, \frac{4}{3}, \dots\right) \text{ é uma P.G. cuja soma dos infinitos termos é}$$

$$\frac{a_1}{1 - q} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 9.$$

Resposta: a.

19. mais novo $(1, 2, 3, \dots, n)$

O valor acumulado é $1 + 2 + \dots + n = \frac{(1 + n) \cdot n}{2}$.

mais velho: o valor acumulado após n semanas é $10 \cdot n$ (*).

Devemos ter:

$$\frac{(1 + n) \cdot n}{2} = 10 \cdot n \Rightarrow n = 19 \Rightarrow 10 \cdot 19 = 190$$

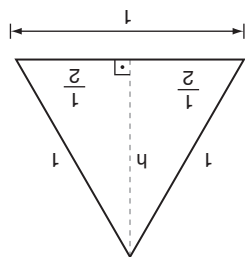
190 reais ao final do período

Resposta: c.

20. coluna 2 (6, 18, 30, ...)
linha 0
↑
linha 1
↑
linha 2

$$a_{33} = a_1 + 32 \cdot r = 6 + 32 \cdot 12 \Rightarrow a_{33} = 390.$$

Resposta: b.



25.

$$\blacksquare \quad 1^{\circ} \quad h^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$\blacksquare \quad \text{área } \Delta \text{ equilátero} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 \quad \textcircled{1}$$

$$\blacksquare \quad \text{raio do círculo maior} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{\sqrt{3}} \text{ cm}$$

$$\blacksquare \quad \text{sequência dos raios: } \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{6}{\sqrt{3}}, \frac{18}{\sqrt{3}}, \frac{54}{\sqrt{3}}, \dots\right)$$

$$\blacksquare \quad \text{sequência das áreas: } \left(\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2, \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2, \pi \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2, \pi \cdot \left(\frac{18}{\sqrt{3}}\right)^2, \pi \cdot \left(\frac{54}{\sqrt{3}}\right)^2, \dots\right)$$

$$\text{isto é, } \left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{108}, \frac{972}{\pi}, \dots\right) \quad (*)$$

■ A soma das áreas dos círculos é:

$$\frac{\pi}{12} + 3 \cdot \frac{\pi}{108} + 3 \cdot \frac{972}{\pi} + \dots = \frac{\pi}{12} + 3 \cdot \left(\frac{108}{\pi} + \frac{972}{\pi} + \dots\right) = \frac{\pi}{12} + 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{108}} = \frac{\pi}{12} + \frac{96}{3\pi} = \frac{96}{11\pi} \text{ cm}^2 \quad \textcircled{2}$$

$$\blacksquare \quad \text{A área pedida é } \textcircled{1} - \textcircled{2} = \sqrt{3} - \frac{96}{11\pi} = \frac{24\sqrt{3} - 96}{11\pi} \text{ cm}^2.$$

Resposta: a.

26. 1º painel: ladrilhos claros: 1
ladrilhos escuros: 8

2º painel: ladrilhos claros: 2
ladrilhos escuros: 10

3º painel: ladrilhos claros: 3
ladrilhos escuros: 12

:

n-ésimo painel: ladrilhos claros: n
ladrilhos escuros: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$$a_n = 8 + (n - 1) \cdot 2$$

$$a_n = 6 + 2n$$

$$21. 6 = \frac{x}{x + y} \Rightarrow x + y = 12$$

$$y^2 = 6 \cdot \left(y + \frac{3}{8}\right) \Rightarrow y^2 = 6y + \frac{9}{4} \Rightarrow y^2 - 6y - \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow y = -2 \text{ ou } y = 8.$$

$$\text{Como } y > 0, \text{ devemos ter } y = 8 \Rightarrow x = 4.$$

$$\text{A sequência é } \left(4, 6, 8, \frac{3}{2}, \dots\right), \text{ e a soma pedida vale } \frac{3}{86}.$$

Resposta: c.

Daí:

$$(6 + 2n) - n = 50 \Rightarrow n = 44$$

Temos: 44 ladrilhos claros e $6 + 2 \cdot 44 = 94$ ladrilhos escuros, totalizando $44 + 94 = 138$ ladrilhos.

Resposta: e.

27. iteração 1: área de um triângulo preto = $\frac{1}{4}$

iteração 2: área de um triângulo preto = $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$

iteração 3: área de um triângulo preto = $\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$

⋮

iteração n : área de um triângulo preto = $\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdots \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{2^{240}}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{1+2+3+\dots+n} = \frac{1}{2^{240}}$$

$$(2^{-2})^{\frac{(1+n)n}{2}} = 2^{-240}$$

$$-n(1+n) = -240$$

$$n^2 + n - 240 = 0 \stackrel{n \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} n = 15$$

Resposta: d.

29. $a_1 - a_{100} = a_1 - (a_1 + 99r) = -99r$

$a_2 - a_{99} = (a_1 + r) - (a_1 + 98r) = -97r$ P.A. de razão $2r$

$a_3 - a_{98} = (a_1 + 2r) - (a_1 + 97r) = -95r$

Resposta: e.

30. Observe que a base de cada um dos retângulos mede 1 e suas alturas são, respectivamente, $(f(1), f(2), f(3), f(4), \dots)$, isto é, $\left(\frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3, \dots\right)$.

Assim, a soma pedida é igual a:

$$1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

Resposta: d.

32. $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \dots = \frac{\frac{x}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} = x$

$\sqrt{2+x}$ é real se $2+x \geq 0$, isto é, se $x \geq -2$.

A soma pedida é: $-2 + (-1) = -3$.

Resposta: c.

33. $6 + 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots = \frac{6}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{6}{\frac{2}{3}} = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9$

$$\log_2 9 = \log_2 x - \log_4 x$$

$$\log_2 9 = \log_2 x - \frac{\log_2 x}{\log_2 4}$$

$$\log_2 9 = \log_2 x - \frac{1}{2} \cdot \log_2 x$$

$$\log_2 9 = \frac{1}{2} \cdot \log_2 x \Rightarrow \log_2 9 = \log_2 x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 9 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 81;$$

$$\log_3 x = \log_3 81 = 4$$

Resposta: d.

34. mmc $(2, 3, 4, 5) = 60$

$$M(60) = \{60, 120, 180, \dots\}$$

O maior múltiplo de 60 menor que 1000 é 960:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$960 = 60 + (n-1) \cdot 60 \Rightarrow n = 16$$

Resposta: d.

35. Etapa 1: área = 100

Etapa 2: área = $3 \cdot \frac{100}{4} = \frac{3}{4} \cdot 100$

Etapa 3: área = $9 \cdot \frac{100}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 100$

⋮

Etapa 6: área = $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot 100$

Resposta: e.

38. $\widehat{P_0 P_1} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot R = \pi R$ $\times \frac{1}{2}$

$\widehat{P_1 P_2} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{R}{2} = \frac{\pi R}{2}$ $\times \frac{1}{2}$

$\widehat{P_2 P_3} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{R}{4} = \frac{\pi R}{4}$ $\times \frac{1}{2}$

⋮ ⋮ ⋮

O comprimento da trajetória é: $\pi R + \frac{\pi R}{2} + \frac{\pi R}{4} + \dots =$

$$= \frac{a_1}{1-q} = \frac{\pi R}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi R}{\frac{1}{2}} = 2\pi R$$

Resposta: e.

39. Se todos os comprimidos tivessem massa igual a 20 mg, a massa total retirada dos frascos seria:

$$20 \text{ mg} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 15) = (20 \text{ mg}) \cdot \frac{(1+15) \cdot 15}{2} = 2400 \text{ mg}$$

Como a massa total dos comprimidos retirados é 2540 mg, obtemos uma diferença de $2540 - 2400 = 140$ mg. A diferença de massa, por comprimido, é de $30 \text{ mg} - 20 \text{ mg} = 10$ mg, e, assim, o número de comprimidos retirados é $140 \div 10 = 14$, que corresponde ao frasco numerado com 14.

Resposta: c.

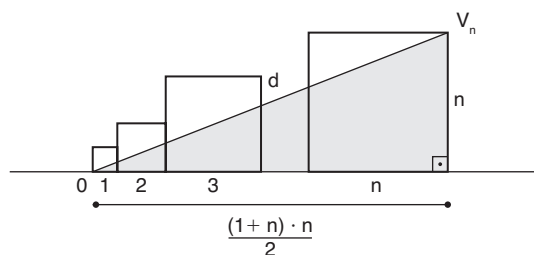
40. $\log_3 3x = \log_3 3 + \log_3 x = 1 + \log_3 x;$

$$\log_3 9x = \log_3 9 + \log_3 x = 2 + \log_3 x;$$

$(\log_3 x, 1 + \log_3 x, 2 + \log_3 x)$ é uma P.A. de razão 1.

Resposta: a.

41. Observe que a base do triângulo sombreado é igual à soma dos n primeiros naturais não nulos, a saber $\frac{(1+n) \cdot n}{2}$.



$$d^2 = n^2 + \left(\frac{(1+n) \cdot n}{2}\right)^2 \Leftrightarrow d = \sqrt{n^2 + \frac{n^2}{4} \cdot (n+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = \sqrt{\frac{n^2}{4} \cdot (4 + (n+1)^2)} \Leftrightarrow d = \frac{n}{2} \sqrt{n^2 + 2n + 5}$$

Resposta: a.

42. ■ $A_0B_0 = A_0A_1 + B_0B_1 + A_1A_2 + B_1B_2 + \dots$

$$A_0B_0 = A_0A_1 + \frac{2}{3}A_0A_1 + \frac{2}{3}B_0B_1 + \frac{2}{3}A_1A_2 + \dots$$

$$A_0B_0 = A_0A_1 + \frac{2}{3}A_0A_1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}A_0A_1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}A_0A_1 + \dots$$

$$A_0B_0 = A_0A_1 + \frac{2}{3}A_0A_1 + \frac{4}{9}A_0A_1 + \frac{8}{27}A_0A_1 + \dots$$

$$6 = \frac{A_0A_1}{1 - \frac{2}{3}} \Rightarrow A_0A_1 = 2$$

■ $B_0B_1 = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}; B_1B_2 = \frac{8}{27} \cdot 2 = \frac{16}{27}; B_2B_3 = \frac{32}{243} \cdot 2 = \frac{64}{243}$

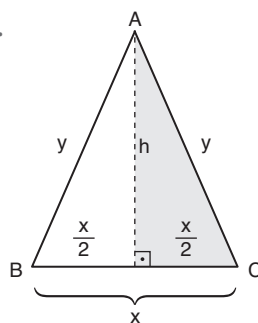
■ $B_0C = B_0B_1 + B_1B_2 + B_2B_3 + \dots$

$$B_0C = \frac{4}{3} + \frac{16}{27} + \frac{64}{243} + \dots = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{12}{5}$$

Resposta: b.

44. $a_1 = 100\,000 = 10^5$
 $S_6 = 100 \text{ milhões} = 100 \cdot 10^6 = 10^8$
 De acordo com o enunciado, a sequência é uma P.G., cuja razão é k e $S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_6 = a_1 + a_1k + a_1k^2 + \dots + a_1k^5 = a_1(1 + k + k^2 + \dots + k^5)$.
 Assim, IV é correta e II é incorreta ($a_6 \neq 10^5$).
- Como $S_6 = \frac{a_1(k^6 - 1)}{k - 1}$, temos:
- $$10^8 = \frac{10^5 \cdot (k^6 - 1)}{k - 1} \Rightarrow \frac{k^6 - 1}{k - 1} = 1000$$
- (I) é incorreta, pois, se $k = 3$, $\frac{3^6 - 1}{3 - 1} < 1000$.
- (III) é correta, pois, se $k = 4$, $\frac{4^6 - 1}{4 - 1} > 1000$.
- Assim, devemos ter $3 < k < 4$.
- Resposta: c.

45.



$$2y + x = 32 \quad (1)$$

$$h^2 + \frac{x^2}{4} = y^2 \quad (2)$$

$$\left(\frac{x}{2}, h, y\right) \text{ P.A.} \Rightarrow h = \frac{\frac{x}{2} + y}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4h = x + 2y \quad (3)$$

$$(1) \text{ e } (3) \Rightarrow 4h = 32 \Rightarrow h = 8$$

Em (2): $8^2 + \frac{x^2}{4} = y^2$; por (3) vem: $x = 4 \cdot 8 - 2y$

$$64 + \frac{(32 - 2y)^2}{4} = y^2 \Rightarrow y = 10; AC = 10$$

Resposta: a.

Capítulo 11 Matemática comercial e financeira

Exercícios

- $0,2 \cdot 600 = 120$
 - $0,15 \cdot 840 = 126$
 - $0,6 \cdot 60 = 36$
 - $120 \div 2 = 60$
 - $123,5 \div 10 = 12,35$
 - $0,35 \cdot 400 = 140$
 - $0,27 \cdot 2500 = 675$
 - $0,42 \cdot 750 = 315$
 - $0,075 \cdot 400 = 30$
 - $0,002 \cdot 12 = 0,024$
 - $2 \cdot 800 = 1600$
 - $3,5 \cdot 75 = 262,50$
 - $0,154 \cdot 350 = 53,9$
 - $0,03 \cdot 90 = 2,7$
 - $0,005 \cdot 2100 = 10,50$
 - $0,025 \cdot 5000 = 125$
- 4% de 10 000 = $\frac{4}{100} \cdot 10\,000 = 400$

O salário naquele mês será de $400 + 400 = 800$ (reais)

Se as vendas dobrarem, teremos:

4% de 20 000 = $\frac{4}{100} \cdot 20\,000 = 800 + 400 =$
 $= 1\,200$ (reais)

3. a) $\frac{10}{40} = 0,25 = 25\%$

b) $\begin{cases} 72 \text{ — } 100\% \\ 3,6 \text{ — } x \end{cases} \Rightarrow x = 5\%$

c) $\frac{120}{150} = 0,8 = 80\%$

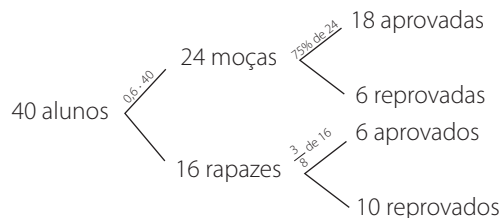
d) $\begin{cases} 400 \text{ — } 100\% \\ 136 \text{ — } x \end{cases} \Rightarrow x = 34\%$

e) $\begin{cases} 120 \text{ — } 100\% \\ \div 4 \downarrow \quad \div 4 \downarrow \\ 30 \text{ — } 25\% \end{cases} \Rightarrow 150 \text{ — } 125\%$

4. $\frac{1}{10} = 10\%$; $10\% + 30\% + 35\% = 75\%$ (gastos). Desse modo, a quantia que sobra equivale a 25% do seu salário:

$\begin{cases} \text{R\$ } 300,00 \text{ — } 25\% \\ x \text{ — } 100\% \end{cases} \Rightarrow x = 1\,200 \text{ reais}$

5.



a) $6 + 10 = 16$

b) $40 - 16 = 24$ foram aprovados; $\frac{24}{40} = 0,6 = 60\%$

6. ■ O número total de entrevistados é:

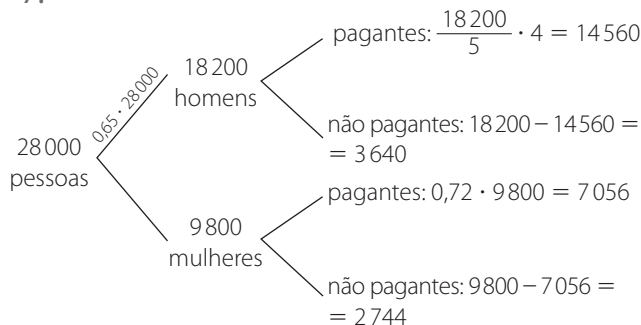
$225 + 96 + 72 + 87 = 480$

■ O número de pessoas que aprovam a avaliação do governo é: $225 + 96 = 321$

A porcentagem pedida é:

$\frac{321}{480} = 0,66875 = 66,875\%$

7.



O total de pagantes é $14\,560 + 7\,056 = 21\,616$ e o per-

centual pedido é $\frac{21\,616}{28\,000} = 0,772 = 77,2\%$

8. $\begin{cases} 8 \text{ dias — } 40\% \\ n \text{ — } 100\% \end{cases} \Rightarrow 40n = 800 \Rightarrow n = 20 \text{ dias}$

9. Seja x o número de páginas do livro

a) $0,4x + 76 = \frac{2}{3}x \Rightarrow 1,2x + 228 = 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 285$ páginas

b) $0,4 \cdot 285 = 114$ páginas

10. a) De cada 7 pessoas, 3 são homens

Daí: $\frac{3}{7} = \frac{x}{105} \Rightarrow x = 45$; $\frac{45}{105} \cong 0,4285 \cong 42,58\%$

b) 45 homens $\begin{cases} \text{fumantes: } \frac{2}{9} \cdot 45 = 10 \\ \text{não fumantes: 35} \end{cases}$

60 homens $\begin{cases} \text{fumantes: } \frac{1}{4} \cdot 60 = 15 \\ \text{não fumantes: 45} \end{cases}$

Total de fumantes: $10 + 15 = 25$;

$\frac{25}{105} \cong 0,2381 \cong 23,81\%$

c) $\frac{15}{60} = \frac{1}{4} = 25\%$

d) $\frac{10}{105} \cong 0,0952 \cong 9,52\%$

11. x : nº total do rebanho

$0,025 \cdot x$: nº de animais atingidos pelo vírus

$0,28 \cdot 0,025 \cdot x = 0,007x$: nº de animais que morreram

O percentual pedido é $\frac{0,007x}{x} = 0,007$ ou $0,7\%$.

12. a) Total de turistas: 25

paulistas: $\frac{20}{25} = \frac{80}{100} = 80\%$

cariocas: $\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\%$

mineiros: $100\% - (80\% + 16\%) = 4\%$

b) Seja n o número de cariocas que se integrarão à excursão.

Podemos fazer:

$\begin{cases} 25 + n \text{ — } 100\% \\ 4 + n \text{ — } 30\% \end{cases}$

$\frac{25 + n}{4 + n} = \frac{100}{30} \Rightarrow 75 + 3n = 40 + 10n \Rightarrow$

$\Rightarrow 7n = 35 \Rightarrow n = 5$

13. 1,2 kg $\begin{cases} \text{ouro: } 0,48 \cdot 1,2 = 0,576 \text{ kg} = 576 \text{ g} \\ \text{prata: } 1\,200 - 576 = 624 \text{ g} \end{cases}$

Com a retirada de prata, temos:

$\begin{cases} 576 \text{ g (ouro) — } 60\% \\ x \text{ — } 100\% \end{cases} \Rightarrow x = 960 \text{ g}$

Assim, a quantidade de prata retirada é:

$1\,200 \text{ g} - 960 \text{ g} = 240 \text{ g}$.

14. a) $\frac{65}{80} = 0,8125 \Rightarrow 81,25\%$

b) Seja x o número de arremessos (e acertos) adicionais; devemos ter:

$$\frac{65 + x}{80 + x} = 0,9 \Rightarrow 72 + 0,9x = 65 + x$$

$$7 = 0,1x \Rightarrow x = 70$$

15. mistura inicial: 120 litros $\begin{cases} 0,7 \cdot 120 = 84 \text{ l (gasolina)} \\ 36 \text{ l (álcool)} \end{cases}$

quantidade retirada: 30 l $\begin{cases} 0,7 \cdot 30 = 21 \text{ l (gasolina)} \\ 9 \text{ l (álcool)} \end{cases}$

nova composição: $\begin{cases} \text{gasolina: } 84 \text{ l} - 21 \text{ l} = 63 \text{ l} \\ \text{álcool: } 36 \text{ l} - 9 \text{ l} + 25 \text{ l} = 52 \text{ l} \\ \text{água: } 5 \text{ l} \end{cases}$

O percentual de álcool é:

$$\frac{52}{63 + 52 + 5} \cong 0,433... (43,3\%)$$

16. a) Miguel: $\frac{800}{5000} = \frac{4}{25}$

Mônica: $\frac{240}{1200} = \frac{1}{5}$

b) Miguel: $\frac{16}{100} = 16\%$

Mônica: $\frac{20}{100} = 20\%$

Mônica obteve o maior rendimento percentual.

17. $\underbrace{0,85}_{85\%} \cdot 48 = 40,80$ (reais)

18. a) $40 \cdot 1,12 = 44,80$ (reais)

b) $150 \cdot 1,12 = 168,00$ (reais)

19. $1,08 \cdot 280 = 302,40$ (reais)

20. a) $1,28 - 7,8\% \cdot 1,28 \cong 1,18$ (real)

b) $1480 + 11,3\% \cdot 1480 \cong 1647,24$ (reais)

c) $2850 - 17,5\% \cdot 2850 \cong 2351,25$ (reais)

21. 1º modo: $\begin{cases} \text{aumento (em reais): } 7,00 \\ \text{aumento (percentual): } \frac{7}{25} = 0,28 = 28\% \end{cases}$

2º modo: $\begin{cases} 25 \text{ — } 100\% \\ 32 \text{ — } x \end{cases} \Rightarrow x = 128\% - 100\% = 28\%$

3º modo: $\frac{32}{25} = 1,28 = \underbrace{1}_{100\%} + \underbrace{0,28}_{28\%} \Rightarrow \text{aumento}$

22. 1º modo: $\begin{cases} \text{decrécimo (em reais): } 54 - 48 = 6 \\ \text{decrécimo (percentual): } \frac{6}{54} = \frac{1}{9} = \\ = 0,111... \cong 11,1\% \end{cases}$

2º modo: $\begin{cases} 54 \text{ — } 100\% \\ 48 \text{ — } x \end{cases} \Rightarrow x \cong 88,9\%$, isto é,

o valor a ser pago representa 88,9% do valor anterior, o que nos permite concluir que a redução percentual foi de $100 - 88,9 \cong 11,1\%$.

23. a) $\frac{0,5}{3} = 0,1666... \cong 16,6\%$ de decréscimo

b) $\frac{0,3}{2,5} = 0,12 = 12\%$ de acréscimo

c) $\frac{0,3}{2,8} \cong 0,107 = 10,7\%$ de decréscimo

24. $3 - \underbrace{\frac{25}{3} \cdot \frac{1}{100} \cdot 3}_{\frac{25}{3}\% \text{ de } 3} = 3 - \frac{25}{100} = 3 - 0,25 = 2,75$ (reais)

25. produto A: $\frac{0,10}{0,40} = \frac{1}{4} = 25\%$

produto B: $\frac{0,30}{1,50} = \frac{1}{5} = 20\%$

produto C: $\frac{0,15}{0,60} = \frac{1}{4} = 25\%$

Assim, $B < A = C$.

26. a) Seja x o salário bruto de Tânia.

Temos: $0,8x = 720 \Rightarrow x = 900$ (reais)

b) $1,054 \cdot 900 = 948,60$ (reais)

27. a) $\begin{matrix} 116\% & \text{—} & \text{R\$ } 556,80 \\ 100\% & \text{—} & x \end{matrix} \Rightarrow x = 480$ (reais)

b) $1,2 \cdot 480 = 576$ (reais)

28. a) $p + 0,38p = 1,38p$

b) $p + 0,105p = 1,105p$

c) $p - 0,03p = 0,97p$

d) $p - 0,124p = 0,876p$

e) $p + 0,1p = 1,1p$;

$1,1p + 0,2 \cdot 1,1p = 1,32p$

f) $p - 0,2p = 0,8p$;

$0,8p - 0,15 \cdot 0,8p = 0,68p$

g) $p + 0,3p = 1,3p$;

$1,3p - 0,2 \cdot 1,3p = 1,04p$

h) $p + 0,1p = 1,1p$;

$1,1p + 0,1 \cdot 1,1p = 1,21p$;

$1,21p + 0,1 \cdot 1,21p = 1,331p$

29. Vamos determinar o valor total (v) da conta, sem os 10% de acréscimo:

$$\begin{cases} 70,40 & \text{---} & 110\% \\ v & \text{---} & 100\% \end{cases} \Rightarrow v = 64 \text{ (reais)}$$

Para cada amigo, o valor seria $\frac{64}{4} = 16$ (reais)

30. Seja x o salário bruto de Cláudio, e a prestação do apartamento consome 0,3x; com o aumento de 10% passará a consumir $1,1 \cdot 0,3x = 0,33x$

a) $\frac{0,33x}{x} = 0,33$ (33%)

b) $\frac{0,33x}{1,05x} = 0,3143$ (31,43%)

c) $\frac{0,33x}{1,3x} = 0,2538$ (25,38%)

Observação: O problema também pode ser resolvido atribuindo-se um valor arbitrário para o salário de Cláudio.

31. a) $50 + 0,2 \cdot 50 = 60$;
 $60 - 0,2 \cdot 60 = 48$

O preço do produto não volta a seu valor original, beneficiando o cliente que pagou R\$ 2,00 a menos.

b) $\frac{R\$ 2,00}{R\$ 50,00} = 0,04 = 4\%$

32. a) $\frac{15}{60} = 0,25 = 25\%$ de aumento

b) $\frac{28}{168} = 0,1666... \approx 16,7\%$ de desconto

c) $\frac{0,20}{0,90} = 0,222... \approx 22,2\%$ de desconto

d) $\frac{208}{200} = 1,04 = 104\%$ de aumento

33. Valorização (em reais): $450\,000 - 120\,000 = 330\,000$

Valorização percentual: $\frac{330\,000}{120\,000} = 2,75 = 275\%$

34. Preço do produto: p

I) Valor desembolsado = $p + 0,5p = 1,5p$

Valor médio de cada unidade = $\frac{1,5p}{2} = 0,75p$

II) Valor desembolsado = $2p$

Valor médio de cada unidade = $\frac{2p}{3} \approx 0,67p$

III) Valor desembolsado = $4p$

Valor médio de cada unidade = $\frac{4p}{5} = 0,8p$

Opção mais vantajosa: II

Opção menos vantajosa: III

35. a) R\$ 4,50 por quilograma equivale a R\$ 0,45 por 100 g e, portanto, a R\$ 0,225 por 50 g.

De R\$ 0,20 a R\$ 0,225 são R\$ 0,025 de acréscimo;

percentualmente, temos: $\frac{R\$ 0,025}{R\$ 0,20} = 0,125 = 12,5\%$

- b) $14 \cdot 50 = 700$ g de pão ou 0,7 kg.

Ao preço de R\$ 4,50 o quilograma, conclui-se que ele gastou $0,7 \cdot 4,50 = 3,15$ (reais).

36. a) Sejam F e L as quantidades, em kg, adquiridas.

Temos:

$$\begin{cases} F + L = 5,5 & (-9) \\ 12 \cdot F + 9 \cdot L = 60,00 \\ -9F - 9L = -49,50 \\ \hline 12F + 9L = 60,00 \end{cases}$$

$$3F = 10,50 \Rightarrow F = 3,50 \text{ kg e } L = 2,0 \text{ kg}$$

b) $F' = 12 - \frac{100}{6} \cdot \frac{12}{100} = \frac{5 \cdot 12}{6} = 10,00$

■ $L' = 9 - 0,2 \cdot 9 = 0,8 \cdot 9 = 7,20$

■ Total gasto com lombo:
 $2,5 \cdot 7,20 = 18,00$

■ Total gasto com frango:
 $60,00 - 18,00 = 42,00$

■ Quantidade de frango comprada:
 $42 \div 10 = 4,2 \text{ kg}$

■ $x = 4\,200 - 3\,500 = 700$ (g)

37. Seja p o valor da conta anterior;

■ valor recebido: $p + 1,2p = 2,2p$

■ valor da conta após a correção: $\frac{2,2p}{2} = 1,1p$

■ acréscimo (em reais): $1,1p - p = 0,1p$

■ acréscimo percentual: $\frac{0,1p}{p} = 0,1 = 10\%$

38. a) $12 \cdot 4 + 8 \cdot 3,40 + 15 \cdot 2,00 = 105,20$ (reais)

b) $12 \cdot (1,03 \cdot 4) + 8 \cdot (0,95 \cdot 3,40) + 15 \cdot (1,06 \cdot 2,00) = 12 \cdot 4,12 + 8 \cdot 3,23 + 15 \cdot 2,12 = 107,08$ (reais)

Varição percentual:

$$\frac{107,08 - 105,20}{105,20} = \frac{1,88}{105,20} \approx 0,0178 \approx 1,78\%$$

39. a) Seja p o valor original do ingresso e n o número de ingressos vendidos. A receita é $p \cdot n$.

Com as alterações, o valor do ingresso passou a ser $1,05p$ e o número de ingressos vendidos, $0,9 \cdot n$; a receita passou a ser $1,05p \cdot 0,9n = 0,945p \cdot n$.

Assim, a receita diminuiu $(1 - 0,945) \approx 0,055 \approx 5,5\%$

- b) Devemos ter:

$$p \cdot n = 1,05p \cdot \left(n - \frac{x}{100}n\right)$$

$$p \cdot n = 1,05p \cdot n \left(1 - \frac{x}{100}\right)$$

$$1 = 1,05 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)$$

$$1 - \frac{x}{100} = \frac{x}{1,05} \Rightarrow 1 - \frac{1}{1,05} = \frac{x}{100} \Rightarrow x \approx 4,76$$

40. a) $J = 3 \cdot 0,04 \cdot 220 = 26,40$ reais

b) $J = 12 \cdot 0,05 \cdot 540 = 324,00$ reais

c) $J = 8 \cdot 0,12 \cdot 80 = 76,80$ reais

d) $J = 24 \cdot 0,02 \cdot 490 = 235,20$ reais

41. Os juros do empréstimo são: $4 \cdot 0,06 \cdot 250 = 60$ reais.
O montante do empréstimo é: $250 + 60 = 310$ reais.

42. 1º modo: $M = 240$; $C = 200$; $n = 4$; $i = ?$

$$240 = 200 \cdot (1 + i \cdot 4) \Rightarrow 1,2 = 1 + 4i \Rightarrow 0,2 = 4i \Rightarrow i = 0,05 \Rightarrow 5\% \text{ ao mês}$$

2º modo: Os juros recebidos são de 40,00 reais; percentualmente, temos: $\frac{40}{200} = 0,2 = 20\%$ de juros no período de 4 meses. Como temos juros simples, concluímos que a taxa mensal de juros é: $\frac{20\%}{4} = 5\%$.

43. a) Em regime de juros simples, a taxa de 48% ao ano equivale a 4% ao mês ($4 \cdot 12 = 48$).

$$J = 5 \cdot 0,04 \cdot 400 = 80 \Rightarrow M = 400 + 80 = 480 \text{ reais}$$

b) Em regime de juros simples, a taxa de 72% ao semestre equivale a $\frac{72}{6} = 12\%$ ao mês.

$$J = 8 \cdot 0,12 \cdot 180 = 172,80 \Rightarrow M = 180 + 172,80 = 352,80 \text{ reais}$$

c) $J = \frac{90}{3 \text{ meses} = 90 \text{ dias}} \cdot 0,0025 \cdot 5000 = 1125 \Rightarrow$

$$\Rightarrow M = 5000 + 1125 = 6125 \text{ reais}$$

44. multa: $0,02 \cdot 48 = 0,96$

juros: $4 \cdot \frac{0,033}{100} \cdot 48 = 0,063$
4 dias

total de acréscimos:
R\$ 1,02

Na outra situação: $J = 8 \cdot 0,00033 \cdot 48 \cong 0,127 \cong 0,13$;
total: $0,96 + 0,13 \cong 1,09$ real

45. ■ valor da multa: $0,02 \cdot 255 = 5,10$

■ juros totais cobrados: $7,14 - 5,10 = 2,04$

■ juros diários: $\frac{0,04}{100} \cdot 255 = 0,102$

■ número de dias de atraso = $\frac{2,04}{0,102} = 20$

46. a) $2C = C \cdot (1 + 0,05 \cdot n) \Rightarrow 2 = 1 + 0,05n \Rightarrow$
 $\Rightarrow n = 20$ meses

b) $3C = C \cdot (1 + 0,05 \cdot n) \Rightarrow 3 = 1 + 0,05n \Rightarrow$
 $\Rightarrow n = 40$ meses

c) $10C = C \cdot (1 + 0,05 \cdot n) \Rightarrow 10 = 1 + 0,05n \Rightarrow$
 $\Rightarrow n = 180$ meses

47. $\frac{1}{6}$ de 3000 = 500; Suzi aplicou, então, um capital de 2500
Temos: $M = C \cdot (1 + i \cdot n)$
 $3000 = 2500(1 + 0,02 \cdot n) \Rightarrow n = 10$ meses

48. O capital do financiamento é $900 - 500 = 400$ reais; o montante é 500 reais; portanto, são cobrados 100 reais de juros.
Percentualmente, os juros mensais são de:
 $\frac{100}{400} = 0,25 = 25\%$

49. a) $0,95 \cdot 2400 = 2280$ reais

b) Como a entrada é de 1200 reais e o valor à vista é de 2280 reais, o capital do financiamento é $2280 - 1200 = 1080$ reais (isto é, se não houvesse cobrança de juros, depois de um mês Lia deveria pagar 1080 reais). Como o valor da 2ª parcela é de 1200 reais, conclui-se que a loja embute $1200 - 1080 = 120$ reais de juros, que percentualmente correspondem a
 $\frac{120}{1080} = 0,1111 \dots = 11,11\% \text{ a.m.}$

50. a) capital do financiamento: $1500 - 800 = 700$
montante do financiamento: 800
juros: 100

taxa de juros: $\frac{100}{700} \cong 0,1428 = 14,28\% \text{ ao mês}$

b) $14,28\% \div 2 = 7,14\% \text{ ao mês}$

51. Os juros da dívida são $1,35x - x = 0,35x$; em porcentagem, temos $\frac{0,35x}{x} = 35\%$. Como a dívida se estendeu por 10 meses, os juros simples, ao mês, são $35 \div 10 = 3,5\%$.

52. x: capital

$$J_1 = 18 \cdot 0,02 \cdot 0,7x = 0,252x$$

$$J_2 = 4 \cdot 0,18 \cdot 0,3x = 0,216x$$

Como $J_1 + J_2 = 14040$, vem: $0,252x + 0,216x = 14040 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \frac{14040}{0,468} = 30000$ reais

53. a) $M = 300 \cdot (1 + 0,02)^4 = 300 \cdot 1,02^4 = 324,73$ (reais)
 $J = M - C = 324,73 - 300 = 24,73$ (reais)

b) $M = 2500 \cdot (1 + 0,05)^{12} = 2500 \cdot (1,05)^{12} = 4489,64$ (reais)
 $J = M - C = 4489,64 - 2500 = 1989,64$ (reais)

c) $M = 100 \cdot (1 + 0,16)^3 = 100 \cdot (1,16)^3 = 156,09$ (reais)
 $J = M - C = 156,09 - 100 = 56,09$ (reais)

54. a) $M = C \cdot (1 + i)^n = 480 \cdot (1 + 0,01)^{12} = 480 \cdot 1,01^{12} \cong 540,88$ (reais)

b) $M = 480 \cdot (1 + 0,02)^{12} = 480 \cdot 1,02^{12} \cong 608,76$ (reais)

55. $864 = C \cdot (1 + 0,2)^3 \Rightarrow C = \frac{864}{1,2^3} = \frac{864}{1,728} = 500$ (reais)

56. a) $M_5 = 5000 \cdot (1,1)^5 = 5000 \cdot 1,6 = 8000$ reais
 $M_{10} = 5000 \cdot 1,1^{10} = 5000 \cdot (1,1^5)^2 = 5000 \cdot 1,6^2 = 12800$ reais

b) $8000 - 5000 = 3000$

$\frac{3000}{5000} = 0,6 = 60\%$ no período de 5 anos

c) $20000 = 5000 \cdot 1,1^n \Rightarrow 4 = 1,1^n \Rightarrow \log 4 = \log 1,1^n \Rightarrow \log 4 = n \cdot \log 1,1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow n = \frac{\log 4}{\log 1,1} = \frac{2 \cdot \log 2}{\log \left(\frac{11}{10}\right)} = \frac{2 \cdot 0,30}{\log 11 - \log 10} =$
 $= \frac{0,60}{1,04 - 1} = \frac{0,60}{0,04} = 15$ anos

57. a) $x \cdot (1 + 0,025)^8 = 500 \Rightarrow x = \frac{500}{1,025^8} \cong 410,37;$

o inteiro mais próximo é 410.

b) $M = 410 \cdot (1 + 0,025 \cdot 8) = 492$ reais

58. $M = C \cdot (1 + i)^n \Rightarrow 10368 = 5000 \cdot (1 + i)^4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2,0736 = (1 + i)^4$

$\frac{20736}{10000} = (1 + i)^4 = \left(\frac{12}{10}\right)^4 = (1 + i)^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + i = 1,2 \Rightarrow i = 0,2$ ou 20% a.m.

59. a) $242 = 200 \cdot (1 + i)^2$

$1,21 = (1 + i)^2 \Rightarrow 1 + i = \pm \sqrt{1,21}$

$1 + i = \pm 1,1 \xrightarrow{i > 0} i = 0,1 = 10\%$ ao mês

b) $M = 200 \cdot 1,1^6 = 354,31$ reais

60. $i = 100\% = 1$

$v = v_0 \cdot (1 + 1)^n = v_0 \cdot 2^n$

Devemos determinar $n \in \mathbb{N}$ tal que

$\cancel{y}_0 \cdot 2^n = 100 \cdot \cancel{y}_0 \Rightarrow 2^n = 100$

■ Se $n = 6, 2^n = 64 < 100$

■ Se $n = 7, 2^n = 128 > 100$. Assim, 7 é o menor inteiro procurado.

61. a) Banco A: $M = 40000 \cdot 1,05^{20} = 40000 \cdot (1,05^{10})^2 = 40000 \cdot 1,63^2 = 106276$

Banco B: $M = 40000 \cdot 1,1^{10} = 40000 \cdot 2,6 = 104000$

No Banco B o desembolso é menor.

b) $106276 - 104000 = 2276$ reais

62. a) $200 \cdot 1,25 = 250;$

$250 \cdot 1,08 = 270$ reais

b) $\frac{70}{200} = 0,35 = 35\%$ em dois anos

63. $3000 = 1000 \cdot (1 + 0,08)^n \Rightarrow 3 = 1,08^n \Rightarrow \log 3 =$
 $= n \cdot \log 1,08 \Rightarrow n = \frac{\log 3}{\log 1,08} = \frac{0,48}{\log 108 - \log 100} =$

$= \frac{0,48}{\log(2^2 \cdot 3^3) - 2} = \frac{0,48}{2 \log 2 + 3 \log 3 - 2} =$

$n = \frac{0,48}{2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,48 - 2} = \frac{0,48}{0,04} = 12$ meses

64. a) $2C = C(1,2)^n \Rightarrow 1,2^n = 2 \Rightarrow \log 1,2^n = \log 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow n \cdot \log 1,2 = \log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 1,2} = \frac{\log 2}{\log 12 - \log 10} =$

$= \frac{\log 2}{2 \log 2 + \log 3 - 1} = \frac{0,3}{2 \cdot 0,3 + 0,48 - 1} =$

$= \frac{0,3}{0,08} = 3,75$ anos

b) $3 = 1,2^n \Rightarrow \log 3 = n \cdot \log 1,2 \xrightarrow{(a)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,48 = n \cdot 0,08 \Rightarrow n = 6$ anos

c) $5 = 1,2^n \Rightarrow \log 5 = n \cdot \log 1,2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 10 - \log 2 = n \cdot 0,08 \Rightarrow 1 - 0,3 = n \cdot 0,08 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \frac{0,7}{0,08} \Rightarrow n = 8,75$ anos

d) $M = C + 8C = 9C$, daí: $9C = C(1,2)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow 1,2^n = 9 \Rightarrow n = \frac{\log 9}{\log 1,2} \Rightarrow n = \frac{2 \cdot 0,48}{0,08} =$

$= 12$ anos

65. a) $5000 \cdot 1,35 \cdot 1,20 \cdot 0,7 = 5670$ reais

b) $\frac{670}{5000} = 0,134 = 13,4\%$

66. a) Ao final de janeiro: $1,01 \cdot 100 = 101;$

ao final de fevereiro: $1,025 \cdot 101 \cong 103,52;$

ao final de março: $1,015 \cdot 103,52 = 105,07;$

ao final de abril: $1,01 \cdot 105,07 = 106,12;$

ao final de maio: $1,03 \cdot 106,12 \cong 109,30$ reais

b) $\frac{109,3}{100} = 1,093 - 1 = 0,093 = 9,3\%$

67. ■ Após dez anos, o montante da dívida da empresa era:

$80000 \cdot (1 + 0,1)^{10} = 80000 \cdot 1,1^{10} =$

$= 80000 \cdot 1,1^5 \cdot 1,1^5 = 80000 \cdot 1,6 \cdot 1,6 = 204800$ reais

■ Com o pagamento de 80000 reais, a dívida passou a ser:

$204800 - 80000 = 124800$ reais

■ Após cinco anos, o valor da dívida será:

$124800 \cdot (1 + 0,04)^5$

$124800 \cdot 1,04^5 = 149760$ reais

68. capital: x

montante: 1,44x

n = 2

$$1,44x = x \cdot (1 + i)^2 \Rightarrow 1,44 = (1 + i)^2 = 1 + i = 1,2 \Rightarrow i = 0,2$$

20% ao ano

69. capital: x

montante: 1,47x

i = 0,11

$$1,47x = x \cdot (1 + 0,11)^n \Rightarrow 1,47 = 1,11^n \Rightarrow \log 1,47 = n \cdot \log 1,11$$

$$n = \frac{\log 1,47}{\log 1,11} = \frac{\log \left(\frac{147}{100} \right)}{\log \left(\frac{111}{100} \right)} = \frac{\log 147 - \log 100}{\log 111 - \log 100} =$$

$$= \frac{2,17 - 2}{2,05 - 2} = \frac{0,17}{0,05}$$

n = 3,4 anos = 40,8 meses

Logo, o menor número inteiro é 41.

70. a) Juros simples:

$$0,1 \cdot 600 = 60 \text{ reais por ano}$$

I: (660, 720, 780, 840, 900)

Juros compostos:

$$1,1 \cdot 600 = 660;$$

$$1,1 \cdot 660 = 726;$$

$$1,1 \cdot 726 = 798,60;$$

$$1,1 \cdot 798,60 = 878,46;$$

$$1,1 \cdot 878,46 = 966,31$$

II: (660; 726; 798,60; 878,46; 966,31)

b) I: P.A.; r = 60

II: P.G.; q = 1,1

c) 966,31 - 900 = 66,31 reais

71. a) n = 0 \Rightarrow 400 reais

$$b) a_1 = 400 + 20 = 420$$

$$a_2 = 400 + 40 = 440$$

$$a_3 = 400 + 60 = 460$$

\vdots

(420, 440, 460, ...) é uma P.A. Logo, o regime é o de juros simples.

Como $420 - 400 = 20$ e $\frac{20}{400} = 0,05$, concluímos que a taxa é de 5% ao mês.

$$c) a_{12} = 400 + 20 \cdot 12 = 640 \text{ reais}$$

72. a) x = 0 \Rightarrow f(0) = 6000; 6000 reais

$$b) f(1) = 6000 \cdot 1,2 = 7200$$

$$f(2) = 6000 \cdot 1,2^2 = 8640$$

$$f(3) = 6000 \cdot 1,2^3 = 10368$$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

(7 200, 8 640, 10 368, ...) é uma P.G. de razão q = 1,2.

Logo, o regime é de juros compostos.

Como $1,2 = 1 + 0,2$, concluímos que a taxa de juros anual é de 20%.

c) f(4) = 6000 · 1,2⁴ = 6000 · 2,0736 = 12 441,60; logo, ela já terá dobrado de valor.

73. a) Juros simples; observe que o acréscimo anual é constante: 4 500 reais.

b) O capital é de R\$ 15 000,00.

Em um ano, os juros são de R\$ 4 500,00; percentualmente, eles representam $\frac{4500}{15000} = 30\%$ de juros ao ano.

c) Juros totais pagos: 8 · 4 500 = 36 000 reais.

O montante é 15 000 + 36 000 = 51 000 reais.

Desafio

Observe, no quadro abaixo, as possibilidades de pedido dos três amigos:

	Ari	Bruna	Carlos
1ª	água	água	água
2ª	água	água	suco
3ª	água	suco	água
4ª	água	suco	suco
5ª	suco	suco	suco
6ª	suco	suco	água
7ª	suco	água	suco
8ª	suco	água	água

- A 3ª possibilidade não ocorre pela primeira proposição do enunciado;
- a 5ª possibilidade não ocorre também pela primeira proposição do enunciado;
- a 6ª possibilidade não ocorre pela terceira proposição do enunciado;
- a 7ª possibilidade não ocorre também pela terceira proposição do enunciado;
- a 8ª possibilidade não ocorre pela segunda proposição do enunciado.

Restam apenas a 1ª, 2ª e 4ª.

Como a 4ª proposição do enunciado diz que apenas um deles pede sempre a mesma bebida, concluímos que é o Ari e a bebida é água.

Ari	Bruna	Carlos
água	água	água
água	água	suco
água	suco	suco

Exercícios complementares

1. Sejam as quantidades, em litros:

x : achocolatado A e $4 - x$: achocolatado B

- As quantidades de gordura encontradas em A e B são, respectivamente: $0,03x$ e $0,07(4 - x)$
- Na mistura final, a quantidade de gordura é 4% de 4 ℓ , isto é, $0,04 \cdot 4 = 0,16$.

Dai:

$$0,03x + 0,07 \cdot (4 - x) = 0,16$$

$$0,03x + 0,28 - 0,07x = 0,16 \Rightarrow 0,04x = 0,12 \Rightarrow x = 3$$

Assim, devemos misturar 3 ℓ de A e 1 ℓ de B.

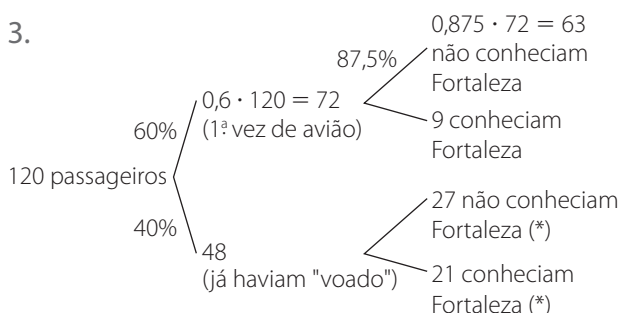
2. a) De cada 7 participantes, 3 são homens;

$$\frac{3}{7} \cong 0,4285 = 42,85\%$$

- b) ■ Se x é o número total de participantes, temos que o número de homens é $\frac{3}{7}x$ e o de mulheres é $\frac{4}{7}x$;

- O número de aprovados homens é $0,14 \cdot \frac{3x}{7} = 0,06x$ e o de aprovados do sexo feminino é $0,35 \cdot \frac{4x}{7} = 0,2x$; o número total de aprovados é $0,06x + 0,2x = 0,26x$ e a porcentagem pedida é $\frac{0,26x}{x} = 0,26 = 26\%$

3.



Explicação de (*):

25% de 120 = 30 passageiros já conheciam Fortaleza, dos quais 9 deles nunca haviam viajado de avião e 21, já.

Logo, a resposta é $\frac{21}{120} = 0,175 = 17,5\%$.

4.

fruta fresca

 $\xrightarrow{\text{desidratação}}$

fruta desidratada

- Em 400 g de fruta desidratada, encontramos $0,3 \cdot 400 = 120$ g de água. O restante ($400 - 120 = 280$ g) é polpa.
- No processo de desidratação, a massa de "polpa" permanece constante. Assim, a fruta fresca continha inicialmente 280 g de polpa, que representavam 20% da massa total.

$$\text{Assim: } \begin{cases} 280 \text{ g} & \text{--- 20\%} \\ x & \text{--- 100\%} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1\,400 \text{ g} = 1,4 \text{ kg de frutas frescas}$$

5. ■ preço de custo: x

■ meta do lojista: preço de venda a $1,3x$

■ preço de venda anunciado: $1,48x$

- a) desconto: $1,48x - 1,3x = 0,18x$;

$$\text{em \%: } \frac{0,18x}{1,48x} = \frac{0,18}{1,48} \cong 0,1216 \text{ (12,16\%)}$$

- b) desconto: $1,48x - x = 0,48x$;

$$\text{em \%: } \frac{0,48x}{1,48x} = \frac{0,48}{1,48} \cong 0,3243 \text{ (32,43\%)}$$

6. situação inicial $\xrightarrow{\quad}$ após 20 anos

$$\text{PIB: } x \xrightarrow{+r\%} x + \frac{r}{100}x = x \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

população

$$\text{economicamente ativa: } y \xrightarrow{+20\%} 1,2y$$

$$\text{renda per capita: } \frac{x}{y} \xrightarrow{+50\%} 1,5 \frac{x}{y}$$

$$\text{Devemos ter: } 1,5 \frac{x}{y} = \frac{x \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)}{1,2y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,5 \cdot 1,2 = 1 + \frac{r}{100} \Rightarrow 1,8 = 1 + \frac{r}{100} \Rightarrow r = 80$$

Assim, o PIB deverá aumentar 80% em relação ao valor atual.

7. a) açúcar: $\frac{428}{214} = 2$

$$\text{margarina: } \frac{259}{112} = 2,3125 \text{ (maior razão)}$$

$$\text{leite: } \frac{44}{25} = 1,76$$

$$\text{achocolatado: } \frac{37}{33} \cong 1,12$$

$$\text{leite condensado: } \frac{404}{275} \cong 1,47$$

- b) $44 - 25 = 19$

$$\frac{19}{44} = 0,4318 \text{ (aproximadamente 43,2\%)}$$

- c) Em um bolo *light*, o total de calorias é:

$$214 + 112 + 25 + 33 + 275 = 659$$

Em sete receitas são:

$$7 \cdot 659 = 4\,613 \text{ kcal. Em um bolo tradicional, o total de}$$

$$\text{calorias é: } 428 + 259 + 44 + 37 + 404 = 1\,172 \text{ kcal.}$$

O número de receitas de bolo tradicional é, portanto,

$$\frac{4\,613}{1\,172} \cong 3,94 \text{ (4 receitas).}$$

8. a)

Produto	A	B
Preço de custo	R\$ 150,00	R\$ 200,00
Preço de venda	R\$ 180,00	R\$ 280,00
Lucro por unidade	R\$ 30,00	R\$ 80,00

- número de unidades comercializadas do produto A: $0,7 \cdot x$
- número de unidades comercializadas do produto B: $0,3 \cdot x$

Daí:

$$30 \cdot 0,7x + 80 \cdot 0,3x = 90\,000$$

$$21x + 24x = 90\,000 \Rightarrow x = 2\,000$$

- b) ■ novo preço de venda de A: $0,9 \cdot 180 = 162$ reais
- novo preço de venda de B: $0,9 \cdot 280 = 252$ reais
 - lucro unitário de A: $162 - 150 = 12$ reais
 - lucro unitário de B: $252 - 200 = 52$ reais

Daí o lucro obtido seria:

$$12 \cdot 0,7 \cdot 2\,000 + 52 \cdot 0,3 \cdot 2\,000 = 16\,800 + 31\,200 = 48\,000 \text{ reais}$$

9. a) Se um trabalhador tinha salário x no início do ano, em março ele passaria a $1,25x$. O valor prometido pela empresa era de $1,36x$. Assim, em setembro, deve ser dado um aumento de $1,36x - 1,25x = 0,11x$ em relação ao salário vigente, que é $1,25x$; percentualmente, temos:

$$\frac{0,11x}{1,25x} = 0,088 = 8,8\% \text{ de aumento.}$$

b) início: x

$$\left. \begin{array}{l} \text{março: } 1,125x \\ \text{setembro: } 1,36x \end{array} \right\} 1,36x - 1,125x = 0,235x$$

$$\text{Percentualmente, temos: } \frac{0,235x}{1,125x} = 0,2088 = 20,88\%.$$

10. ■ produto final: 200 kg de ração, dos quais $0,22 \cdot 200 = 44$ kg de proteína;

- em 120 kg de milho, encontramos $0,1 \cdot 120 = 12$ kg de proteína.

Assim, são necessários ainda $44 - 12 = 32$ kg de proteína provenientes de $200 - 120 = 80$ kg de farelo de algodão e de soja.

Sejam x e y as quantidades respectivas de farelo de algodão e soja que serão usadas. Temos:

$$\begin{cases} x + y = 80 & \textcircled{1} \\ 0,28x + 0,44y = 32 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\text{De } \textcircled{1} \text{ vem: } y = 80 - x$$

$$\text{Em } \textcircled{2} \text{ vem: } 0,28x + 0,44 \cdot (80 - x) = 32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,16x = 3,2 \Rightarrow x = 20$$

Assim, são necessários 20 kg de farelo de algodão e 60 kg de farelo de soja.

11. a) Seja p o preço da camisa na loja B e $p + 5$ o preço da camisa na loja A.

Ao comprar duas camisas, dona Laura pagaria:

$$\text{■ loja A: } \underbrace{p + 5}_{1^\circ \text{ peça}} + \underbrace{0,6 \cdot (p + 5)}_{\substack{\text{desconto} \\ \text{de 40\% na} \\ 2^\circ \text{ peça}}} = p + 5 + 0,6p + 3 = 1,6p + 8$$

$$\text{■ loja B: } \underbrace{0,9 \cdot 2p}_{\substack{\text{desconto} \\ \text{de 10\%}}} = 1,8p$$

Temos:

$$\text{loja B: } 1,6p + 8 = 1,8p \Rightarrow 8 = 0,2p \Rightarrow p = 40 \text{ reais}$$

$$\text{loja A: } p + 5 = 40 + 5 = 45 \text{ reais}$$

- b) Seja $r\%$ o desconto pedido. Temos:

$$\left(1 - \frac{r}{100}\right) \cdot (p + 5) = 0,9p$$

$$p + 5 - \frac{r}{100} \cdot p - \frac{5r}{100} = 0,9p$$

Como $p = 40$, vem:

$$40 + 5 - \frac{r}{100} \cdot 40 - \frac{5r}{100} = 0,9 \cdot 40, \text{ isto é:}$$

$$9 = \frac{5r}{100} + \frac{40r}{100} \Rightarrow \frac{45r}{100} = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = 20 \text{ (20\% de desconto)}$$

12. a) ■ Para imprimir 1 cópia usando-se o cartucho preto
BR gasta-se $\frac{90}{810} = \frac{1}{9} \cong 0,11$ real; com o cartucho

$$\text{preto AR gasta-se } \frac{150}{2400} = \frac{1}{16} = 0,06 \text{ real.}$$

Assim, o cartucho preto AR é a melhor opção.

- Para imprimir 1 cópia usando-se o cartucho colorido BR gasta-se $\frac{120}{600} = \frac{1}{5} = 0,20$ real; com o cartucho

$$\text{colorido AR gasta-se } \frac{270}{1200} = \frac{9}{40} = 0,225 \text{ real.}$$

O cartucho colorido BR é a melhor opção.

- b) cópias coloridas: $0,2 \cdot 12\,000 = 2\,400$; cópias em preto e branco: $12\,000 - 2\,400 = 9\,600$

- gasto mensal com a impressão:

$$2\,400 \cdot \frac{9}{40} + 9\,600 \cdot \frac{1}{16} = 540 + 600 = 1\,140 \text{ reais}$$

- número de resmas usadas: $\frac{12\,000}{500} = 24$; custo das resmas: $24 \cdot 10 = 240$ reais

$$\text{Por fim, o gasto total da empresa é } 1\,140 + 240 = 1\,380 \text{ reais.}$$

13. início \longrightarrow parada
 n desembarcaram: $0,2n$
ficaram: $0,8n$
entraram: $0,2 \cdot 0,8n = 0,16n$

Daí:

$$0,8n + 0,16n = 120$$

$$0,96n = 120$$

$$n = 125$$

14. a) vendas em 2010: x unidades
vendas em 2011: $x - 0,1x = 0,9x$ unidades
vendas em 2012: $0,9x - 0,1 \cdot 0,9x = 0,81x$ unidades
 $x + 0,9x + 0,81x = 9485 \Rightarrow 2,71x = 9485 \Rightarrow x = 3500$
O número de livros vendidos em 2011 foi:
 $0,9 \cdot 3500 = 3150$

b) vendas em 2012: $0,81 \cdot 3500 = 2835$

$$\text{Daí: } \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot 2835 = 3500 \Rightarrow 1 + \frac{x}{100} \cong \\ \cong 1,2345 \Rightarrow x = 23,45\% \text{ de aumento}$$

15. a) ■ nº de litros de álcool usados: $\frac{18000}{6} = 3000 \ell$
■ valor gasto: $3000 \cdot R\$ 1,70 = R\$ 5100,00$
■ nº de litros de gasolina que poderiam ser adquiridos: $\frac{5100}{2,7} = \frac{17000}{9} \ell$ (ou $1888,8 \ell$)
■ nº de km rodados com essa quantidade de litros: $\frac{17000}{9} \cdot 9 = 17000 \text{ km}$
Assim, ele rodaria $18000 \text{ km} - 17000 \text{ km} = 1000 \text{ km}$ a menos, o que representa uma redução percentual de $\frac{1000}{18000} \cong 0,055 = 5,5\%$

b) Devemos ter:

$$\frac{5100}{x} \cdot 9 = 18000, \text{ sendo } x \text{ o novo preço médio do litro da gasolina.}$$

Daí:

$$\frac{5100}{x} = 2000 \Rightarrow x = 2,55$$

O preço médio do litro da gasolina deveria ser R\$ 2,55, em vez de R\$ 2,70; uma redução de R\$ 0,15;

percentualmente, teríamos: $\frac{0,15}{2,70} \cong 0,055 = 5,5\%$.

16. Opção A

$$M = 20000 \cdot 1,15^6 = 20000 \cdot 2,31 = 46200,00$$

Opção B

- $M = 20000 \cdot 1,2^6 = 20000 \cdot 2,98 = 59600$ reais
- Rendimento: $59600 - 20000 = 39600$ reais;
imposto sobre o rendimento: $0,22 \cdot 39600 = 8712$ reais (*)
- Taxas administrativas: 1% de $59600 = 596$ reais
- Valor líquido ao final dos 6 anos:
 $59600 - (8712 + 596) = 50292$ reais

Opção C

- $M = 20000 \cdot (1,015)^{72} = 20000 \cdot (1,015^{36})^2$
 $M = 20000 \cdot 1,71^2 = 58482$ reais
- Imposto = $0,15 \cdot 58482 = 8772,30$ reais
- Valor líquido ao final de 6 anos: $58482 - 8772,30 = 49709,7$

Melhor opção: B

Pior opção: A

$$17. \begin{cases} C = 5 \\ M = 5 + 35 = 40 \\ n = 3 \end{cases}$$

$$40 = 5 \cdot (1 + i)^3$$

$$8 = (1 + i)^3$$

$$1 + i = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$i = 1 \text{ (100\% ao ano)}$$

18. a) preço de custo: c

■ preço na vitrine: $1,5c$

■ seja $d\%$ o desconto que o lojista dará no preço da vitrine. Temos:

$$\left(1 - \frac{d}{100}\right) \cdot 1,5c = 1,2c$$

↑
20% de lucro sobre o custo

$$1 - \frac{d}{100} = \frac{1,2}{1,5} \Rightarrow 1 - \frac{d}{100} = 0,8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,2 = \frac{d}{100} \Rightarrow d = 20; 20\% \text{ de desconto}$$

b) Aplicando juros compostos de 10% ao mês, por 2 meses, sobre o valor da vitrine ($1,5 \cdot c$) vem:

$$1,5c \cdot (1 + 0,1)^2 = 1,5c \cdot 1,21 = 1,815c$$

O lucro é $1,815c - c = 0,815c$;

$$\frac{L}{c} = \frac{0,815c}{c} = 0,815 = 81,5\%$$

19. a) A sequência, a partir do capital é:

(600; 672; 752,64; 842,96; ...)

Trata-se de uma P.G. de razão $\frac{672}{600} = 1,12$

A dívida em maio era de, aproximadamente, $842,96 \cdot 1,12 = 944,16$ reais. (V)

$$b) q = 1,12 = \frac{672}{600} = \frac{752,64}{672} = \frac{842,96}{752,64} \text{ (F)}$$

c) Como $1,12 = 1 + 0,12$, concluímos que a taxa cobrada é de 12% ao mês. (V)

d) Observe:

$$\text{fevereiro: } 600 \cdot 1,12$$

$$\text{março: } 600 \cdot 1,12^2$$

$$\text{abril: } 600 \cdot 1,12^3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\text{julho: } 600 \cdot 1,12^6 \text{ (F)}$$

e) Em dezembro, o valor da dívida era de $600 \cdot 1,12^{11} \cong 600 \cdot 3,478 \cong 2086,80$.

Os juros totais pagos foram: $2086,80 - 600 = 1486,80$.

Percentualmente, temos:

$$\frac{1486,80}{600} = 2,478 = 247,8\% \text{ (V)}$$

20. a) data da aposentadoria: V_0

um ano depois:

$$V_0 - 0,05V_0 = (1 - 0,05)V_0 = 0,95V_0$$

dois anos depois:

$$0,95V_0 - 0,05 \cdot 0,95V_0 = \\ = 0,95V_0 \cdot (1 - 0,05) = 0,95^2 \cdot V_0$$

três anos depois:

$$0,95^2 \cdot V_0 - 0,05 \cdot 0,95^2 \cdot V_0 = \\ = 0,95^2 \cdot V_0 (1 - 0,05) = 0,95^3 \cdot V_0$$

\vdots

$$t \text{ anos depois: } V = 0,95^t \cdot V_0$$

b) A quantia existente após cinco anos é:

$$V(5) = 0,95^5 \cdot V_0 \cong 0,7738V_0$$

Assim, a quantia sacada é:

$$V_0 - 0,7738V_0 = 0,226V_0 \text{ (22,6\%)}$$

c) Devemos determinar t de modo que $V = \frac{V_0}{4}$, isto é:

$$\frac{V_0}{4} = V_0 \cdot 0,95^t \Rightarrow \frac{1}{4} = 0,95^t \Rightarrow t \cdot \ln 0,95 = \ln 0,25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 0,25}{\ln 0,95} = \frac{-1,4}{-0,05} = 28 \Rightarrow t = 28 \text{ anos}$$

21. a) ■ Daqui a n anos, o saldo em seu fundo de investimento será dado por:

$$40\,000 \cdot (1 + 0,2)^n = 40\,000 \cdot (1,2)^n$$

■ Daqui a n anos, o valor estimado do apartamento será dado por:

$$120\,000 \cdot (1 + 0,08)^n = 120\,000 \cdot (1,08)^n$$

Devemos ter:

$$40\,000 \cdot (1,2)^n = 120\,000 \cdot (1,08)^n$$

$$\frac{40\,000}{120\,000} = \frac{(1,08)^n}{(1,2)^n}$$

$$\frac{1}{3} = 0,9^n$$

$$\log \frac{1}{3} = \log 0,9^n$$

$$n = \frac{\log \frac{1}{3}}{\log 0,9}$$

$$n = \frac{\log 3^{-1}}{\log 9 - \log 10} = \frac{-\log 3}{2 \log 3 - 1} = \frac{-0,48}{-0,04}$$

$$n = 12 \text{ anos}$$

b) $40\,000 \cdot (1,2)^{12} \cong 356\,644$ (reais)

22. a) Observemos que:

$$x = 1 \Rightarrow 35 \cdot 41 = 1\,435$$

$$x = 2 \Rightarrow 35 \cdot 42 = 1\,470$$

$$x = 3 \Rightarrow 35 \cdot 43 = 1\,505$$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

(1 435, 1 470, 1 505, ...) é uma P.A. de razão 35; logo, o regime combinado foi o de **juros simples**.

$$b) 35 \cdot (40 + x) = \underbrace{1\,400}_{\text{capital}} + \underbrace{35x}_{\text{acrécimo mensal}}$$

Como $\frac{35}{1\,400} = 0,025$, conclui-se que a taxa foi de 2,5% a.m.

c) (1 435, 1 470, 1 505, 1 540, ...)

$$r = 35$$

$$d) 2\,100 = 35 \cdot (40 + x)$$

$$\frac{2\,100}{35} = 40 + x \Rightarrow 60 = 40 + x \Rightarrow x = 20 \text{ meses}$$

23. a) $t = 0 \Rightarrow F(0) = 100 \cdot 1,2^0 = 100 \cdot 1 = 100$ (reais)

$$b) F(5) = 100 \cdot 1,2^5 \cong 100 \cdot 2,488 \cong 248,80 \text{ (reais)}$$

$$c) 2\,700 = 100 \cdot 1,2^t \Rightarrow 27 = 1,2^t \Rightarrow \log 27 = \log 1,2^t \Rightarrow \\ \Rightarrow 3 \log 3 = t \cdot \log 1,2 \text{ (*)}$$

$$\text{Mas } \log 1,2 = \log \left(\frac{12}{10} \right) = \log (2^2 \cdot 3) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0,3 + 0,48 - 1 = 0,08$$

Daí em (*):

$$3 \cdot 0,48 = t \cdot 0,08 \Rightarrow 1,44 = t \cdot 0,08 \Rightarrow t = 18 \text{ meses}$$

24. a) banco A: $40\,000 \cdot 1,2^n$

$$\text{banco B: } 60\,000 \cdot 1,08^n$$

$$n = 2$$

$$\text{banco A: } 40\,000 \cdot 1,2^2 = 57\,600 \text{ reais}$$

$$\text{banco B: } 60\,000 \cdot 1,08^2 = 69\,984 \text{ reais}$$

$$\text{Dívida total: R\$ 127 584,00}$$

b) $40\,000 \cdot 1,2^n = 60\,000 \cdot 1,08^n$

$$\frac{4}{6} = \left(\frac{1,08}{1,2} \right)^n \Rightarrow \frac{2}{3} = 0,9^n$$

$$\log \frac{2}{3} = \log 0,9^n \Rightarrow \log \frac{2}{3} = n \cdot \log 0,9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log \frac{2}{3}}{\log 0,9} = \frac{\log 2 - \log 3}{\log 9 - \log 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{0,3 - 0,48}{2 \cdot 0,48 - 1} = \frac{-0,18}{-0,04} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 4,5 \text{ anos}$$

$$25. \begin{array}{l} 2400 \begin{cases} \text{Jair} \rightarrow \text{juros: } 0,02 \cdot x \cdot 3 = 0,06x \\ \quad \quad \quad (x) \\ \text{Joel} \rightarrow \text{juros: } 0,01 \cdot (2400 - x) \cdot 5 = \\ \quad \quad \quad (2400 - x) \\ \quad \quad \quad = 120 - 0,05x \end{cases} \end{array}$$

Os montantes recebidos de Jair e Joel são, respectivamente: $x + 0,06x$ e $(2400 - x) + (120 - 0,05x)$, isto é:

$$1,06x \text{ e } 2520 - 1,05x$$

$$\text{Devemos ter: } 1,06x + 2520 - 1,05x = 2530$$

$$0,01x = 10 \Rightarrow x = 1\,000$$

(R\\$ 1 000,00 a Jair e R\\$ 1 400,00 a Joel)

26. ■ 1ª parcela: x

■ capital de financiamento: $102 - x$

■ montante de financiamento (é o valor da 2ª parcela):

$$1,04(102 - x) = 106,08 - 1,04x$$

Então:

$$106,08 - 1,04x = x$$

$$106,08 = 2,04x$$

$$x = 52 \text{ (reais)}$$

O valor de cada prestação é 52 reais.

27. a) O valor presente da parcela a ser paga em 30 dias é:

$$V_p = \frac{200}{1,01^1} = 198,01$$

O valor presente da mercadoria é 200 (valor pago no ato) + 198,01 = 398,01 (reais).

$$b) V_p = \frac{p}{1,01} + \frac{p}{1,01^2} \cong 0,99p + 0,98p = 1,97p$$

$$2p - 1,97p = 0,03p; \frac{0,03p}{2p} = 0,015 \text{ (1,5\% de desconto)}$$

28. ■ O valor presente da 1ª prestação é

$$\frac{9000}{1,04^3} = \frac{9000}{1,125} = 8000.$$

■ O valor presente da 2ª prestação é

$$\frac{6580}{1,04^7} = \frac{6580}{1,316} = 5000.$$

Como o valor atual da dívida é 17 000, conclui-se que o valor presente da última prestação é
 $17000 - 8000 - 5000 = 4000$ reais.

$$\text{Daí: } 4000 = \frac{x}{1,04^{12}} \Rightarrow 4000 = \frac{x}{1,601} \Rightarrow x = 6404 \text{ reais}$$

A soma dos dígitos é: $6 + 4 + 4 = 14$.

29. Seja p o valor de cada parcela.

■ O valor presente da parcela que vence em 30 dias é:

$$\frac{p}{1+i} = \frac{p}{1+1} = \frac{p}{2}$$

■ O valor presente da parcela que vence em 60 dias é:

$$\frac{p}{(1+i)^2} = \frac{p}{(1+1)^2} = \frac{p}{4}$$

■ O valor presente da parcela que vence em 90 dias é:

$$\frac{p}{(1+i)^3} = \frac{p}{(1+1)^3} = \frac{p}{8}$$

Devemos ter:

$$\frac{p}{2} + \frac{p}{4} + \frac{p}{8} = 5 \text{ (valor da dívida hoje)}$$

$$\frac{4p + 2p + p}{8} = 5 \Rightarrow p \cong \text{R\$ } 5,71$$

30. a) Seja x o valor pago pelo apartamento. Temos:

$$1,6x = 640000 \Rightarrow x = 400000 \text{ reais}$$

$$b) \frac{76000}{400000} = 0,19 \text{ (19\% de lucro)}$$

31. antes das férias retorno

total: x

total: $x + 5$

meninos: $\frac{1}{3}x$

meninos: $\frac{1}{3}x + 5$

meninas: $\frac{2}{3}x$

meninas: $\frac{2}{3}x$

$$\text{Daí: } \frac{\frac{2}{3}x}{x+5} = 0,60 \Rightarrow 0,6x + 3 = \frac{2x}{3} \Rightarrow x = 45$$

32. ■ janeiro

energia elétrica $\begin{cases} e: \text{preço unitário} \\ x: \text{consumo} \end{cases}$

gasolina $\begin{cases} g: \text{preço unitário} \\ y: \text{consumo} \end{cases}$

$$\text{gastos} = e \cdot x + g \cdot y \quad \textcircled{1}$$

■ fevereiro

energia elétrica $\begin{cases} 0,82e: \text{preço unitário} \\ x: \text{consumo} \end{cases}$

gasolina $\begin{cases} 1,06 \cdot g: \text{preço unitário} \\ y: \text{consumo} \end{cases}$

$$\text{gastos} = 0,82e \cdot x + 1,06g \cdot y \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} = \textcircled{2} \Rightarrow ex + gy = 0,82ex + 1,06gy$$

$$0,18ex = 0,06gy$$

$$\frac{e \cdot x}{g \cdot y} = \frac{0,06}{0,18} = \frac{1}{3}$$

$$33. P_A = \frac{2}{3} \cdot x$$

$$P_B = \frac{1}{3} \cdot x$$

Com a redução de 10%, temos que o preço pago foi

$$0,9 \cdot \frac{2}{3}x = 0,6 \cdot x$$

Daí:

$$0,6x + \frac{1}{3}x = 350 \Rightarrow x = 375$$

$$\text{O cliente deixou de gastar } 0,1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 375 = 25 \text{ reais.}$$

34. Temos:

$$C \cdot (1+i)^3 = 15200 \quad \textcircled{1}$$

$$C \cdot (1+i)^4 = 17490 \quad \textcircled{2}$$

Dividindo-se $\textcircled{2}$ por $\textcircled{1}$ obtemos:

$$\frac{C \cdot (1+i)^4}{C \cdot (1+i)^3} = \frac{17490}{15200}$$

$$1+i \cong 1,1506$$

$$i \cong 0,1506 = 15,06\% \text{ ao ano}$$

O inteiro pedido é 15.

35. 1º modo:

Seja p o valor da tabela do *notebook*.

■ Pagando à vista, o *notebook* custará $0,95 \cdot p$

■ Desembolsar p reais daqui a um mês equivale a desembolsar, hoje, a quantia de $\frac{p}{1,01}$, que é o valor presente dessa prestação. Como $\frac{1}{1,01} \cong 0,99p > 0,95p$, o mais vantajoso é pagar à vista, pois o desembolso no ato é menor.

2º modo:

- Dispondo de p reais no ato da compra, o consumidor pagará 0,95 p , sobrando 0,05 p . Aplicando essa quantia a 1% a.m., ao fim de um mês ele terá $1,01 \cdot 0,05p = 0,0505p$.
- Aplicando p reais no ato da compra, ao fim de um mês o consumidor terá 1,01 p . Daí, ele pagará a prestação de p , sobrando a ele $1,01p - p = 0,01p$. Como $0,0505p > 0,01p$, vale a pena pagar à vista.

36. Em Goiás, o aumento percentual foi de $\frac{1875 - 1500}{1500} = \frac{375}{1500} = 0,25 = 25\%$.

No Brasil, teríamos um total de $1,25 \cdot 32\,800 = 41\,000$ vítimas fatais.

37. Números de hectares plantados:

2012 — 100

2013 — $1,2 \cdot 100 = 120$

2014 — $1,2^2 \cdot 100 = 1,44 \cdot 100 = 144$

2015 — $1,2^3 \cdot 100 = 1,73 \cdot 100 = 173$

2016 — $1,2^4 \cdot 100 = 2,07 \cdot 100 = 207$

2017 — $1,2^5 \cdot 100 = 2,49 \cdot 100 = 249$

2018 — $1,2^6 \cdot 100 = 2,99 \cdot 100 = 299$

2019 — $1,2^7 \cdot 100 = 3,58 \cdot 100 = 358$

a) V. $100 + 120 + 144 + 173 + 207 + 249 + 299 = 1\,292 > 1\,200$.

b) V. De 2012 a 2014 são $100 + 120 + 144 = 364$ hectares e de 2017 a 2018 são $249 + 299 = 548$ hectares.

c) V. De 2015 a 2016 são $173 + 207 = 380$ hectares; a produtividade máxima é $45 \cdot 380 = 17\,100 \text{ m}^3$ de madeira.

d) F. De 2015 a 2016 são $173 + 207 = 380$ hectares e de 2016 a 2017 são $207 + 249 = 456$ hectares.

e) V. $1,2 \cdot 358 = 429,6 > 100$.

38. a) Em $1\ell = 1\,000 \text{ mL}$ da solução de Iraci, encontramos 910 mL de álcool puro e 90 mL de água.

Adicionando água pura, o volume de álcool puro não se altera e passa a representar 70% do volume total.

Temos:

$$\begin{cases} 910 \text{ mL} \text{ — } 70\% \\ x \text{ — } 100\% \end{cases} \Rightarrow x = 1\,300 \text{ mL}$$

Desse modo, o volume de água adicionado foi de $1\,300 \text{ mL} - 1\,000 \text{ mL} = 300 \text{ mL}$ (ou $\frac{3}{10}$ de litros).

b)

$x \text{ mL}$ da solução

+

$y \text{ mL}$ de água

=

$1\,000 \text{ mL}$ a 70%

$0,91 \cdot x$: álcool puro

$0,09 \cdot x$: água

700 mL : álcool puro

300 mL : água

Devemos ter: $0,91x = 700 \Rightarrow x = \frac{700}{0,91} =$

$$= \frac{10\,000}{13} \text{ mL} = \frac{10}{13} \ell$$

Como $x + y = 1\,000 \Rightarrow y = 1\,000 - \frac{10\,000}{13} =$

$$= \frac{3\,000}{13} \text{ mL} = \frac{3}{13} \ell$$

Devemos misturar $\frac{10}{13} \ell$ da solução de Iraci com $\frac{3}{13} \ell$ de água pura.

39. (01) V. Seja b o valor total de bezerros e c o valor total de cabritos.

Temos:

$$\frac{4}{100} \cdot \frac{b}{4} + \frac{3}{100} \cdot \frac{c}{3} = 400\$000$$

$$\frac{b}{100} + \frac{c}{100} = 400\$000$$

$$b + c = 40\,000\$000$$

(02) F. $0,2 \cdot 53\$000 = 10,6\000

(04) F. Por mês, os juros são de $0,05 \cdot 800\$000 = 40\000 . Como são 6 meses de juros simples, obtemos um total de $6 \cdot 40\$000 = 240\000 .

(08) V. Com uma inflação acumulada de 700%, um produto que custava x passaria a custar $x + \frac{700}{100}x = 8x$.

Assim, devemos determinar n tal que:

$$8x = x \cdot (1 + 0,2)^n \Rightarrow 1,2^n = 8 \Rightarrow n = \frac{\log 8}{\log 1,2}$$

$$n = \frac{3 \cdot \log 2}{\log 12 - \log 10} = \frac{3 \cdot 0,301}{2 \log 2 + \log 3 - 1} =$$

$$= \frac{0,903}{2 \cdot 0,301 + 0,477 - 1}$$

$$n = \frac{0,903}{0,079} = 11,43 \approx 12 \text{ meses}$$

Assim, em 1 ano esse país terá nova moeda.

A soma é: (01) + (08) = 9.

40. ■ Com 1,6 dólar, é possível comprar 1 libra esterlina:

$$\begin{cases} 1,6 \text{ d} - 1 \text{ l} \\ x - 1\,250 \text{ l} \end{cases} \Rightarrow x = 2\,000 \text{ dólares}$$

■ Com 2 reais, é possível comprar 1 dólar:

$$\begin{cases} 2 \text{ reais} - 1 \text{ d} \\ y - 2\,000 \text{ d} \end{cases} \Rightarrow y = 4\,000 \text{ reais}$$

■ Impostos:

$$\begin{cases} \text{importação: } 0,6 \cdot 4\,000 = 2\,400 \text{ reais} \\ \text{IOF: } 0,0638 \cdot 4\,000 = 255,20 \text{ reais} \end{cases}$$

■ Valor total da compra = $4\,000 + 2\,400 + 255,20 = 6\,655,20$ reais

41. a) A primeira prestação deve ser acrescida de juros de 10%, totalizando $1,1 \cdot 132 = 145,20$. Somando com o valor da 2ª prestação, o total pedido é $132 + 145,20 = 277,20$ reais.

- b) O valor da 3ª prestação, paga antecipadamente, será
 $132 \div 1,1 = 120$ reais. Usando o item a segue o total:
 $277,20 + 120 = 397,20$ reais.
- c) 1ª prestação: $1,1^2 \cdot 132 = R\$ 159,72$
 2ª prestação: $1,1 \cdot 132 = R\$ 145,20$
 3ª prestação: $R\$ 132,00$
 Total: $R\$ 436,92$

42. a) O valor máximo do metro quadrado corresponde à ordenada do vértice da parábola. A abscissa do vértice $-\frac{b}{2a}$ determina o ano em que o valor é máximo, isto é, $t = \frac{-6}{2 \cdot (-3)} = 1$, que corresponde ao ano de 2008.

- b) 2006: ($t = -1$)

O preço médio do m^2 é $-3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 50 = 41$ centenas de reais.

Assim, o imóvel custou $100 \cdot R\$ 4100,00 = R\$ 410000,00$.

2009: ($t = 2$)

O preço do m^2 é $-3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 50 = 50$ centenas de reais.

Assim, o imóvel foi vendido por $100 \cdot R\$ 5000,00 = R\$ 500000,00$.

O lucro obtido foi de $R\$ 500000,00 - R\$ 410000,00 = R\$ 90000,00$.

CDB:

valor aplicado: $R\$ 410000,00$

montante: $410000 \cdot (1,1)^3 = R\$ 545710,00$; lucro = $R\$ 135710,00$

A diferença no lucro é: $R\$ 135710,00 - R\$ 90000,00 = R\$ 45710,00$

- c) Percentualmente, o lucro na transação foi:

$$\frac{90000}{410000} \cong 0,2195 = 21,95\%$$

Como o regime é de juros simples, fazemos $\frac{21,95}{3} \cong \cong 7,32\%$.

43. (01) V. $1,2 \cdot c = 3024$

$$c = \frac{3024}{1,2} = 2520$$

- (02) V. O montante será obtido multiplicando-se o montante anterior por uma constante.

- (04) F.

1º ano: rendimento obtido = $3024 - 2520 = 504$ reais

2º ano: rendimento obtido = $1,4 \cdot 3024 - 3024 = 1209,60$ reais

$2 \cdot 504 \neq 1209,60$

- (08) V. O montante ao final do 3º ano é $3024 \cdot 1,3^2 = 5110,56$.

- (16) F.

montante obtido ao final do 3º ano: $1,3 \cdot 1,1 \cdot 3024 = 4324,32$

montante obtido na outra situação: $1,2^2 \cdot 3024 = 4354,56$

Note que $1,3 \cdot 1,1 \cdot x \neq 1,2^2 \cdot x$.

A soma é: $(01) + (02) + (08) = 11$.

44. a) $0,9x = 45000 \Rightarrow x = 50000$ reais

- b) rendimento = $0,1 \cdot 5000 = 500$ reais;

taxa cobrada = $0,15 \cdot 500 = 75$ reais

valor líquido = $5000 + 500 - 75 = 5425$ reais

- c) Sejam:

$$\begin{cases} x: \text{valor investido em A} \\ 70000 - x: \text{valor investido em B} \end{cases}$$

Temos:

$$\underbrace{0,12 \cdot x}_{\text{lucro obtido em A}} = \underbrace{0,03 \cdot (70000 - x)}_{\text{prejuízo em B}}$$

$0,12x = 2100 - 0,03x \Rightarrow x = 14000$ reais (em A) e
 $70000 - 14000 = 56000$ reais (em B)

45. a) ■ números de cotas compradas = $\frac{150000}{1,5} = 100000$

lucro obtido por cota = $R\$ 0,60$

lucro total na transação = $100000 \cdot R\$ 0,60 = R\$ 60000,00$

- lucro obtido por João se tivesse comprado o apartamento = $0,90 \cdot R\$ 150000,00 = R\$ 135000,00$
 Assim, João teria ganhado $135 - 60 = 75$ mil reais a mais.

- b) lucro hipotético = $20000 + 135000 = 155000$

lucro por cota = $\frac{155000}{100000} = 1,55$

Assim, cada cota valeria $R\$ 1,50 + R\$ 1,55 = R\$ 3,05$.

- c) Seja i a taxa de valorização anual da cota. (i em forma decimal)

$$i \cdot 3 \cdot 1,5 \cdot 100000 = 135000$$

$$i = 0,30 \text{ (30\% ao ano)}$$

$$y = 150000 \cdot (1 + 0,3 \cdot t)$$

46. a) Seja p o valor de cada prestação.

ato da compra: pagamento = p ; saldo devedor = $= 1324 - p$

um mês após a compra: saldo devedor acrescido de juros = $1,1 \cdot (1324 - p) = 1456,40 - 1,1p$

pagamento = p

saldo devedor = $1456,4 - 1,1p - p = 1456,4 - 2,1p$

dois meses após a compra: saldo devedor acrescido de juros = $1,1 \cdot (1456,4 - 2,1p)$

pagamento = p

Então:

$$1,1 \cdot (1456,4 - 2,1p) = p \Rightarrow 3,31p = 1602,04 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 484 \text{ reais}$$

b) Seja p o valor de cada prestação.

Ato da compra: pagamento = 0; saldo devedor = 1 324

Um mês após a compra: saldo devedor acrescido de juros = $1,1 \cdot 1 324$

Pagamento = p

Saldo devedor = $1,1 \cdot 1 324 - p = 1 456,4 - p$

Dois meses após a compra: saldo devedor acrescido de juros = $1,1 \cdot (1 456,4 - p) = 1 602,04 - 1,1p$

Pagamento = p

Saldo devedor = $1 602,04 - 1,1p - p = 1 602,04 - 2,1p$

Três meses após a compra: saldo devedor acrescido de juros = $1,1 \cdot (1 602,04 - 2,1p) = 1 762,244 - 2,31p$

Pagamento = p

$p = 1 762,244 - 2,31p \Rightarrow p = 532,40$ reais

c) O valor presente da primeira prestação é igual a R\$ 529,00, pois ela é paga no ato da compra;

o valor presente da segunda prestação é $\frac{529}{1+i}$;

o valor presente da terceira prestação é $\frac{529}{(1+i)^2}$.

Dai:

$$529 + \frac{529}{1+i} + \frac{529}{(1+i)^2} = 1 389$$

$$529 \cdot \left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} \right] = 860$$

Seja $1+i = u$

$$529 \cdot \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} \right) = 860$$

$$529 \cdot \left(\frac{u+1}{u^2} \right) = 860$$

$$860u^2 - 529u - 529 = 0$$

$$\Delta = (529)^2 - 4 \cdot 860 \cdot (-529)$$

$$\Delta = 279 841 + 1 819 760$$

$$\Delta = 2 099 601$$

$$u = \frac{529 \pm 1 449}{2 \cdot 860} \Rightarrow u = 1,15$$

$$1+i = 1,15$$

$$i = 0,15 \text{ (15\% ao mês)}$$

47. (01) V.

$$\begin{aligned} & (20\% \text{ de } 10 000) + [0,05 \cdot 2 000 \cdot (6-2)] = \\ & = 2 000 + 0,05 \cdot 8 000 \\ & = 2 400 (= 0,24 \cdot 10 000) \end{aligned}$$

(02) F.

$$1^\text{a} \text{ prestação} = 2 000 + 0,05 \cdot 2 000 \cdot (6-1) = 2 500$$

$$2^\text{a} \text{ prestação} = 2 000 + 0,05 \cdot 2 000 \cdot (6-2) = 2 400$$

$$3^\text{a} \text{ prestação} = 2 000 + 0,05 \cdot 2 000 \cdot (6-3) = 2 300$$

$$M = 2 500 + 2 400 + 2 300 = 7 200$$

(04) V.

$$\begin{aligned} J &= \frac{5}{100} \cdot \frac{10 000}{2^{n-1}} = \frac{1 000 \cdot 5}{\frac{2^n}{2}} = \frac{10 000}{2^n} = \frac{125 \cdot 8}{2^n} \\ &= \frac{125 \cdot 2^3}{2^n} = 125 \cdot 2^{3-n} \end{aligned}$$

(08) V.

$$S_5 = \frac{10 000}{2^{5-1}} = 625$$

$$\text{juros} = 0,05 \cdot 625 = 31,25$$

$$\text{valor da prestação} = \underbrace{625}_{\text{pagamento integral}} + 31,25 = 656,25 \text{ reais}$$

(16) V.

Opção 1:

$$J = 0,05 \cdot 2 000 \cdot (6-1) + 0,05 \cdot 2 000 \cdot (6-2) + \dots + 0,05 \cdot 2 000 \cdot (6-5)$$

$$J = 0,05 \cdot 2 000 \cdot (5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 1 500$$

$$T_1 = 1 500 \text{ reais}$$

Opção 2:

$$T_2 = 0,05 \cdot \frac{10 000}{2^{1-1}} + 0,05 \cdot \frac{10 000}{2^{2-1}} + \dots + 0,05 \cdot \frac{10 000}{2^{5-1}}$$

$$T_2 = 0,05 \cdot 10 000 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right)$$

$$T_2 = 500 \cdot \left(\frac{16 + 8 + 4 + 2 + 1}{16} \right) = 968,75$$

$$\text{Dai, } T_1 - T_2 > 0.$$

(32) F.

$$\text{De acordo com (02), o valor total a ser pago é } 2 500 + 2 400 + 2 300 + 2 200 + 2 100 = 11 500 \text{ reais}$$

$$0,05 \cdot 10 000 \cdot 5 + 10 000 = 2 500 + 10 000 = 12 500 \text{ reais}$$

A soma é: (01) + (04) + (08) + (16) = 29.

48. a) No plano 1, pois o prazo é metade do prazo do plano 2 e as taxas são iguais.

b) Sejam: $\begin{cases} x: \text{valor da prestação no plano 2} \\ 1,8x: \text{valor da prestação no plano 1} \end{cases}$

Temos:

plano 1: O valor presente das prestações é:

$$\frac{1,8x}{1+i} + \frac{1,8x}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1,8x}{(1+i)^{12}} = 10 000$$

plano 2: O valor presente das prestações é:

$$\frac{x}{1+i} + \frac{x}{(1+i)^2} + \dots + \frac{x}{(1+i)^{24}} = 10 000$$

Devemos ter:

$$\frac{1,8x}{1+i} + \frac{1,8x}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1,8x}{(1+i)^{12}} =$$

$$= \frac{x}{1+i} + \frac{x}{(1+i)^2} + \dots + \frac{x}{(1+i)^{24}}$$

$$\left(\frac{1,8x}{1+i} - \frac{x}{1+i} \right) + \left(\frac{1,8x}{(1+i)^2} - \frac{x}{(1+i)^2} \right) + \dots +$$

$$+ \left[\frac{1,8x}{(1+i)^{12}} - \frac{x}{(1+i)^{12}} \right] =$$

$$= \frac{x}{(1+i)^{13}} + \frac{x}{(1+i)^{14}} + \dots + \frac{x}{(1+i)^{24}}$$

$$0,8x \cdot \left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{12}} \right) =$$

$$S_{12} = \frac{1}{1+i} \cdot \left[\frac{\left(\frac{1}{1+i} \right)^{12} - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} \right]$$

$$= x \cdot \left(\frac{1}{(1+i)^{13}} + \frac{1}{(1+i)^{14}} + \dots + \frac{x}{(1+i)^{24}} \right)$$

$$S_{12} = \frac{1}{(1+i)^{13}} \cdot \left[\frac{\left(\frac{1}{1+i} \right)^{12} - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} \right]$$

Cancelando (*), vem:

$$0,8x \cdot \frac{1}{1+i} = x \cdot \frac{1}{(1+i)^{13}}$$

$$0,8 = \frac{1}{(1+i)^{12}} \Rightarrow (1+i)^{12} = \frac{1}{0,8} = 1,25$$

Daí, o montante pedido é:

$$10\,000 \cdot (1+i)^{12} = 10\,000 \cdot 1,25 = 12\,500 \text{ reais}$$

Testes

9. Sejam x e $2x$ as capacidades da primeira e da segunda garrafas, respectivamente.

$$\text{produto A: } \frac{2}{3}x + \frac{3}{5} \cdot 2x = \frac{2x}{3} + \frac{6x}{5} = \frac{28x}{15}$$

$$\text{produto B: } \frac{1}{3}x + \frac{2}{5} \cdot 2x = \frac{x}{3} + \frac{4x}{5} = \frac{17x}{15}$$

Na terceira garrafa, de capacidade $3x$, encontramos a

$$\text{fração de A: } \frac{28x}{15} : 3x = \frac{28x}{15} \cdot \frac{1}{3x} = \frac{28}{45}$$

Resposta: c.

$$13. \text{ 2007 a 2008: } \begin{cases} \text{aumento percentual total} = \frac{211,5}{200,28} \cong 1,05 \\ (5\% \text{ de aumento}) \\ \text{aumento percentual porta a porta} = \\ = \frac{28,89}{19,24} \cong 1,5 \text{ (50\% de aumento)} \end{cases}$$

$$2008 \text{ a } 2009: \begin{cases} \text{aumento percentual total} = \frac{228,7}{211,5} \cong 1,08 \\ (8\% \text{ de aumento}) \\ \text{aumento percentual porta a porta} = \\ = \frac{39,06}{28,89} \cong 1,35 \text{ (35\% de aumento)} \end{cases}$$

$$2009 \text{ a } 2010: \begin{cases} \text{aumento percentual total} = \frac{258,69}{228,7} \cong 1,13 \\ (13\% \text{ de aumento}) \\ \text{aumento percentual porta a porta} = \\ = \frac{56,03}{39,06} \cong 1,43 \text{ (43\% de aumento)} \end{cases}$$

Observe que não é preciso fazer os cálculos exatos para se concluir que a resposta é a b .

Resposta: b .

16. Valor da ação no início de 2011: x

Valor da ação no final de 2011: $0,7 \cdot x$

Devemos determinar i tal que:

$$0,7x + \frac{i}{100} \cdot 0,7x = x$$

$$0,7x \cdot \left(1 + \frac{i}{100} \right) = x \Rightarrow 0,7 = \frac{1}{1 + \frac{i}{100}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,7 + \frac{0,7i}{100} = 1 \Rightarrow \frac{0,7i}{100} = 0,3 \Rightarrow i \cong 42,86 \text{ (aproximadamente 43\%)}$$

Resposta: c .

19. Investimento A: $M = C \cdot 1,03^{12} = 1,426 \cdot C$; rentabilidade = $= 1,426C - C = 0,426C$ (42,6%)

Investimento B: $M = C \cdot 1,36$; rentabilidade = $= 1,36C - C = 0,36C$ (36%)

Investimento C: $M = C \cdot 1,18^2 = 1,3924 \cdot C$; rentabilidade = $= 0,3924C$ (39,24%)

Resposta: c .

20. a) V. Até final de junho: $\frac{3}{5} \cdot 100 = 60$ redes vendidas ao

preço unitário de $1,4 \cdot x$.

Na liquidação: 40 redes vendidas ao preço unitário de $0,9 \cdot x$.

Daí:

$$60 \cdot 1,4x + 40 \cdot 0,9x = 3\,600$$

$$x = 30$$

b) F. $60 \cdot 1,4 \cdot 30 = 2\,520,00$

c) V. $40 \cdot 0,9 \cdot 30 = 1\,080,00$

d) F.

$$\text{Preço de custo} = 100 \cdot 30 = 3\,000,00$$

$$\text{Valor arrecadado} = 3\,600,00$$

$$\text{Lucro} = 600,00$$

e) F. Lucrou 600,00.

21. Opção 1: $0,95 \cdot 900 = 855$ reais no ato; gasta todo o valor no ato.

Opção 2: $855 \cdot (1 + 0,01)^4 \cong 855 \cdot 1,0406 = 889,71$; não daria para comprar o computador.

Opção 3: $855 \cdot 1,01 = 863,55 - 225,00 = 638,55$

$$1,01 \cdot 638,55 = 644,94 - 225,00 = 419,94$$

$$1,01 \cdot 419,94 = 424,13 - 225,00 = 199,14$$

$$1,01 \cdot 199,14 = 201,13 - 225,00 = -23,86; \text{ falta dinheiro para pagar a última prestação.}$$

Opção 4: $855 \cdot 1,02^3 \cong 855 \cdot 1,0612 = 907,33$

$$907,33 - 900 = 7,33 \text{ de "sobra"}$$

A melhor opção é a 4.

Resposta: c .

22.

	lata A	lata B	lata C
custo	$1,5x$	x	$1,25 \cdot 1,5x = 1,875 \cdot x$
conteúdo (g)	$0,9 \cdot y$	$\frac{2}{3}y$ (*)	y (g)

$$(*) y = 1,5 \cdot B \Rightarrow B = \frac{y}{1,5} = \frac{2}{3}y$$

Preço por g em A:

$$\frac{1,5x}{0,9y} = \frac{\frac{3}{2}x}{\frac{9}{10}y} = \frac{5}{3} \cdot \frac{x}{y}$$

$$\text{Preço por g em B: } \frac{x}{\frac{2}{3}y} = \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{y} < \frac{5}{3} \cdot \frac{x}{y}$$

$$\text{Preço por g em C: } \frac{1,875x}{y} = \frac{1,875}{1000} \cdot \frac{x}{y} = \frac{15}{8} \cdot \frac{x}{y} > \frac{5}{3} \cdot \frac{x}{y} > \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{y}$$

A opção mais econômica é a b.

Resposta: b.

$$23. \text{valor em 1º de maio} = 1000 + \frac{i}{100} \cdot 1000 =$$

$$= 1000 \left(1 + \frac{i}{100} \right) + \underbrace{1000}_{\text{depósito}} =$$

$$= 1000 \cdot \left(1 + \frac{i}{100} + 1 \right) = 1000 \cdot \left(2 + \frac{i}{100} \right);$$

$$\text{valor em 1º de junho} = 1000 \cdot \left(2 + \frac{i}{100} \right) +$$

$$+ \frac{i}{100} \cdot 1000 \cdot \left(2 + \frac{i}{100} \right) = 1000 \cdot \left(2 + \frac{i}{100} \right) \cdot \left(1 + \frac{i}{100} \right)$$

Daí:

$$1000 \cdot \left(2 + \frac{i}{100} \right) \cdot \left(1 + \frac{i}{100} \right) + 690 = 3000$$

$$1000 \cdot \left(2 + \frac{2i}{100} + \frac{i}{100} + \frac{i^2}{100^2} \right) = 2310$$

$$2000 + \frac{3i}{100} \cdot 1000 + \frac{i^2}{10000} \cdot 1000 = 2310$$

$$2000 + 30i + \frac{i^2}{10} = 2310 \Rightarrow \frac{i^2}{10} + 30i - 310 = 0$$

$$\Delta = 1024 \Rightarrow i = \frac{-30 \pm 32}{2 \cdot \frac{1}{10}} \xrightarrow{i > 0} i = \frac{2}{\frac{1}{10}} = 10 \text{ (10\%)}$$

Resposta: c.

24. Banco A: x reais

$$J_A = 0,03 \cdot x \cdot \frac{5}{6} \cdot 12 = 0,3x$$

Banco B: $(6500 - x)$ reais

$$J_B = 0,035 \cdot (6500 - x) \cdot \frac{3}{4} \cdot 12 = 0,315 \cdot (6500 - x)$$

$$J_B = 2047,5 - 0,315x$$

$$J_A + J_B = 2002,50 \Rightarrow 0,3x + 2047,5 - 0,315x = 2002,50$$

$$45 = 0,015x \Rightarrow x = 3000$$

a) F. A quantia aplicada é $3000 < 3100$.b) F. $0,3 \cdot 3000 = 900 > 850$

$$\text{c) } V.C_B = 6500 - 3000 = 3500; J_B = 2002,50 - \overbrace{900}^{J_A} = 1102,50; C_B + J_B = 4602,50$$

$$\text{d) } F.J_B = 2047,5 - 0,315 \cdot 3000 = 1102,50 < 1110,00$$

Resposta: c.

25. Seja ℓ o número de litros de álcool acrescentados.

Devemos ter:

$$\frac{0,04 \cdot 2565 + \ell}{\ell + 2565} = 0,05 \Rightarrow \ell = \frac{25,65}{0,95} = 27$$

Resposta: b.

$$27. 1000 \text{ g de tomate} \begin{cases} 800 \text{ g de água} \\ 200 \text{ g de polpa} \end{cases} \xrightarrow{\text{desidratação}} \begin{cases} 200 \text{ g de polpa} \\ ? \text{ de água} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 200 \text{ g} - 80\% \text{ da massa} \\ x - 100\% \end{cases} \Rightarrow x = 250 \text{ g (massa total do tomate)}$$

Resposta: c.

30. Seja x a quantia inicial.

1º mês: perdeu $0,3x$ e ficou com $0,7x$ 2º mês: ganhou $0,2 \cdot 0,3x = 0,06x$ e ficou com $0,76x$

$$\text{Daí: } 0,76x = 3800 \Rightarrow x = 5000$$

Resposta: c.

$$32. 2C = C \cdot (1+i)^{10} \Rightarrow 2 = (1+i)^{10} \Rightarrow 2^{\frac{1}{10}} = [(1+i)^{10}]^{\frac{1}{10}} \Rightarrow 1+i = 2^{0,1} \Rightarrow 1+i = 1,0718 \Rightarrow i = 0,0718 = 7,18\%$$

Resposta: d.

33. Seja x o comprimento original do peixe, em metros.

$$x + \frac{5000}{100}x = 1,53 \Rightarrow x = 0,03 \text{ m} = 3 \text{ cm}$$

Resposta: c.

36. ■ Sejam b e s os preços da blusa e da saia na promoção, e o gasto foi b + s;

■ Ao fim da promoção, os novos valores são $1,3b$ e $1,20s$, e o gasto foi $1,3b + 1,20s$.

De acordo com o enunciado, devemos ter:

$$1,3b + 1,20s = 1,24(b + s)$$

$$1,3b + 1,20s = 1,24b + 1,24s$$

$$0,06b = 0,04s$$

$$b = \frac{2}{3}s \Leftrightarrow s = \frac{3b}{2} = 1,5b = b + 0,5b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50\% \text{ mais cara}$$

Resposta: e.

$$38. 10000 \cdot 1,2^n = 5000 \cdot 1,68^n$$

$$2 = 1,4^n \Rightarrow \log 2 = n \cdot \log \left(\frac{14}{10} \right)$$

$$n = \frac{\log 2}{\log 14 - \log 10} = \frac{\log 2}{\log 2 + \log 7 - 1} = \frac{0,30}{0,30 + 0,85 - 1}$$

$$n = \frac{0,30}{0,15} = 2 \text{ anos}$$

Resposta: e.

39. Seja x o valor do empréstimo.

$$1,05^n \cdot x = 10584$$

$$\text{É preciso calcular } 1,05^{n-2} \cdot x = \frac{1,05^n}{1,05^2} \cdot x = \frac{10584}{1,05^2} = 9600.$$

Resposta: c.

41. Sejam x_1 e x_2 os preços dos eletrodomésticos citados.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3500 \\ 0,9x_1 + 0,92x_2 = 3170 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 1000 \text{ e } x_1 = 2500$$

Resposta: b.

42. Opção 1: desembolso à vista = 55 000

Opção 2: entrada = 30 000

valor aplicado = 25 000

montante da aplicação = $1,1 \cdot 25\,000 = 27\,500$

valor que sobra = $27\,500 - 26\,000 = 1\,500$;

aplicando-o por mais 6 meses, temos $1,1 \cdot 1\,500 = 1\,650$

Opção 3: entrada = 20 000

valor aplicado = 35 000

montante após 6 meses = $1,1 \cdot 35\,000 = 38\,500$

valor que sobra após o 1º pagamento = $38\,500 - 18\,000 = 20\,500$ (valor reaplicado)

montante após 12 meses = $1,1 \cdot 20\,500 = 22\,550$

valor que sobra após o 2º pagamento = $22\,550 - 18\,000 = 4\,550$

Opção 4: entrada = 15 000

valor aplicado = 40 000

montante após 12 meses = $1,1^2 \cdot 40\,000 = 48\,400$

valor que sobra após o pagamento = $48\,400 - 39\,000 = 9\,400$

Opção 5: valor aplicado = 55 000

montante após 12 meses = $1,1^2 \cdot 55\,000 = 66\,550$

valor que sobra após o pagamento = $66\,550 - 60\,000 = 6\,550$

Os valores restantes após 1 ano somam:

opção 2: 1 650

opção 3: 4 550

opção 4: 9 400

opção 5: 6 550

(pagar à vista seria a pior opção)

A opção mais vantajosa é a 4.

Resposta: d.

$$44. V = 40 + \underbrace{0,6 \cdot 40}_{\text{margem de lucro}} + \underbrace{0,2 \cdot V}_{\text{imposto}}$$

$$V = 40 + 24 + 0,2V$$

$$0,8V = 64$$

$$V = 80$$

O imposto é $0,2 \cdot 80 = 16$ reais.

Resposta: e.

45. Seja x o valor cobrado pelo consumo.

$$1,33x = 150,29 \Rightarrow x = 113 \text{ reais}$$

Assim, o valor referente aos tributos é $150,29 - 113 = 37,29$ reais.

Resposta: a.

$$47. M_1 = \underbrace{2000}_C \cdot (1 + 0,02 \cdot n)$$

$$M_2 = \underbrace{1850}_D \cdot [1 + 0,03 \cdot (n-4)]$$

$$M_1 = M_2 \Rightarrow 2000 \cdot (1 + 0,02n) = 1850 \cdot (1 + 0,03n - 0,12)$$

$$2000 + 40n = 1850(0,03n + 0,88)$$

$$2000 + 40n = 55,5n + 1628$$

$$372 = 15,5n \Rightarrow n = 24$$

A soma dos algarismos de n é: $2 + 4 = 6$.

Resposta: e.

48. Loja A: preço: $1,2x$

Loja B: preço: x ; preço à vista: $0,9x$

Devemos determinar d tal que:

$$1,2x - \frac{d}{100} \cdot 1,2x = 0,9x$$

$$1,2x \left(1 - \frac{d}{100}\right) = 0,9x$$

$$1 - \frac{d}{100} = 0,75 \Rightarrow d = 25 \text{ (25\%)}$$

Resposta: d.

Capítulo 12 Semelhanças e triângulos retângulos

Exercícios

1. $\frac{1}{30\,000} = \frac{20}{x} \Rightarrow x = 600\,000 \text{ cm ou } x = 6 \text{ km}$

2. a) Falsa, pois, por exemplo, os lados de um podem medir 1 cm e 2 cm, e os do outro, 1 cm e 3 cm, ou seja, não são proporcionais.

b) Verdadeira.

c) Falsa, pois, por exemplo, os ângulos agudos de um dos triângulos podem ser de 30° e 60° ; os do outro podem ser 40° e 50° .

d) Verdadeira.

e) Falsa, pois, por exemplo, as bases de um deles podem medir 1 cm e 3 cm e as do outro, 1 cm e 4 cm; logo, não são proporcionais.

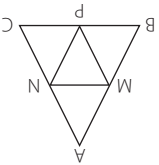
f) Falsa, pois um pode ter ângulos internos medindo 30° e 150° e o outro, 80° e 100° ; logo, não são semelhantes.

3. Sejam x e y as medidas, em centímetros, dos lados de R_2 .

$$\text{Tem-se: } \frac{2}{3} = \frac{6}{x} = \frac{10}{y} \Rightarrow x = 9 \text{ e } y = 15.$$

4. Sim, pois eles têm dois ângulos congruentes, um medindo 48° e o outro, 90° . Logicamente, os terceiros ângulos também são congruentes.
5. O perímetro do quadrilátero dado é 85 cm e o do procurado é 17 cm. Então, $\frac{DA}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{CD}{CD} = \frac{DA}{AB} \Rightarrow AB' = 2,4 \text{ cm}; B'C' = 6,6 \text{ cm}; CD' = 4,4 \text{ cm}.$
6. Não, pois em um deles o ângulo de 40° pode ser formado pelos dois lados congruentes e, no outro, um lado congruente e outro não congruente.
7. Se x, y e z são as medidas em centímetros das arestas do outro bloco, então $\frac{1}{3} = \frac{x}{8} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6} \Rightarrow x = 24, y = 6, z = 18.$
8. 1 e 8 (caso LAL); 2 e 5 (caso LLL ou AA); 3 e 6 (caso LLL); 4 e 7 (caso AA).
9. a) $\frac{4}{8} = \frac{y}{6} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = 3$
b) $\frac{3}{6} = \frac{y}{x} = \frac{4}{x} \Rightarrow y = 10 \text{ e } x = 8$
10. $\frac{6}{h} = \frac{2}{15} \Rightarrow h = 45 \text{ m}$
11. $AE = AC - EC = 3 \text{ cm}$. Tem-se: $\frac{BE}{AE} = \frac{DE}{EC} \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{8}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{32} \text{ cm}$
12. $\triangle ABC \sim \triangle ADG \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DG} \Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{DG}{4 \cdot AD} = \frac{DG}{AD} \Rightarrow DG = 5 \text{ cm}$
 $\triangle ABC \sim \triangle AEH \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EH} \Rightarrow \frac{BC}{2 \cdot AE} = \frac{EH}{AE} \Rightarrow EH = 10 \text{ cm}$
 $\triangle ABC \sim \triangle AFI \Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BC}{FI} \Rightarrow \frac{BC}{4 \cdot AD} = \frac{FI}{3 \cdot AD} \Rightarrow FI = 15 \text{ cm}$
13. a) $\triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{8}{6} \Rightarrow x = 12 \text{ cm}$
b) $\triangle EDA \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{ED}{CB} = \frac{DA}{BA} \Rightarrow \frac{x}{36} = \frac{x-10}{27} \Rightarrow x = 40 \text{ m}$
14. a) $\triangle CAB \sim \triangle XYB \Rightarrow \frac{CA}{AB} = \frac{XY}{AB} \Rightarrow AB = 6$
b) $\triangle ABC \sim \triangle EDC \Rightarrow \frac{AB}{ED} = \frac{BC}{EC} \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{5}{5} \Rightarrow AB = \frac{5}{4}$
15. No $\triangle ABE$, tem-se $\angle BEA = 35^\circ$, logo, há semelhança entre os triângulos, pois cada um tem ângulos medindo $35^\circ, 55^\circ$ e 90° .
16. Não; observe que $\frac{8}{6} \neq \frac{6}{5}$.

17. Os triângulos AMN , BMP e PNC são semelhantes ao triângulo ABC pelo caso LAL.
- a) $\triangle ABC \sim \triangle AMN \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN} \Rightarrow \frac{5,2}{2,6} = \frac{MN}{3,25} \Rightarrow MN = 6,5$
 $\triangle ABC \sim \triangle MBP \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{AC}{MP} \Rightarrow \frac{5,2}{2,6} = \frac{MP}{7,3} \Rightarrow MP = 3,65 \text{ cm}$
 $\triangle ABC \sim \triangle NPC \Rightarrow \frac{AB}{NP} = \frac{BC}{PC} \Rightarrow \frac{5,2}{6,5} = \frac{PC}{3,25} \Rightarrow NP = 2,6 \text{ cm}$
O perímetro do $\triangle MNP$ é $3,25 + 3,65 + 2,6 = 9,5 \text{ cm}$.
- b) $\frac{MN}{BC} = \frac{AC}{AB} = \frac{PN}{AB} = \frac{1}{2}$; os triângulos são semelhantes pelo caso LLL.
18. a) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{9+3}{4} = \frac{4+12}{1} \Rightarrow \frac{12}{4} = \frac{16}{1}$
b) $\frac{4}{1}$
c) $\left(\frac{4}{1}\right)^2 = \frac{16}{1}$
d) A área é $(6 \text{ cm}) \cdot (16 \text{ cm}) = 96 \text{ cm}^2$
19. a) $\frac{AB}{DE} = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow h_2 = 6 \text{ cm}$
b) A área do triângulo ABC é: $\frac{(5 \text{ cm}) \cdot (3 \text{ cm})}{2} = 7,5 \text{ cm}^2$
A área do triângulo CDE é: $\frac{(10 \text{ cm}) \cdot (6 \text{ cm})}{2} = 30 \text{ cm}^2$.
20. Se o perímetro de T_1 é 6 cm, seus lados medem 2 cm. Se o perímetro de T_2 é 24 cm, seus lados medem 8 cm. Se a razão entre os lados é $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, a razão entre as áreas é $\frac{1}{16}$. Logo, "cabem" em T_2 16 triângulos congruentes a T_1 .
21. Se a razão entre as áreas é $\frac{4}{36} = 9 = k^2$, a razão entre as medidas dos lados é $k = 3$. Então, $\frac{DE}{AB} = 3$ e $AB = 12 \text{ cm}$.
22. $\frac{4}{6} = \frac{x + \frac{8-x}{2}}{8} \Rightarrow x = \frac{8}{3}$
 $y^2 = 4^2 + (8-x)^2 = 4^2 + \left(8 - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{400}{9} \Rightarrow y = \frac{20}{3}$
23. a) $(\sqrt{5})^2 = 1^2 + m^2 \Rightarrow m = 2$
 $(\sqrt{5})^2 = m \cdot y = 2y \Rightarrow y = \frac{5}{2}$
 $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = (\sqrt{5})^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}}$
b) $3^2 = (x+2) \cdot 2 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$
 $y^2 = (x+2) \cdot x = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{5}}$



24. a) $17^2 = x^2 + 15^2 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$ (cm)

b) Seja ℓ a hipotenusa do triângulo.

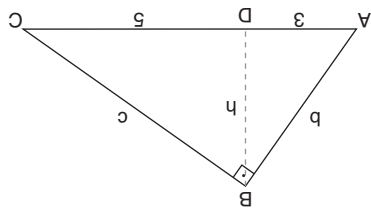
Então, $\ell^2 = 6^2 + 9^2 = 117$ e $12^2 = x^2 + \ell^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 27$ e $x = 3\sqrt{3}$ cm

c) $x^2 + x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$ cm

d) $6^2 = x^2 + 3^2 \Rightarrow x^2 = 27 \Rightarrow x = 3\sqrt{3}$ cm

25.



$h^2 = 3 \cdot 5 = 15 \Rightarrow h = \sqrt{15}$ cm

$b^2 = 3^2 + h^2 = 24 \Rightarrow b = 2\sqrt{6}$ cm

$c^2 = 5^2 + h^2 = 40 \Rightarrow c = 2\sqrt{10}$ cm

26. $\ell^2 = 40^2 + 20^2 = 2000 \Rightarrow \ell = 20\sqrt{5} \approx 44,6$ m

27. A base do triângulo de hipotenusa \overline{AB} mede:
 $6 \cdot 0,40 = 2,4 \Rightarrow AB^2 = (2,4)^2 + (1,8)^2 = 9 \Rightarrow AB = 3$ m

28. a) $26^2 = x^2 + (39 - 15)^2 \Rightarrow x = 10$

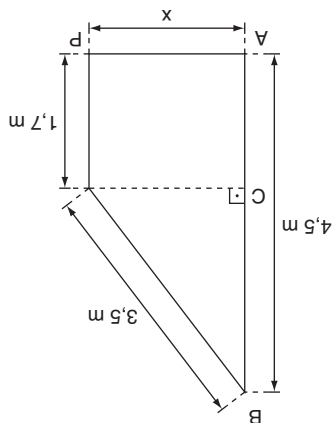
b) $12^2 = x^2 + \left(\frac{2}{8}\right)^2 \Rightarrow x = 8\sqrt{2}$

c) $13^2 = 12^2 + \left(\frac{x-7}{2}\right)^2 \Rightarrow x = 17$

d) $6^2 = (3\sqrt{3})^2 + \left\{ \frac{[10 - (x+2)]^2}{2} \right\} \Rightarrow x = 2$

29. Seja x a distância, em metros, de Paulo ao pé do poste.

$(3,5)^2 = x^2 + (4,5 - 1,7)^2 \Rightarrow x = 2,1$ m

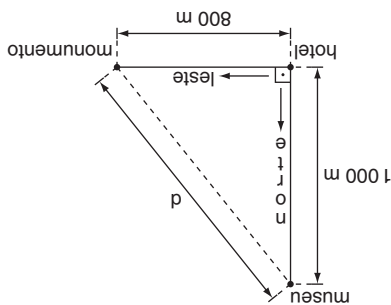


30. O lado do quadrado mede $\frac{36}{4}$ cm. A diagonal d é tal que $d^2 = 9^2 + 9^2 \Rightarrow d = 9\sqrt{2}$ cm.

31. $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = 12$

O perímetro é igual a $3\ell = 3 \cdot 12 = 36$; 36 m

32. a) De $d^2 = (1000)^2 + (800)^2$, tem-se $d = 100 \cdot \sqrt{164}$, aproximadamente 1 280 m.



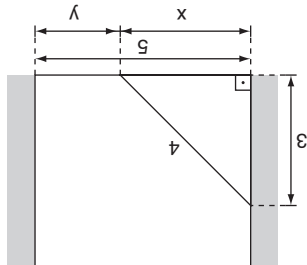
b) A velocidade de 2 km/h, cada grupo terá caminhada-
do 500 m ao fim de 15 minutos. A distância x entre
eles é determinada pela igualdade $x^2 = (500)^2 + (500)^2$
e é aproximadamente 707 m.

33. $\frac{40}{35} = \frac{AC}{45} \Rightarrow AC = \frac{360}{7}$

$(BC)^2 = 40^2 + \left(\frac{360}{7}\right)^2 = \frac{208000}{49}$

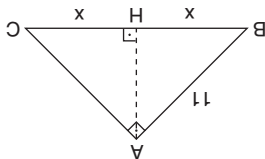
$BC = \frac{40\sqrt{130}}{7}$ cm

34. De $4^2 = 3^2 + x^2$, tem-se $x = \sqrt{7} \approx 2,6$.
Como $y = 5 - \sqrt{7} \approx 2,4$, então $y < x$.

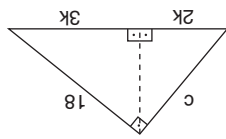
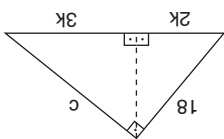


Logo, o pé da escada está mais próximo da parede em
que ela não está apoiada.

35. a) $AC = AB = 11$ cm



ou



Observe que os
triângulos ABH
e ACH são con-
gruentes.

$18^2 = 2k \cdot 5k \Rightarrow k = 9 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}$
ou $18^2 = 3k \cdot 5k \Rightarrow k = 3 \cdot \sqrt{\frac{5}{12}}$
ou $c^2 = 3k \cdot 5k \Rightarrow c = 9\sqrt{6}$ cm
ou $c^2 = 2k \cdot 5k \Rightarrow c = 6\sqrt{6}$ cm

Desafio

Calculando um a um, tem-se:

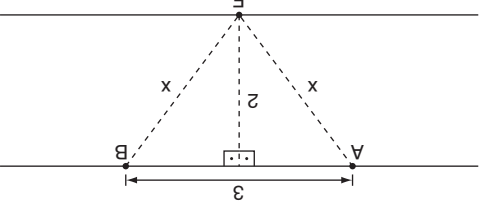
figura	número de pontos
1	1
2	$1 + 2 = 3$
3	$1 + 2 + 3 = 6$
4	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$
5	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
6	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
7	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$
8	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$

A soma é igual a 120.

Observe a tabela e verifique que em cada linha tem-se a soma dos n primeiros números naturais, sendo n o número de pontos da base do triângulo.

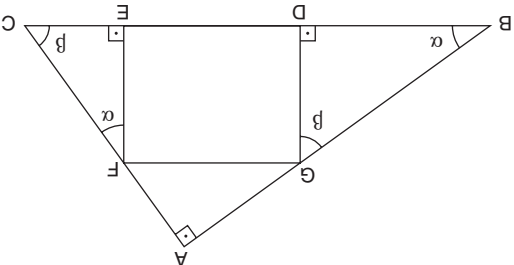
Exercícios complementares

1. Os povoados A e B distam x km do farol F.



Da igualdade $x^2 = 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$, tem-se $x = 2,5$ (km).

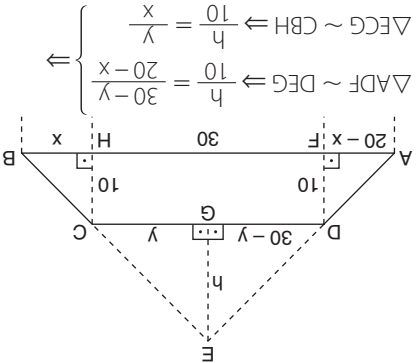
2.



Se, no $\triangle ABC$, $\angle B = \alpha$ e $\angle C = \beta$, então no $\triangle BDG$ tem-se $\angle BGD = \beta$ e no $\triangle FEC$ tem-se $\angle FEC = \alpha$.

Então, $\triangle BGD \sim \triangle FEC$, pelo caso AA, e $\frac{BD}{DG} = \frac{EC}{FC} \Rightarrow \frac{BD}{DG} = \frac{2}{8} \Rightarrow DG = 4$; o perímetro do quadrado é 16 cm.

3. a)



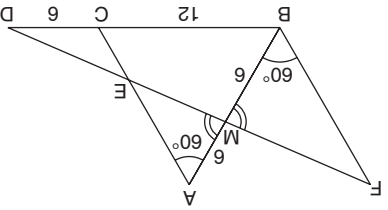
$$\begin{cases} \triangle ADF \sim \triangle DEG \Rightarrow \frac{10}{h} = \frac{30-y}{30-x} \\ \triangle ECG \sim \triangle FBH \Rightarrow \frac{10}{h} = \frac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{30-y}{h} &= \frac{x}{y} \\ \Rightarrow 30x - xy &= 20y - xy \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A_{CDE} &= \frac{30 \cdot 15}{2} = 225 \text{ cm}^2 \\ A_{ABE} &= \frac{50 \cdot 25}{2} = 625 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } A &= \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(50+30) \cdot 10}{2} = 400 \text{ cm}^2 \text{ ou} \\ A_{ABE} - A_{CDE} &= 625 - 225 = 400 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

4.



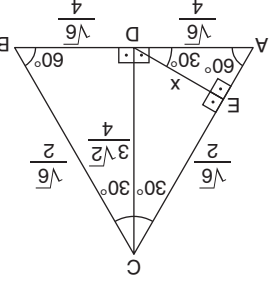
Os triângulos AME e BMF apresentam: $\angle AM = MB$, $\angle AME = \angle BMF$ e $\angle EAM = 60^\circ = \angle FBM$ (por serem alternos internos, uma vez que AC e FB são paralelos), então $\triangle AME \cong \triangle BMF$.

Daí, vem $AE = BF = x$. Os triângulos CDE e BDF são semelhantes (pois AC e FB são paralelos), então: $\frac{CE}{FB} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow \frac{CE}{x} = \frac{12-x}{x} \Rightarrow x = 9$.

5.

Seja x a distância D a AC. Como o $\triangle ABC$ é equilátero, então

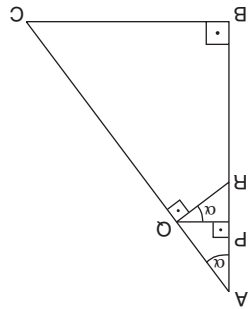
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



$$x = \frac{8}{3\sqrt{2}} \text{ cm.}$$

Os triângulos CDB e ADE são semelhantes, de razão $\frac{1}{2}$, e

6.



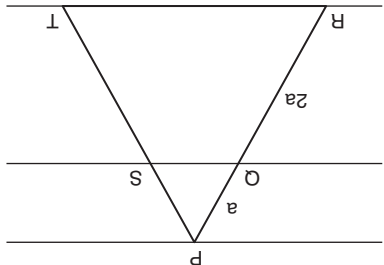
Então:
 $\triangle PQS \sim \triangle ABC$ (caso AA)

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{AC} = \frac{PR}{BC}$$

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{5}{1,2} = \frac{4}{3}$$

$$\text{E, daí, vem: } QR = \frac{3}{5 \cdot (1,2)} = 2$$

7.



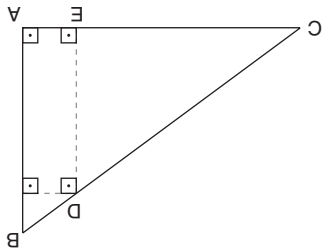
$\triangle PQS \sim \triangle PRT$, então:

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{QS}{RT} \text{ e } \frac{PQ}{PR} = \frac{PQ}{QR} = \frac{a}{a+2a} = \frac{1}{3}$$

Daí vem:

$$\frac{QS}{RT} = \frac{1}{3} \Rightarrow QS = \frac{1}{3} \cdot RT = \frac{1}{3} \cdot 84 = 28 \text{ (m)}$$

8.



No triângulo retângulo CDE, temos:

$$CD^2 = CE^2 + DE^2 = 12^2 + 9^2 = 225, \text{ então } CD = 15 \text{ cm.}$$

O perímetro desse triângulo é $12 + 9 + 15 = 36$ cm.

Os triângulos CDE e ABC são semelhantes e a razão de

$$\text{semelhança é } \frac{CE}{CA} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}, \text{ então o perímetro de ABC}$$

$$\text{é x tal que: } \frac{x}{36} = \frac{4}{3}; \text{ portanto, } x = 48 \text{ cm.}$$

9.

Seja ℓ a medida do lado do quadrado ABCD. Temos:

$$\triangle CDE: CE = \ell\sqrt{2}$$

$$\triangle EAF: FA = EA = 2\ell$$

$$\text{Então } FB = FA + AB = 3\ell$$

$$\triangle FBG: GB = FB = 3\ell$$

$$\text{Então } GC = GB + BC = 4\ell$$

$$\triangle GCH: GH = GC\sqrt{2} = 4\ell\sqrt{2}$$

Conclusão:

$$\frac{CE}{GH} = \frac{\ell\sqrt{2}}{4\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$$

10. Sejam $b - r$, b e $b + r$ as medidas dos lados do triângulo.

Temos:

$$(b - r) + b + (b + r) = 12 \Rightarrow b = 4$$

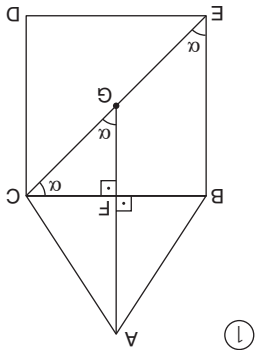
Utilizando o teorema de Pitágoras, vem:

$$(b + r)^2 = (b - r)^2 + b^2 \Rightarrow (4 + r)^2 = (4 - r)^2 + 4^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (16 + 8r + r^2) = (16 - 8r + r^2) + 16 \Rightarrow r = 1$$

$$\text{Então, a hipotenusa mede } b + r = 4 + 1 = 5.$$

11. a) Há duas posições possíveis para o ponto G.



①

Sobre AF, com $\triangle FGC$ retângulo em F.

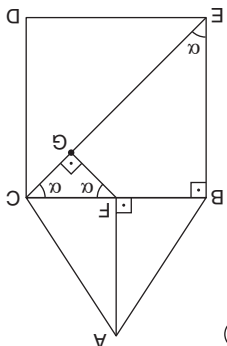
$$\triangle BCF \sim \triangle FCG \Rightarrow \triangle FCG \text{ é isósceles. Como } FC = \frac{1}{2} \cdot BC =$$

$$= 3 \text{ cm, então } FG = 3 \text{ cm e G é o centro do quadrado.}$$

$$(GC)^2 = (FG)^2 + (FC)^2 = 18$$

$$EG = GC = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

②



Sobre EC, de forma que $\triangle FGC$ é retângulo em G.
 $\triangle FGC \sim \triangle BCE \Rightarrow \triangle FGC$ é isósceles.

$$\frac{t}{T} = \frac{t}{t + P} \Rightarrow \frac{t}{25} = 1 + \frac{t}{P} \Rightarrow \frac{t}{P} = \frac{t}{21}$$

Da igualdade $T = t + P$, tem-se:

lo DEC e P a área do trapézio ABED.

b) Seja T a área do triângulo ABC, t a área do triângulo-

a área de DEC corresponde a $\frac{25}{4}$ da área de ABC.

$\frac{12 + 8}{5} = \frac{2}{5}$. A razão entre suas áreas é $k^2 = \frac{4}{25}$. Logo,

13. a) A razão de semelhança dos triângulos ABC e DEC é

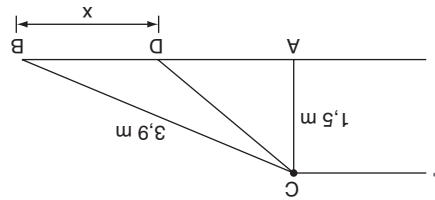
Resposta: c.

$$x = AB - AD = 3,6 - 2 = 1,6 \text{ m}$$

$$AD^2 = CD^2 - AC^2 = (2,5)^2 - (1,5)^2 = 4 \text{ m}^2 \Rightarrow AD = 2 \text{ m}$$

$$CD = 3,9 - 1,4 = 2,5 \text{ m}$$

$$AB^2 = BC^2 - AC^2 = (3,9)^2 - (1,5)^2 = 12,96 \Rightarrow AB = 3,6 \text{ m}$$



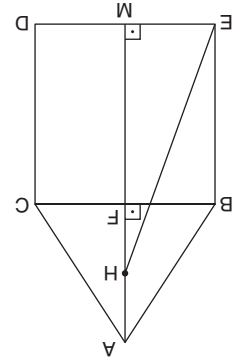
12.

$$= \frac{4}{9}(8\sqrt{3} + 23) \text{ e } EH = \frac{2}{3}\sqrt{23 + 8\sqrt{3}} \text{ cm}$$

$$\text{Do } \triangle EMH, (EH)^2 = 3^2 + \left(6 + 3\sqrt{3}\right)^2 =$$

$$AE = 3\sqrt{3} \text{ cm e } HF = \frac{2}{3}\sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$\text{Do } \triangle ACF, \text{ tem-se } 6^2 = 3^2 + (AF)^2.$$



b)

$$\text{Então, } EG \text{ mede } 3\sqrt{2} \text{ cm ou } \frac{9\sqrt{2}}{2} \text{ cm.}$$

$$EG = EC - GC = 6\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

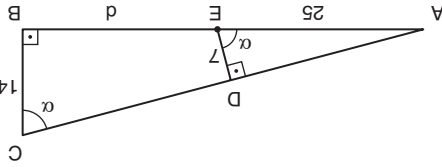
$$(EC)^2 = (ED)^2 + (CD)^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \Rightarrow EC = 6\sqrt{2}$$

$$(GC)^2 = \frac{3^2}{3^2} \Rightarrow GC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$(FC)^2 = (GC)^2 + (FG)^2 = (GC)^2 + (GC)^2 = 2 \cdot (GC)^2$$

$$FC = \frac{2}{1}BC = 3 \text{ cm}$$

16.



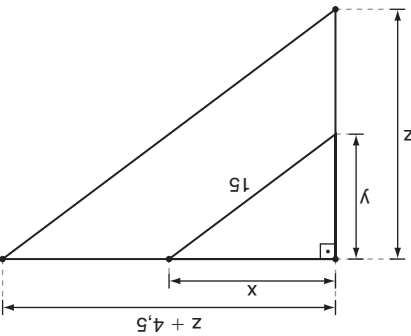
Os triângulos EDA e CBA são semelhantes, e, daí, vem:

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{14}{7} = \frac{25}{AC} \Rightarrow AC = 50 \text{ cm.}$$

No triângulo retângulo ABC, temos:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 50^2 = (25 + d)^2 + 14^2 \Rightarrow d = 28 \text{ cm.}$$

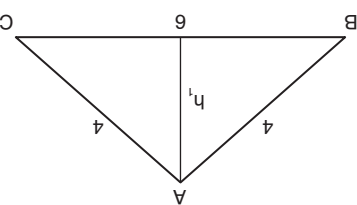
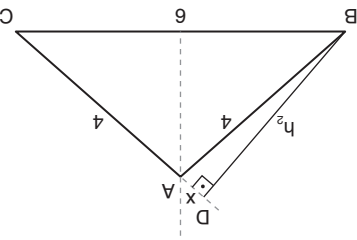
15.



$$\text{As alturas são } \frac{\sqrt{63}}{2} \text{ cm, } \frac{\sqrt{63}}{2} \text{ cm e } \sqrt{7} \text{ cm.}$$

$$\text{determinam um sistema de solução } x = \frac{1}{2} \text{ e } h = \frac{\sqrt{63}}{2}.$$

A altura relativa ao lado AB é igual à altura relativa ao lado AC. Do $\triangle ADB$, tem-se $4^2 = h_1^2 + x^2$ ① e do $\triangle BCD$, tem-se $6^2 = h_2^2 + (x + 4)^2$ ②. As equações ① e ②

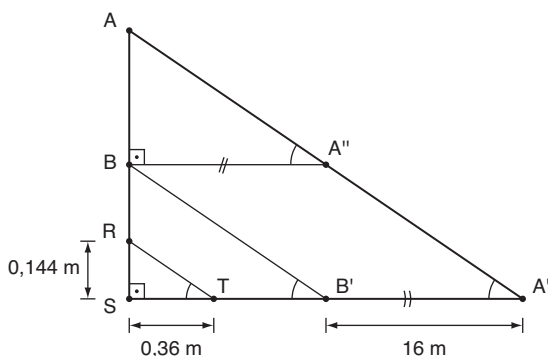


$$\Rightarrow h_1^2 = 7 \Rightarrow h_1 = \sqrt{7} \text{ cm.}$$

$$14. \text{ Altura relativa ao lado BC: } 4^2 = h_1^2 + 3^2 \Rightarrow$$

17. O túnel 1 tem comprimento $12 \cdot 250 = 3000 \text{ m} = 3 \text{ km}$.
Os triângulos XCD e XAB são semelhantes, então $\frac{XC}{XA} = \frac{XD}{XB}$ e, daí, vem: $\frac{3}{3+1} = \frac{XD}{XD+1,5}$
 $3 \cdot XD + 4,5 = 4 \cdot XD \Rightarrow XD = 4,5 \text{ km} = 4500 \text{ m}$.
O túnel 2 será perfurado em $\frac{4500}{12} = 375$ dias; portanto, sua perfuração deverá ser iniciada $375 - 250 = 125$ dias antes do túnel 1.

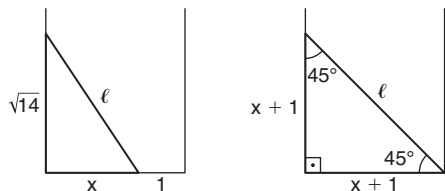
18. Do enunciado, podemos esquematizar a figura abaixo, na qual A' e B' são, respectivamente, a sombra do gavião e a do roedor, RS é a vareta e ST, sua sombra.



Os triângulos ABA' e RST são semelhantes, e BB'A'A' é um paralelogramo; logo:

$$\frac{AB}{0,144} = \frac{16}{0,36} \therefore AB = 6,4 \text{ (metros)}$$

19. antes depois



Como $l^2 = (\sqrt{14})^2 + x^2$ e $l^2 = (x+1)^2 + (x+1)^2$, da igualdade $14 + x^2 = 2 \cdot (x+1)^2$, tem-se $x = 2$.

Logo, $l = 3\sqrt{2}$.

- a) A distância é de 3 m.
b) $3\sqrt{2} \text{ m}$

20. O triângulo ABC é retângulo, portanto:

$$(\overline{AB})^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AD} = 16 \cdot 12$$

$$\text{Logo, } \overline{AB} = \sqrt{16 \cdot 12} = 8\sqrt{3}$$

Como $\overline{AC} = 4\overline{DC}$, $\overline{BC} = 4\overline{EC}$ e AB e DE são paralelos, então os triângulos ABC e DEC são semelhantes de razão $\frac{1}{4}$.

$$\text{Portanto, } \overline{DE} = \frac{\overline{AB}}{4} = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

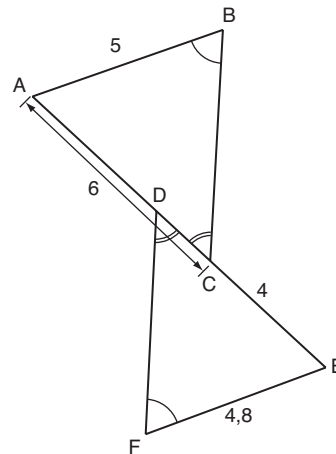
21. 1 ano = 365 dias = 365 · 24 horas
Em 1 ano, a Terra percorre a distância de
 $2\pi r = 2 \cdot 3 \cdot 150380 \cdot 10^3 \text{ km}$.

Temos, então, a seguinte proporção:

$$\begin{cases} 365 \cdot 24 \text{ h} \rightarrow 6 \cdot 150380 \cdot 10^3 \text{ km} \\ 1 \text{ h} \rightarrow x \text{ km} \end{cases}$$

$$\text{Daí: } x = \frac{6 \cdot 150380 \cdot 10^3}{365 \cdot 24} = 103000 \text{ km/h}$$

22. Do enunciado, temos a figura, cotada em cm.



- os ângulos EDF e ACB são congruentes, pois as retas \overline{FD} e \overline{BC} são paralelas.

$$\blacksquare CE = AE - AC$$

$$CE = 10 - 6 \therefore CE = 4$$

Da semelhança dos triângulos ABC e EFD, temos:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{ED}$$

$$\frac{5}{4,8} = \frac{6}{4 + CD} \therefore 20 + 5 \cdot CD = 28,8$$

$$CD = 1,76 \text{ cm}$$

Testes

- a) $\frac{1}{100} = \frac{9}{x} \Rightarrow x = 900$
b) $\frac{2}{100} = \frac{9}{x} \Rightarrow x = 450$
c) $\frac{2}{300} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 900$
d) $\frac{1}{300} = \frac{4,5}{x} \Rightarrow x = 1350$
e) $\frac{2}{300} = 4,5 \Rightarrow x = 675$

Resposta: d.

- Os triângulos ACE e BDE são semelhantes pelo caso AA, pois, como $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$, tem-se $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{C} = \hat{E}$. Então,
 $\frac{DE}{AE} = \frac{6}{4} \Rightarrow DE = \frac{3}{2} \cdot EA$.

Os triângulos AEF e ABD também são semelhantes pelo caso LAL. Logo:

$$\frac{6}{EF} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow EF = \frac{6 \cdot AE}{AE + ED} = \frac{6 \cdot AE}{AE + \frac{3}{2} \cdot AE} = 2,4 \text{ m}$$

Resposta: c.

3. No mapa menor, 1 cm corresponde a 4 000 000 cm reais e, no maior, tem-se:

$$\begin{cases} 1 \text{ cm} \longrightarrow 20\,000\,000 \\ x \text{ cm} \longrightarrow 67\,000\,000 \end{cases} \Rightarrow x = 3,35 < 10$$

Resposta: a.

4. As sombras projetadas pela vassoura (de comprimento 1,5 m) e pela árvore (de altura h), no mesmo instante, são proporcionais às medidas de seus comprimentos. Então:

$$\frac{\text{sombras}}{16 \text{ m}} = \frac{\text{comprimentos}}{1,5 \text{ m}}$$

Daí, vem: $h = 12 \text{ m}$

Resposta: c.

5. Em um mesmo instante, as sombras projetadas pelos objetos têm medidas proporcionais às alturas dos objetos. Nesse caso, temos:

pessoa $\rightarrow 1,80 \text{ m}$ (altura) $\rightarrow 0,60 \text{ m}$ (sombra)

poste $\rightarrow 2 \text{ m}$ (altura) $\rightarrow x$ (sombra)

$$\frac{1,80}{2} = \frac{0,60}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ m} = 0,666... \text{ m}$$

Mais tarde, temos:

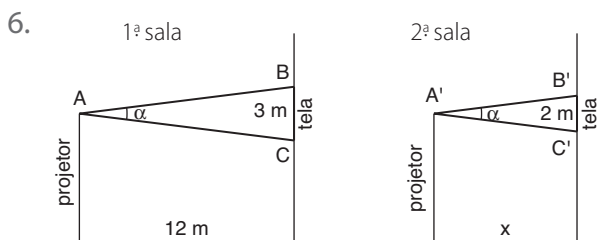
pessoa $\rightarrow 1,80 \text{ m} \rightarrow y$

poste $\rightarrow 2 \text{ m} \rightarrow 0,166... \text{ m} = \frac{1}{6} \text{ m}$

$$\frac{1,80}{2} = \frac{y}{\frac{1}{6}} \Rightarrow y = \frac{0,30}{2} \text{ m} = 0,15 \text{ m} = 15 \text{ cm}$$

A sombra da pessoa passou de 60 cm para 15 cm.

Resposta: b.



Os triângulos isósceles ABC e A'B'C' são semelhantes, então:

$$\frac{x}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 8 \text{ m}$$

Resposta: b.

7. A área do triângulo ABC é o dobro da área do triângulo AMN.

Como os triângulos ABC e AMN são semelhantes, a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança. Então:

$$\left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resposta: b.

8. Na parte inclinada, o corrimão é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 90 cm e $5 \cdot 24 = 120 \text{ cm}$, então sua medida é:

$$\sqrt{90^2 + 120^2} = \sqrt{8100 + 14400} = \sqrt{22500} = 150 \text{ cm}$$

Assim, o comprimento do corrimão é:

$$30 \text{ cm} + 150 \text{ cm} + 30 \text{ cm} = 210 \text{ cm}$$

Resposta: d.

9. No triângulo retângulo ABC, temos:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow AC = 5$$

Como DECF é paralelogramo, temos $\overline{DE} \parallel \overline{FC}$, então os triângulos DBE e ABC são semelhantes e a razão de

$$\text{semelhança é } \frac{DE}{AC} = \frac{\frac{3}{2}}{5} = \frac{3}{10}.$$

Como DECF é paralelogramo, temos $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$, então os triângulos ADF e ABC são semelhantes e a razão de

$$\text{semelhança é } \frac{AF}{AC} = \frac{FC}{AC} = \frac{5 - \frac{3}{2}}{5} = \frac{7}{10}.$$

A área do paralelogramo é:

$$S_{ABC} - S_{DBE} - S_{ADF} = S_{ABC} - \frac{9}{100} \cdot S_{ABC} - \frac{49}{100} \cdot S_{ABC} = \frac{42}{100} \cdot S_{ABC}$$

$$\text{Como } S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6, \text{ temos } \frac{42}{100} \cdot S_{ABC} = \frac{252}{100} = \frac{63}{25}$$

Resposta: a.

$$10. \sin \theta = \frac{1,5}{10,5} = \frac{1}{7}$$

$$h - 1,5 = 17,5 \cdot \sin \theta = 17,5 \cdot \frac{1}{7} = 2,5 \text{ m}$$

$$h = 4 \text{ m}$$

Resposta: b.

11. As medidas dos lados desse triângulo são $x - 4$, $x - 2$ e x , onde x é a hipotenusa.

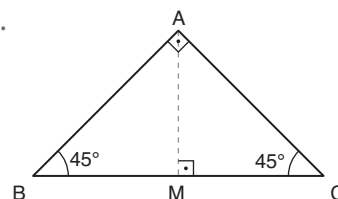
Então:

$$x^2 = (x - 4)^2 + (x - 2)^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 20 = 0 \Rightarrow x = 10 \text{ ou } x = 2$$

Como x deve ser maior que 4, resulta em $x = 10 \text{ m}$.

Resposta: a.

- 12.



Como o triângulo ABC é isósceles, a altura \overline{AM} é também mediana e bissetriz; portanto, $BM = MC$ e $\widehat{BAM} = \widehat{CAM} = 45^\circ$.

Os triângulos BAM e CAM também são isósceles, então
 $BM = AM = 5$ m e $MC = AM = 5$ m.
 Daí, resulta: $AB = 5\sqrt{2}$ m, $AC = 5\sqrt{2}$ m e $BC = 5 + 5 = 10$ m.
 O perímetro do triângulo ABC é:
 $AB + AC + BC = 10\sqrt{2}$ m + 10 m = $10(\sqrt{2} + 1)$ m.
 Resposta: c.

13. No triângulo retângulo ABC, temos:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

Os triângulos ABC e CDE são semelhantes, então:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CE} \Rightarrow \frac{1}{DE} = \frac{2}{CE} \Rightarrow CE = 2 \cdot DE$$

$$BC = BE + CE = 2 \cdot DE + 2 \cdot DE = 4 \cdot DE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DE = \frac{4}{BC} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

No triângulo retângulo ABE, temos:

$$AE = \sqrt{AB^2 + (2 \cdot DE)^2} = \sqrt{1^2 + \left(2 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Resposta: c.

14. A altura BD tem medida igual à média geométrica das

medidas de AD e DC, portanto:

$$BD^2 = AD \cdot DC \Rightarrow (2\sqrt{6})^2 = AD \cdot DC \Rightarrow AD \cdot DC = 24 \quad (1)$$

A medida da hipotenusa é conhecida:

$$AC = 7 - (-4) \Rightarrow AD + DC = 11 \quad (2)$$

Usando (1) e (2), vem:

$$AD + \frac{24}{AD} = 11 \Rightarrow AD^2 - 11 \cdot AD + 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = 8 \text{ ou } AD = 3$$

Como $x = AD + (-4) = AD - 4$ e $x > 0$, devemos ter

$$AD > 4, \text{ portanto } AD = 8. \text{ E, daí, } x = 8 - 4 = 4$$

Resposta: b.

15. Os triângulos POA e PBC são semelhantes, então os lados

homólogos são proporcionais:

$$\frac{PO}{PA} = \frac{PC}{OA} = \frac{PB}{PO} = \frac{BC}{OA} = \frac{40}{25} = \frac{8}{5} \quad (1)$$

$$\text{Mas } OB = PB - PO \Rightarrow PB - PO = 30 \quad (2)$$

Substituindo PB de (2) em (1), temos:

$$\frac{PO}{PO + 30} = \frac{8}{5} \Rightarrow PO = 50 \text{ m}$$

Resposta: e.

16. No triângulo ABC, temos:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow AC = 5 \text{ m}$$

Os triângulos ABC e AED são semelhantes (caso AA),

então:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{4}{AE} = \frac{DE}{3} \Rightarrow AE = 2,4 \text{ cm e } ED = 1,8 \text{ cm}$$

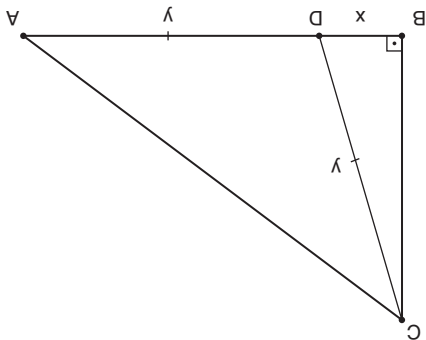
A área do triângulo CDE é:

$$\frac{CE \cdot ED}{2} = \frac{(AC - AE) \cdot ED}{2} = \frac{(5 - 2,4) \cdot 1,8}{2} = 2,34 =$$

Resposta: a.

$$= \frac{50}{117} \text{ cm}^2$$

17. c.



Façamos $CD = AD = y$ e $DB = x$.

Temos:

$$AD + DB = AB \Rightarrow y + x = 8 \quad (1)$$

$$DB^2 + BC^2 = CD^2 \Rightarrow x^2 + 36 = y^2 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$(8 - y)^2 + 36 = y^2 \Rightarrow 64 - 16y + 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{16}{10} = \frac{4}{25}$$

Resposta: d.

18. O segmento que liga os pontos médios de dois lados

de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e mede tanto

quanto a metade deste.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

$$A'B' = \frac{AB}{2}, B'C' = \frac{BC}{2}, A'C' = \frac{AC}{2}$$

Como resultado desses paralelismos, temos:

$C\hat{A}B = C\hat{A}'B'$, $C\hat{B}A = C\hat{B}'A'$ e $A\hat{C}B = A\hat{C}'B'$, portanto

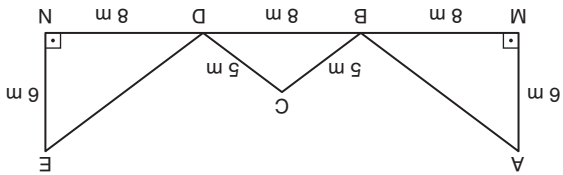
os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes e a ra-

zão de semelhança é 2. Dessa forma, a razão entre

$$\text{as áreas de ABC e A'B'C' é } \frac{S}{S'} = 4.$$

Resposta: a.

19.



No triângulo retângulo AMB, temos:

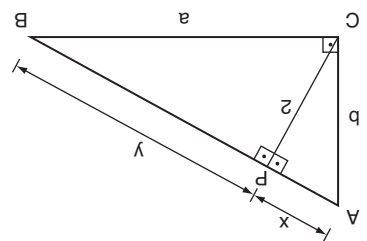
$$AB^2 = AM^2 + MB^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow AB = 10 \text{ m}$$

No triângulo retângulo END, temos:

$$DE^2 = EN^2 + ND^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow DE = 10 \text{ m}$$

$$AB + BC + CD + DE = 10 + 5 + 5 + 10 = 30 \text{ m}$$

Resposta: a.



20.

Temos inicialmente:

$$x + y = AB = 3\sqrt{3} \quad (1) \quad e \quad a^2 + b^2 = AB^2 = (3\sqrt{3})^2 \quad (2)$$

No triângulo retângulo APC:

$$x^2 + z^2 = b^2 \quad (3)$$

No triângulo retângulo BPC:

$$y^2 + z^2 = a^2 \quad (4)$$

Substituindo (3) e (4) em (2), resulta:

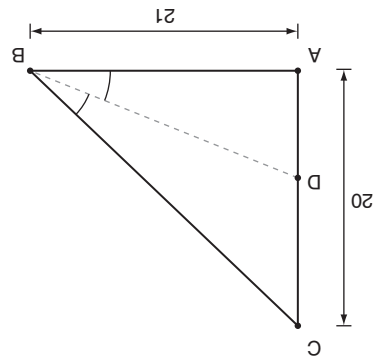
$$8 + x^2 + y^2 = 27, \text{ portanto, } x^2 + y^2 = 19 \quad (5)$$

Isolando x em (1) e substituindo em (5), vem:

$$(3\sqrt{3} - y)^2 + y^2 = 19 \Rightarrow y^2 - 3\sqrt{3}y + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{27 - 16}}{2} = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{11}}{2}$$

Resposta: a.



21.

No triângulo ABC, temos:

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 = 441 + 400 = 841 \Rightarrow BC = 29$$

A bissetriz interna BD divide o lado oposto AC em dois segmentos (AD e DC) cujas medidas estão na mesma razão que os lados adjacentes, ou seja:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{CB}, \text{ então } \frac{AD}{20 - AD} = \frac{21}{29}$$

$$\text{Daí, vem: } AD = \frac{420}{50}$$

Resposta: a.

22. No triângulo retângulo ABC, temos:

$$AB^2 = BC^2 - AC^2 = 225 - 144 = 81 \Rightarrow AB = 9$$

$$AB \cdot AC = BC \cdot AD \Rightarrow 9 \cdot 12 = 15 \cdot y \Rightarrow y = \frac{36}{15} = 7,2$$

No triângulo retângulo ADC, temos:

$$DC^2 = AC^2 - AD^2 = 144 - \frac{36^2}{25} = \frac{2304}{25} \Rightarrow DC = \frac{48}{5}$$

Os triângulos ABC e ECD são semelhantes, então:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{\frac{48}{5}}{\frac{144}{25}} \Rightarrow x = \frac{15}{5,76} = 2,6$$

Capítulo 13 Trigonometria no triângulo retângulo

Exercícios

1. $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \Rightarrow$
 $\Rightarrow AC = \sqrt{289} = 17 \text{ cm}$

a) $\sin A = \frac{15}{17}, \cos A = \frac{8}{17}, \tan A = \frac{15}{8}$

b) $\sin C = \frac{8}{17}, \cos C = \frac{15}{17}, \tan C = \frac{8}{15}$

2. a) $\triangle QOP: \tan \theta = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

b) $\triangle QOP: \tan \theta = \frac{OP'}{PQ'} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{OP'}{6} \Rightarrow OP' = 9 \text{ m}$

24. Devido à simetria da figura, G é o ponto médio de AB,

$$\text{então } AG = GB = \frac{AB}{2} = 1,5 \text{ cm.}$$

Os triângulos AFG e FQP são semelhantes e, como

$$AG = \frac{PQ}{FQ}, \text{ então } AF = \frac{2}{FQ}.$$

Como AQ = 6 cm, então AF = 2 cm e FQ = 4 cm.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AFG,

temos:

$$FG^2 = AF^2 + AG^2 = 4 + 2,25 = 6,25 \Rightarrow FG = 2,5 \text{ cm.}$$

Aplicando o mesmo teorema no triângulo QFP, temos:

$$FP^2 = FQ^2 + PQ^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow FP = 5 \text{ cm}$$

A distância total percorrida pelo feixe é:

$$FP + FG + GH + HQ = 5 + 2,5 + 5 = 15 \text{ cm}$$

Resposta: b.

23. No triângulo retângulo ABC, temos:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow BC = 5 \text{ m}$$

Devido à proporcionalidade, temos:

$$\frac{h_1}{h_3} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{h_3}$$

Daí, temos:

$$\frac{h_1}{h_3} = \frac{4}{h_2} \Rightarrow h_2 = \frac{5}{4h_1}$$

$$\frac{h_1}{h_3} = \frac{3}{h_3} \Rightarrow h_3 = \frac{5}{3h_1}$$

Então:

$$\frac{h_1}{4h_2 + 3h_3} = \frac{h_1}{\frac{5}{16h_1} + \frac{5}{9h_1}} = \frac{h_1}{\frac{5}{9h_1} + \frac{5}{16h_1}} = \frac{h_1}{5h_1} = 5$$

Resposta: a.

Resposta: c.

$$\frac{x}{y} = \frac{7,2}{5,76} = 1,25$$

$$x \cdot y = (7,2)(5,76) = 41,472$$

$$x + y = 12,96$$

Conclusão:

3. a) $\sin \hat{C} = \frac{2}{7}$

b) $BC^2 = 11^2 + 60^2 = 121 + 3600 = 3721$

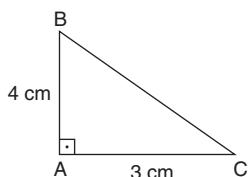
$BC = \sqrt{3721} = 61$

$\sin \hat{B} = \frac{11}{61}$

c) $AC^2 = 5^2 + 4^2 = 41 \Rightarrow AC = \sqrt{41} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5\sqrt{41}}{41}$

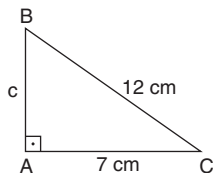
4. a)



$BC^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow BC = 5 \text{ cm}$

$\cos \hat{B} = \frac{4}{5}$ e $\cos \hat{C} = \frac{3}{5}$

b)

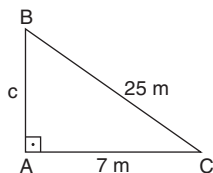


$12^2 = c^2 + 7^2 \Rightarrow c^2 = 144 - 49 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 = 95 \Rightarrow c = \sqrt{95} \text{ cm}$

$\cos \hat{B} = \frac{\sqrt{95}}{12}$; $\cos \hat{C} = \frac{7}{12}$

c)

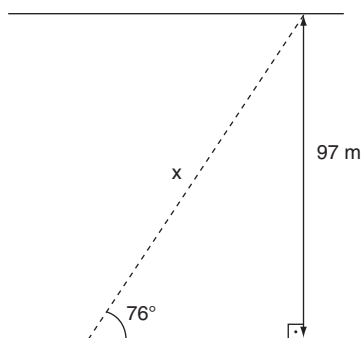


$25^2 = c^2 + 7^2 \Rightarrow c = \sqrt{576} = 24 \text{ m}$

$\cos \hat{B} = \frac{24}{25}$ e $\cos \hat{C} = \frac{7}{25}$

5. $\tan 10^\circ = \frac{h}{250} \Rightarrow 0,17633 = \frac{h}{250} \Rightarrow h = 44,08 \text{ m}$

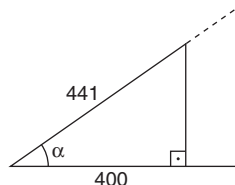
6.



$\sin 76^\circ = \frac{97}{x} \Rightarrow 0,97030 = \frac{97}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 99,96 \approx 100 \text{ m}$

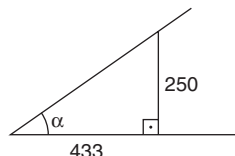
7.



$\cos \alpha = \frac{400}{441} = 0,90702$

Procurando no "corpo" da tabela, encontramos para α o valor de 25° .

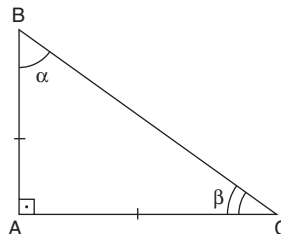
8.



$\tan \alpha = \frac{250}{433} = 0,5773$

No "corpo" da tabela, encontramos $\alpha = 30^\circ$.

9.



$\tan \alpha = \frac{AC}{AB} = 1$; $\tan \beta = \frac{AB}{AC} = 1$

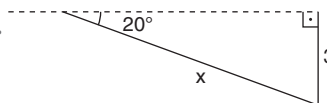
10. a) $\tan 50^\circ = \frac{4}{x} \Rightarrow 1,19175 = \frac{4}{x} \Rightarrow x \approx 3,36$

b) $\cos 30^\circ = \frac{x}{6} \Rightarrow 0,86603 = \frac{x}{6} \Rightarrow x \approx 5,196$

c) $\cos x = \frac{75}{106} \Rightarrow \cos x = 0,707 \xrightarrow{\text{tabela}} x = 45^\circ$

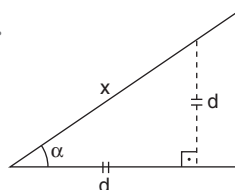
d) $\sin 54^\circ = \frac{8}{x} \Rightarrow 0,80903 = \frac{8}{x} \Rightarrow x \approx 9,89$

11.



$\sin 20^\circ = \frac{3}{x} \Rightarrow 0,34202 = \frac{3}{x} \Rightarrow x \approx 8,77 \text{ km}$

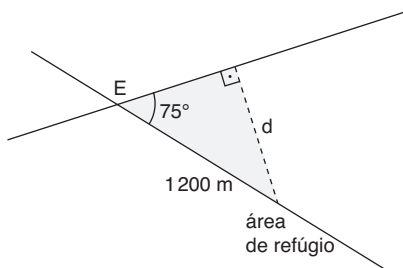
12.



a) $\tan \alpha = \frac{d}{d} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

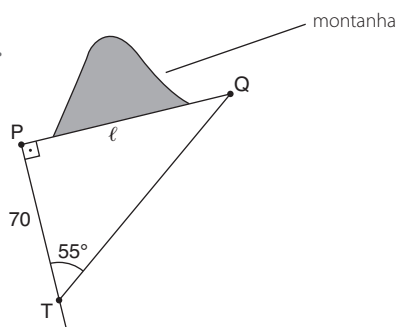
b) $x^2 = d^2 + d^2 = 2d^2 \Rightarrow x = \sqrt{2d^2} = d\sqrt{2} \text{ u.c.}$

13.



$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \frac{d}{1200} \Rightarrow 0,96593 = \frac{d}{1200} \Rightarrow \\ \Rightarrow d &\cong 1159 \text{ m}\end{aligned}$$

14.

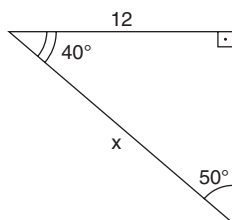


$$\begin{aligned}\tan 55^\circ &= \frac{l}{70} \Rightarrow 1,42815 = \frac{l}{70} \Rightarrow \\ \Rightarrow l &\cong 99,97 \text{ ou aproximadamente } 100 \text{ m}.\end{aligned}$$

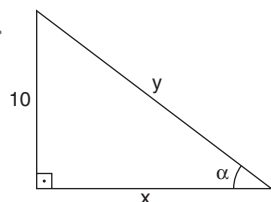
$$15. \text{ a) } \cos 40^\circ = \frac{x}{12} \Rightarrow 0,766 = \frac{x}{12} \Rightarrow x \cong 9,19 \text{ m}$$

b) O outro ângulo agudo mede $90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

$$\text{Daí: } \cos 40^\circ = \frac{12}{x} \Rightarrow 0,766 = \frac{12}{x} \Rightarrow x \cong 15,66 \text{ m}$$



16.



$$\sin \alpha = \frac{10}{y} \Rightarrow 0,6 = \frac{10}{y} \Rightarrow y = \frac{50}{3} \text{ m}$$

$$y^2 = 10^2 + x^2 \Rightarrow \left(\frac{50}{3}\right)^2 = 10^2 + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{2500}{9} - 100 \Rightarrow x^2 = \frac{1600}{9} \Rightarrow$$

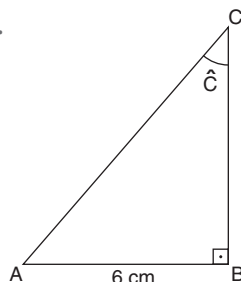
$$\Rightarrow x = \frac{40}{3} \text{ m} \cong 13,3 \text{ m}$$

17. O seno de um ângulo agudo é definido, no triângulo retângulo, pela razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa. Ora, a hipotenusa corresponde ao lado de maior medida em um triângulo retângulo, de modo que essa razão está entre 0 e 1. Para o cosseno vale a mesma ideia.

A tangente de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida do cateto adjacente ao ângulo.

Pode ocorrer que o cateto oposto meça mais ou menos (ou até tenha a mesma medida) que o adjacente, de modo que a tangente pode assumir qualquer valor real positivo.

18.



$$\begin{aligned}\text{a) } \sin \hat{C} &= \frac{AB}{AC} \Rightarrow 0,2 = \frac{6}{AC} \Rightarrow \\ \Rightarrow AC &= 30 \text{ cm}\end{aligned}$$

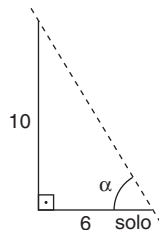
$$\text{b) } AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$30^2 = 6^2 + BC^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{900 - 36} = \sqrt{864} = 12\sqrt{6}$$

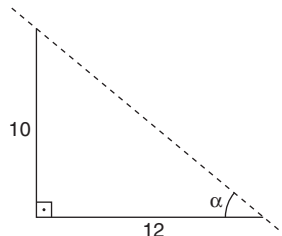
$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{12\sqrt{6}}{30} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

19. a)

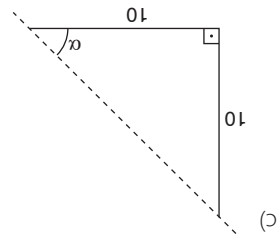


$$\tan \alpha = \frac{10}{6} = 1,666... \xRightarrow{\text{(tabela)}} \alpha \cong 59^\circ$$

b)

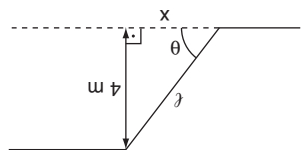


$$\tan \alpha = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 0,833... \xRightarrow{\text{(tabela)}} \alpha \cong 40^\circ$$



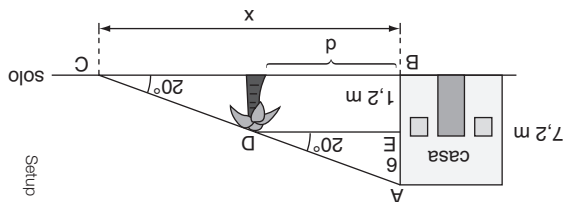
$$\text{tg } \alpha = \frac{10}{10} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ \quad (\text{tabela})$$

20.



$$\begin{aligned} \text{N\~ao, pois: } \text{tg } \theta &= \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{x}{4} \Rightarrow x\sqrt{2} = 20 \Rightarrow x = 10\sqrt{2} \\ \ell^2 &= 4^2 + x^2 = 16 + (10\sqrt{2})^2 = 16 + 200 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ell^2 = 216 \Rightarrow \ell = 6\sqrt{6} \text{ m} \end{aligned}$$

21.

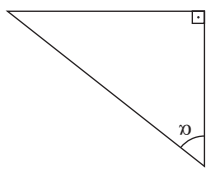


(ilustração sem escala)
Seja d a distância procurada entre a casa e a planta.
 $\triangle ABC \Rightarrow \text{tg } 20^\circ = \frac{x}{7.2} \Rightarrow 0,36397 = \frac{x}{7.2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \approx 19,8 \text{ m}$
 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$
 $\frac{AE}{ED} = \frac{BC}{d} \Rightarrow \frac{7.2}{6} = \frac{19.8}{d} \Rightarrow d = 16,5 \text{ m}$

$$\begin{aligned} 22. \text{ a) } \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \text{b) } \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2 = 1 - \frac{25}{144} = \frac{119}{144} \Rightarrow \sin x = \sqrt{\frac{119}{144}} = \frac{\sqrt{119}}{12} \\ \text{c) } \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = 1 - \frac{49}{16} = \frac{33}{16} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{33}}{4} \\ \text{tg } x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{33}}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{15}} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

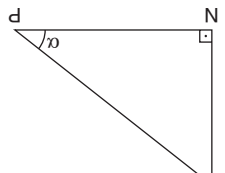
$$\begin{aligned} \text{d) } \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16} \Rightarrow \cos x = \frac{3}{4} \\ \text{tg } x &= \frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3\sqrt{7}} \end{aligned}$$

23.



$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{1} \Rightarrow \cos \alpha = 2 \cdot \sin \alpha$$

24.



$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha &= \frac{NP}{MN} = \frac{NP}{4} \Rightarrow MN = 4 \cdot NP \\ \text{A medida do cateto oposto a } \alpha &\text{ \u00e9 o qu\u00e1druplo da medida do outro cateto.} \end{aligned}$$

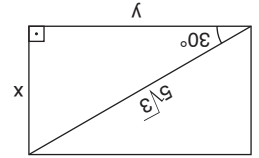
$$\begin{aligned} 25. \text{ a) } \sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ &= 1 \Rightarrow \sin^2 25^\circ + \left(\frac{10}{9}\right)^2 = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin^2 25^\circ = 1 - \frac{100}{81} \Rightarrow \sin^2 25^\circ = \frac{19}{81} \Rightarrow \sin 25^\circ = \frac{\sqrt{19}}{9} \\ \text{b) } \text{tg } 25^\circ &= \frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{19}}{9}}{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{19}}{10} \\ \text{c) } 65^\circ \text{ e } 25^\circ &\text{ s\~ao complementares; } \sin 65^\circ = \cos 25^\circ = \frac{10}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26. 90^\circ - x &\text{ \u00e9 o complemento de } x; \text{ assim, } \sin(90^\circ - x) = \cos x = \frac{3}{2} \\ \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1 - \frac{9}{4} = \frac{9}{5} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin x = \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \text{tg } x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{\sqrt{5}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 27. \text{ a) } \text{tg } 60^\circ &= \frac{x}{8\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow x = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin 45^\circ &= \frac{x}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{6} \Rightarrow x \cdot \sqrt{2} = 12 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

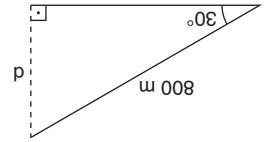
$$\begin{cases} \text{sen } 30^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{1} = 10\sqrt{3} \text{ cm} \\ \text{cos } 30^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{y} \Rightarrow y = \frac{10\sqrt{3}}{1} = 10\sqrt{3} \text{ cm} \end{cases}$$

O perímetro é: $2x + 2y = 2 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{1} + 2 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{1} = 40\sqrt{3} \text{ cm}$



31.

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{d}{800} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{d}{800} \Rightarrow d = 400 \text{ m}$$

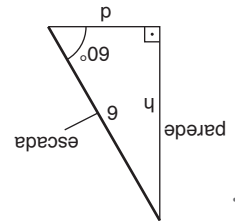


30.

a) $\text{cos } 60^\circ = \frac{x}{9} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{9} \Rightarrow x = 4,5 \text{ cm}$

b) $\text{tg } 60^\circ = \frac{x}{9} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{9} \Rightarrow x = 9\sqrt{3} \text{ cm}$

c) $\text{cos } 60^\circ = \frac{x}{9} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{9} \Rightarrow x = 4,5 \text{ cm}$



28.

a) $\text{sen } 30^\circ = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 4$

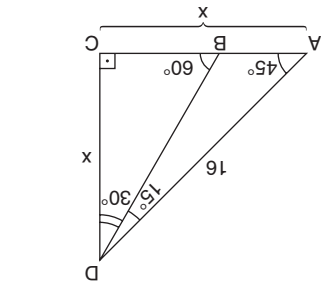
b) $\text{cos } 30^\circ = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

c) O triângulo é retângulo isósceles; o outro cateto também mede x.

Dat: $6^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$

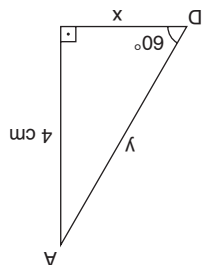
34. a) \overline{AC} é a altura relativa à hipotenusa \overline{BD} . Lembrando que o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto entre a medida de sua projeção na hipotenusa e a medida da hipotenusa, escrevemos:

$$\begin{aligned} AB^2 &= BD \cdot BC \Rightarrow 8^2 = (x+4) \cdot 4 \Rightarrow 16 = x+4 \Rightarrow x = 12 \\ \Delta BCD &\Rightarrow \text{tg } 60^\circ = \frac{BC}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{BC}{12} \Rightarrow BC = 12\sqrt{3} \\ AB &= AC - BC = 8\sqrt{2} - 12\sqrt{3} = 8\sqrt{2} - 12\sqrt{3} \text{ cm} \end{aligned}$$

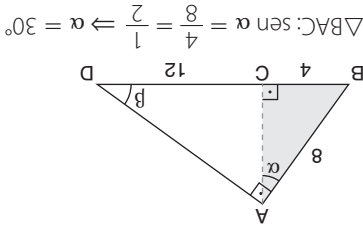


33.

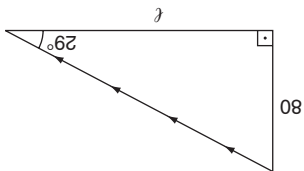
$$\begin{aligned} \text{O perímetro do paralelogramo é:} \\ 2 \cdot \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + 15 \right) + 2 \cdot \frac{3}{8\sqrt{3}} &= \frac{8\sqrt{3}}{3} + 30 + \frac{3}{4\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} + 30 + \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm} \end{aligned}$$



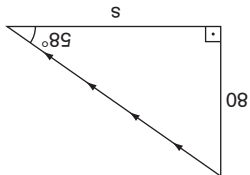
32.



$$\Delta BAC: \text{sen } \alpha = \frac{8}{4} = \frac{2}{1} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$



$$\begin{aligned} s &\approx 50 \text{ m} \\ s &= \frac{80}{\operatorname{tg} 58^\circ} \approx 1,6 \\ \operatorname{tg} 58^\circ &= \frac{s}{80} \end{aligned}$$



Exercícios complementares

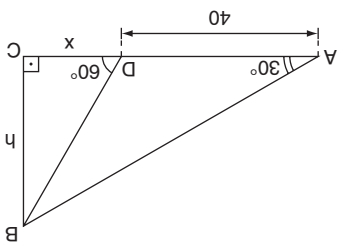
Na pior das hipóteses, haverá um momento em que teremos retirado: 12 bolas azuis, 12 vermelhas e 9 amarelas. Assim, já retiramos $12 + 12 + 9 = 45$ bolas e ainda não temos 13 da mesma cor. Seguramente, a próxima bola (46ª) a ser retirada será azul, preta ou vermelha e, desse modo, teremos 13 bolas de uma mesma cor.

Assim, devemos retirar um mínimo de 46 bolas.

Desafio

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos 60^\circ &= \frac{BD}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{40}{x} \Rightarrow x = 20 \text{ m} \\ \text{b) } \sin 60^\circ &= \frac{BD}{h} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{40}{h} \Rightarrow h \approx 20\sqrt{3} \text{ m} \end{aligned}$$

No $\triangle BCD$, vem:
Assim, $BD = 40$ m
o $\triangle ABD$ é isósceles de base AB .
Como $m(\angle BDA) = 120^\circ$, concluímos que $m(\angle ABD) = 30^\circ$ e



$$\Rightarrow \beta = 30^\circ \text{ e } \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2º modo: Como $\alpha = 30^\circ$, no $\triangle BAC$ concluímos que $m(\angle ABC) = 60^\circ$.

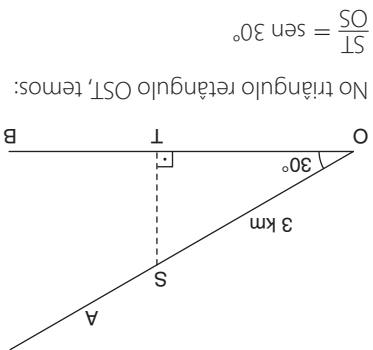
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \\ \Rightarrow AD &= 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mas } AD^2 &= 16^2 - 8^2 = 256 - 64 = 192 \Rightarrow \\ \frac{AB}{AD} \cdot \operatorname{tg} \beta &= \operatorname{tg} \beta \end{aligned}$$

35.

2.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 29^\circ &= \frac{\ell}{0,55} = \frac{\ell}{80} \\ \ell &\approx 145,45 \text{ m} \\ \text{Assim, } \frac{s}{\ell} &= \frac{145,5}{2,9} \Rightarrow \ell = 2,9 \text{ s} \end{aligned}$$

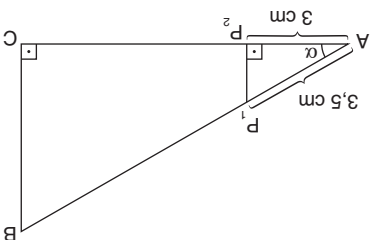


No triângulo retângulo OST, temos:

$$\frac{OS}{ST} = \sin 30^\circ$$

$$\text{então } ST = OS \cdot \sin 30^\circ = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1,5 \text{ km}$$

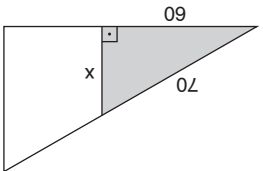
3. a) Em 1, s a formiga F_1 ocupará a posição P_1 e a formiga F_2 a posição P_2 (observe que F_1 deve ter uma velocidade maior que F_2).



$$\Delta AP_1 P_2: \cos \alpha = \frac{AP_1}{AP_2} = \frac{3,5}{3} \approx 0,857$$

Consultando a tabela, obtemos $\alpha = 31^\circ$. Assim, $m(\angle ABC) = 90^\circ - 31^\circ = 59^\circ$.

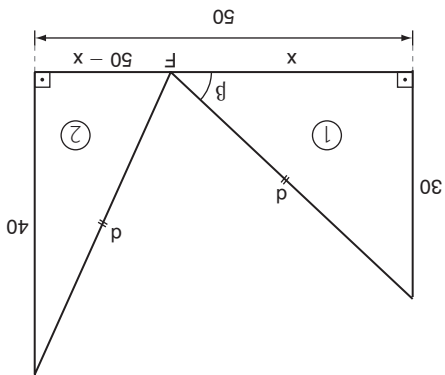
b) Em 20 s, F_1 percorre $20 \cdot 3,5 = 70$ cm; já F_2 percorre $20 \cdot 3 = 60$ cm.



A distância x procurada pode ser obtida do teorema de Pitágoras:
 $70^2 = 60^2 + x^2 \Rightarrow 4900 - 3600 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{1300} \Rightarrow x \approx 36 \text{ cm}$

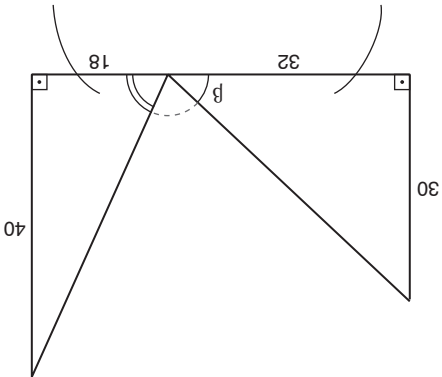
$$\begin{aligned} \text{4. } \Delta ABC: \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{AB}{5} \Rightarrow AB = 5\sqrt{3} \text{ m} \\ \Delta ABC: \operatorname{tg} 60^\circ &= \frac{BC}{BD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow BD = 15 \text{ m} \end{aligned}$$

Portanto, $CD = 15 + 5 = 20$ m.



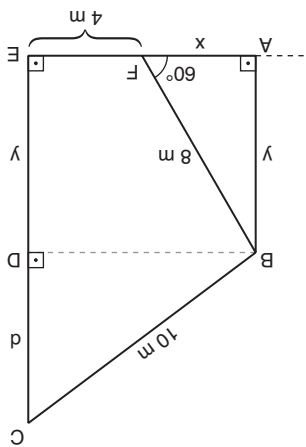
9. a)

Em ①: $d^2 = 30^2 + x^2$
 Em ②: $d^2 = 40^2 + (50 - x)^2$
 Podemos escrever:
 $30^2 + x^2 = 40^2 + (50 - x)^2$
 $900 + x^2 = 1600 + 2500 - 100x + x^2$
 $100x = 3200$
 $x = \frac{3200}{100} = 32$ (passos)
 Assim, as distâncias de F ao pé das duas torres são 32 passos e $50 - 32 = 18$ passos.



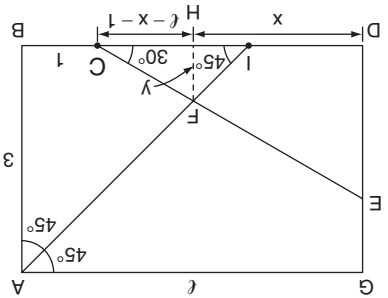
$\operatorname{tg} \beta = \frac{30}{32} = 0,9375$
 $\operatorname{tg} \gamma = \frac{18}{40} = 2,222...$
 Da tabela, $\beta = 43^\circ$;
 Da tabela, $\gamma = 66^\circ$.
 Como $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$,
 $\alpha = 180^\circ - 66^\circ - 43^\circ = 71^\circ$

10.



No $\triangle BFA$, temos:
 $\left\{ \begin{array}{l} \cos 60^\circ = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 5 \text{ m} \\ \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{y}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{10} \Rightarrow y = 5\sqrt{3} \text{ m} \end{array} \right.$
 $BD = 4 + 4 \Rightarrow BD = 8 \text{ m}$; $\triangle BCD$: $10^2 = d^2 + 8^2 \Rightarrow$
 $d = 6 \text{ m}$
 A altura do poste telefônico é, portanto:
 $4\sqrt{3} \text{ m} + 6 \text{ m} = (6 + 4\sqrt{3}) \text{ m}$

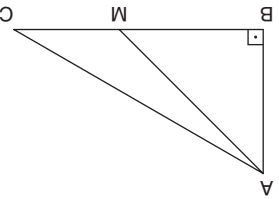
11. g



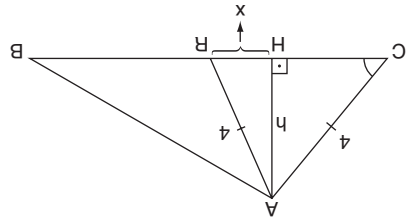
Façamos $BD = AG = \ell$.
 Seja H a projeção ortogonal de F sobre o lado \overline{DB} .
 Façamos $DH = x$ e $HF = y$.
 No $\triangle CFH$: $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{HC}{FH}$
 então $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\ell - x - 1}{y}$ ①
 No $\triangle FHH$: $\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{FH}{HH}$
 então $1 = \frac{y}{3 - \ell + x}$ ②

De ① e ② vem:
 $y = (\ell - x - 1) \frac{\sqrt{3}}{3} = (3 - \ell + x) \cdot 1$
 e daí resulta $x = \ell - 4 + \sqrt{3}$
 e, em seguida:
 $y = 3 - \ell + x = -1 + \sqrt{3}$
 Finalmente, no $\triangle HFC$:
 $FC^2 = (\ell - x - 1)^2 + y^2 =$
 $= (3 - \sqrt{3})^2 + (-1 + \sqrt{3})^2 =$
 $= 8(2 - \sqrt{3}) \text{ cm}$

12. a



No $\triangle ABC$, temos:
 $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 25 - 9 = 16$
 então $BC = 4 \text{ m}$
 No $\triangle ABM$, temos:
 $AM^2 = AB^2 + BM^2 = 9 + 4 = 13$
 então $AM = \sqrt{13} \approx 3,6 \text{ m}$



16.

$$4x = 6 \cdot QN^2 = 30$$

$$x = \frac{QM \cdot QN}{2} \Rightarrow 2x = QM \cdot QN \Rightarrow 2x = 3 \cdot QN^2$$

$$QM^2 + QN^2 = MN^2 \Rightarrow (3 \cdot QN)^2 + QN^2 = 50 \Rightarrow QN = \sqrt{5}$$

15.

$$MN^2 = 5^2 + 5^2 = 50 \Rightarrow MN = 5\sqrt{2}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{QM}{QN} = \frac{3}{1} \Rightarrow QM = 3 \cdot QN$$

$$\text{ou seja: } L_1 + L_2 \approx 20(2,73) \approx 54,6 \text{ m}$$

$$\text{Conclusão: } L_1 + L_2 = 20(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$$

$$\text{então } L_1 = 20\sqrt{3} \text{ m}$$

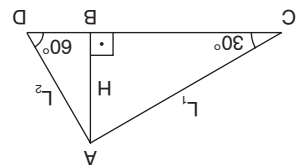
$$\text{sen } 30^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{H}{L_1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{H}{10\sqrt{3}}$$

No $\triangle ABC$, temos:

$$\text{então } L_2 = 20 \text{ m e } H = 10\sqrt{3}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{10}{H}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{L_2}{10}$$

No $\triangle ABD$, temos:

14.

$$H = BD + BC = \frac{h \cdot \text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta} + h = h \left(\frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta} + 1 \right)$$

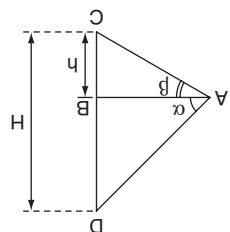
$$\frac{BD}{BC} = \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta} \Rightarrow BD = \frac{h \cdot \text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta}$$

De ① e ②, vem:

$$\text{tg } \beta = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = \frac{\text{tg } \beta}{BC} \quad \textcircled{2}$$

No $\triangle ABC$:

$$\text{tg } \alpha = \frac{BD}{AB} \Rightarrow AB = \frac{BD}{\text{tg } \alpha} \quad \textcircled{1}$$

No $\triangle ABD$:

13.

a) $\triangle ACH$: $\cos \hat{C} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{CH}{8} \Rightarrow CH = 1,5 = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow h = \frac{\sqrt{55}}{2} \text{ u.c.}$$

b) $\triangle AHR$: $4^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow 16 = \left(\frac{\sqrt{55}}{2} \right)^2 + x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 16 = \frac{55}{4} + x^2$$

$$x^2 = 16 - \frac{55}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow HR = 1,5$$

$$BC = BR + RC \Rightarrow BC = BR + 3$$

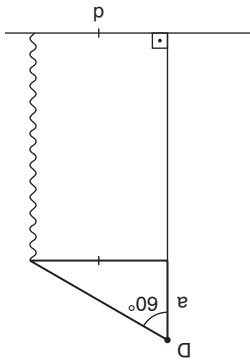
$$\text{Como } \frac{BR}{BC} = \frac{7}{4}, \text{ vem: } \frac{BR}{BR+3} = \frac{7}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4BR + 12 = 7BR \Rightarrow 12 = 3BR \Rightarrow BR = 4$$

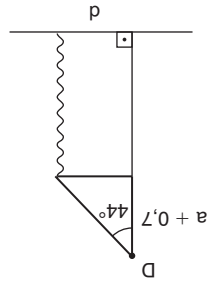
A área do $\triangle ABR$ é:

$$\frac{BR \cdot AH}{2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{55}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{55} \text{ u.a. (note que } \underline{AH} \text{ é a altura relativa ao lado } BR, \text{ no triângulo } ABR).$$

17.



$$\text{tg } 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{1,73}$$



$$\text{tg } 44^\circ = \frac{a + 0,7}{d}$$

$$0,96 = \frac{d}{\frac{d}{1,73} + 0,7}$$

$$d = \frac{0,96d}{1,73} + 0,7 \cdot 0,96$$

$$d = \left(1 - \frac{0,96}{1,73} \right) = 0,7 \cdot 0,96$$

$$0,77d = 0,7 \cdot 0,96 \cdot 1,73 \Rightarrow d \approx 1,5 \text{ m}$$

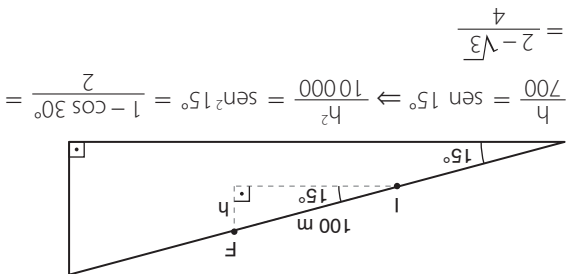
Testes

1. $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{\pi} \rightarrow \cos \frac{\pi}{6} > \cos \frac{\pi}{\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $A \rightarrow B \rightarrow X \rightarrow Z: 3 + \cos \frac{\pi}{6} + 1 > 4 + \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $A \rightarrow B \rightarrow Y \rightarrow Z: 3 + 1 + \cos \frac{\pi}{4} = 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $A \rightarrow C \rightarrow Y \rightarrow Z: 1 + 4 \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow Y \rightarrow Z: 3 + \cos \frac{\pi}{4} = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow X \rightarrow Z: 3 + \cos \frac{\pi}{6} > 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

O caminho de menor custo é $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow Y \rightarrow Z$.

Resposta: c.

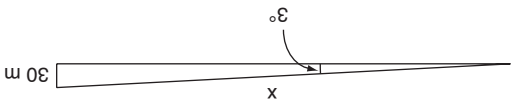
2.



$$h = \frac{10000}{h} \Rightarrow \frac{10000}{h^2} = \frac{1}{1 - \cos 30^\circ} = \frac{2}{1 - \cos 15^\circ} \Rightarrow \frac{10000}{h^2} = \frac{2}{1 - \cos 15^\circ} \Rightarrow h^2 = 10000 \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{4} \right) \approx 2500(2 - 1,73) \approx 675 \Rightarrow h = \sqrt{675} \approx 25,95 \text{ m}$$

Resposta: b.

3.



Seja x a distância a ser percorrida pelo ciclista. Temos:

$$\frac{x}{30} = \sin 3^\circ \Rightarrow \frac{x}{30} = \frac{\sin 3^\circ}{0,05} = 600 \text{ m}$$

O tempo necessário para a subida é:

$$t = \frac{600}{150} = 2,5 \text{ minutos}$$

Resposta: a.

4.

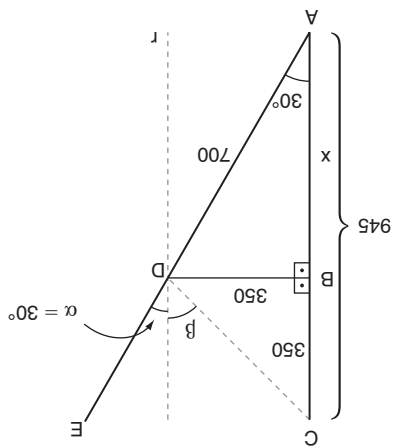


Temos $\triangle ADB \sim \triangle BEC$, então:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{d}{2} = \frac{2}{12 + d} \Rightarrow d^2 + 12d = 4 \Rightarrow d = 15 \text{ m}$$

Resposta: a.

19.



a) \overline{AC} e \overline{AE} são paralelas e \overline{AE} é uma transversal $\Rightarrow m(\widehat{BAD}) = 30^\circ$

b) No $\triangle BAD$ temos: $\cos 30^\circ = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{BD}{700} = \cos 30^\circ \Rightarrow BD = 350 \text{ (km)}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{700} \Rightarrow x = 350\sqrt{3} = 595 \text{ (km)}$$

$$BC = 945 - 595 = 350 \text{ (km)}$$

Assim, o triângulo BCD é isósceles e retângulo e, portanto, $m(\widehat{CDB}) = 45^\circ$. Como os ângulos \widehat{CDB} e β são complementares, segue que $\beta = 45^\circ$ e o ângulo de correção mede $\alpha + \beta = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$.

20. a) $\tan \alpha = \frac{1}{1} = 1$

$$m = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \tan \beta = \frac{1}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$n = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \tan \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

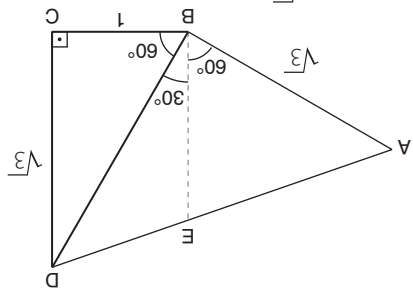
$$\alpha = 45^\circ \text{ e } \gamma = 30^\circ$$

$$\text{c) } \tan \beta = \frac{2}{1} < \frac{2}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow 30^\circ < \beta < 45^\circ$$

$$\text{Assim, } \alpha + \beta + \gamma = 45^\circ + \beta + 30^\circ = 75^\circ + \beta$$

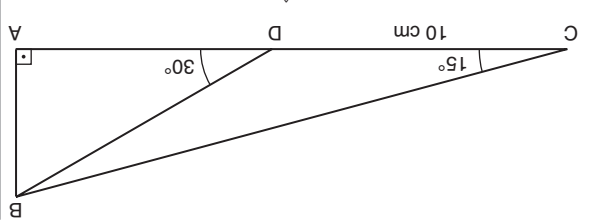
$$105^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 120^\circ$$

21. Unindo B a D:



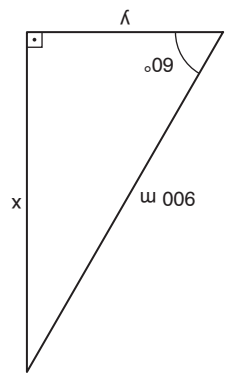
$$\tan \widehat{CBD} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CBD} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CDB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{EBD} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$\triangle ABD$ é retângulo em B: $AD^2 = \sqrt{3}^2 + 2^2 \Rightarrow AD = \sqrt{7}$

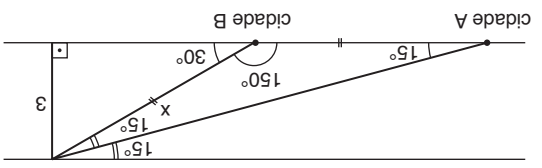
5. 

No triângulo BCD, o ângulo $\hat{D} = 30^\circ$ é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes, então:
 $30^\circ = \hat{C} + \hat{B} \Rightarrow 30^\circ = 15^\circ + \hat{B} \Rightarrow \hat{B} = 15^\circ$
 Assim, o triângulo BCD é isósceles, portanto $BD = CD = 10$ cm
 No triângulo retângulo ABD, temos:
 $\frac{BD}{AD} = \frac{1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{10}{AD} = 2 \Rightarrow AD = 5$ cm
 Resposta: b.

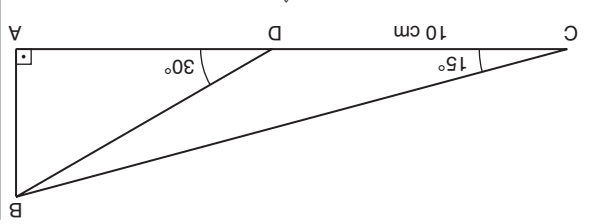
6. $\text{tg } \alpha = \frac{420 + BC}{h} = \frac{2}{1}$ ①
 $\text{tg } \beta = \frac{BC}{h} = \frac{3}{2}$ ②
 De ②, tem-se $BC = \frac{3h}{2}$ e, em ①, temos:
 $\frac{420 + \frac{3h}{2}}{h} = \frac{2}{1} \Rightarrow h = 840$
 Resposta: d.

7. Em 5 segundos, o foguete percorre 900 metros ($5 \cdot 180$).


Resposta: d.

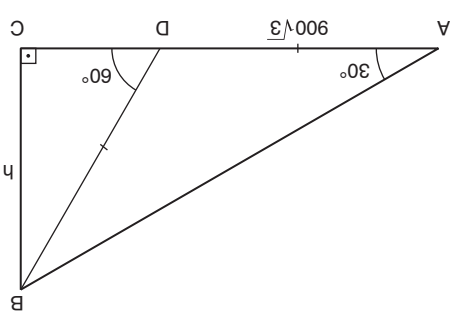
8. 

Logo, a distância entre as cidades A e B é 6 quilômetros.
 Resposta: e.

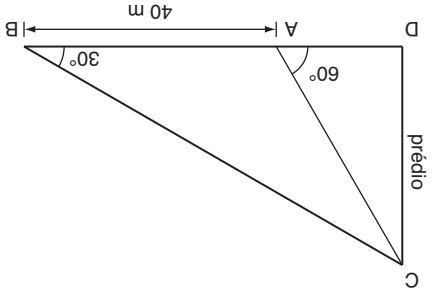
9. 

No triângulo BCD, o ângulo $\hat{D} = 30^\circ$ é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes, então:
 $30^\circ = \hat{C} + \hat{B} \Rightarrow 30^\circ = 15^\circ + \hat{B} \Rightarrow \hat{B} = 15^\circ$
 Assim, o triângulo BCD é isósceles, portanto $BD = CD = 10$ cm
 No triângulo retângulo ABD, temos:
 $\frac{BD}{AD} = \frac{1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{10}{AD} = 2 \Rightarrow AD = 5$ cm
 Resposta: b.

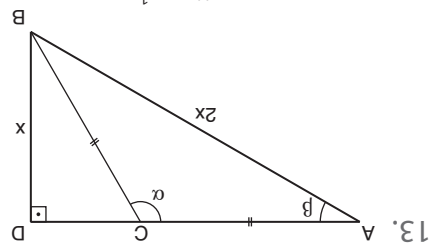
10. $(OP + PQ)^2 = OT^2 + TQ^2$
 $(r + d)^2 = r^2 + 6^2$
 $2,5^2 + 5d + d^2 = 6,25 + 36$
 $d^2 + 5d - 36 = 0 \Rightarrow d = 9$ (não serve) ou $d = 4$
 Resposta: a.

11. 

Note que:
 $m(\hat{B}DA) = 120^\circ$
 $m(\hat{ABD}) = 30^\circ$
 O $\triangle ABD$ é isósceles em AD = BD = $900\sqrt{3}$.
 No $\triangle BCD$, temos:
 $\frac{BD}{\sin 60^\circ} = \frac{BC}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{900\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{BC}{\frac{1}{2}} \Rightarrow BC = 900$
 Resposta: a.

12. 

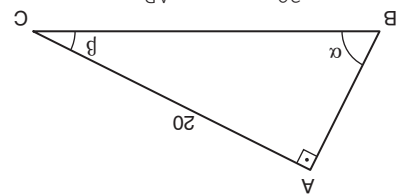
No triângulo ABC, o ângulo externo A = 60° é igual à soma dos internos não adjacentes, então $\hat{B} = \hat{C} = 30^\circ$. Assim, esse triângulo é isósceles, portanto $AC = AB = 40$ m.
 No triângulo ACD, temos:
 $\frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{AD}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{40}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{AD}{\frac{1}{2}} \Rightarrow AD = 20\sqrt{3} \approx 34,6$ m
 Resposta: a.



$$\triangle ADB: \text{sen } \beta = \frac{2x}{x} = 2$$

Como o $\triangle ACB$ é isósceles, temos:
 $\alpha + 2 \cdot 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 120^\circ$

Resposta: b.

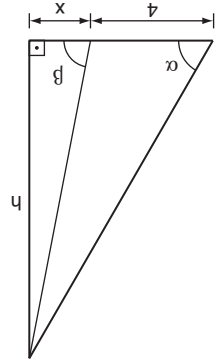


$$\text{sen } \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{20}{20} = 1 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

então:

$$\frac{BC}{AB} = 2 \Rightarrow \frac{20}{20} = 2 \Rightarrow AB = 10 \text{ cm}$$

Resposta: a.

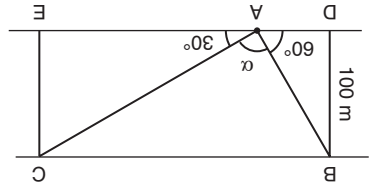


$$\frac{x}{h} = \text{tg } \beta = 3\sqrt{3} \Rightarrow x = 3\sqrt{3}h$$

Substituindo ① em ②, temos:

$$h = 6\sqrt{3}$$

Resposta: c.



No triângulo ABD, temos:

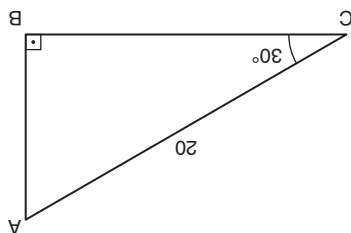
$$\text{sen } 60^\circ = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BD}{100} \Rightarrow BD = 50\sqrt{3} \text{ m}$$

No triângulo ACE, temos:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{CE}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CE}{100} \Rightarrow CE = 50 \text{ m}$$

Mas $60^\circ + \alpha + 30^\circ = 180^\circ$, então, $\alpha = 90^\circ$.

17.

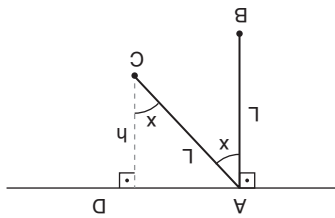


Resposta: c.

$$\text{então } BC = 200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3} \text{ m}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 200^2 + 200^2 = 200^2 \left(\frac{3}{1} + 1 \right) = 200^2 \cdot 4 = 40000$$

18.



Resposta: a.

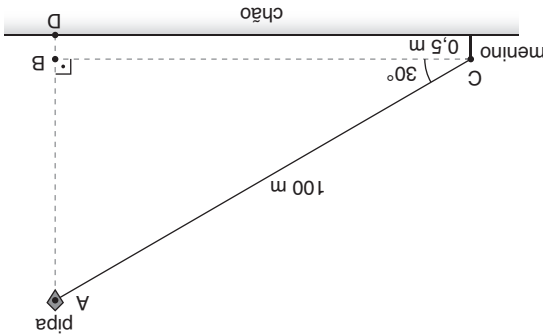
$$\text{Então } h(x) = L \cdot \cos x$$

No triângulo ACD, temos que $\cos x = \frac{L}{h}$

são congruentes.

Como AB e CD são paralelos entre si, os ângulos BÂC e ACD

19.



Resposta: d.

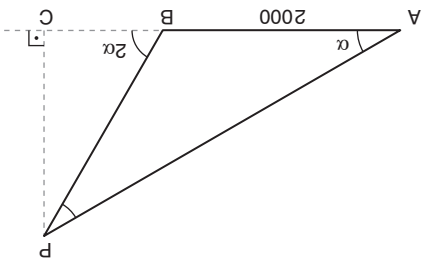
$$\text{sen } 30^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{100} \Rightarrow AB = 50 \text{ m}$$

$$AD = AB + 0,5 = 50,5 \text{ m}$$

$$\text{a) } F: \text{tg } D\hat{C}E = 1 \Rightarrow D\hat{C}E = 45^\circ \text{ e } D\hat{E}C = 45^\circ \Rightarrow DE = CD = 3 \text{ m}$$

$$= 3$$

23.



Resposta: c.

O menor valor possível para $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Então $\alpha = 40,9^\circ$

$$\Rightarrow \left(\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,13 \text{ ou } \tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \approx 0,67 \right)$$

$$\tan \alpha = \frac{BP}{PC} = \frac{x}{3} \Rightarrow \left(\tan \alpha = \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ ou } \tan \alpha = \frac{2}{3} \right) \Rightarrow$$

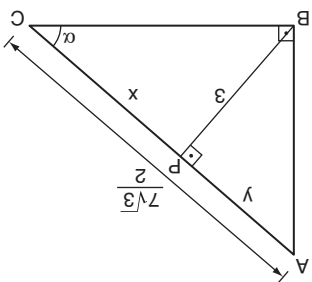
$$\text{ou } x = 2\sqrt{3}$$

$$9 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{2} - x \right) \cdot x \Rightarrow 2x^2 - 7\sqrt{3}x + 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Substituindo y de (1) em (2), vem:

$$BP^2 = AP \cdot PC \Rightarrow 9 = y \cdot x \quad (2)$$

$$AP + PC = AC \Rightarrow y + x = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (1)$$



22. A

Resposta: c.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{3} \Rightarrow H = 39$$

$$21. \text{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \text{sen} \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 2AD \cdot \tan DEC = 3$$

$$\tan DEC = \frac{DE}{3} \Rightarrow DE \cdot \tan DEC = 3 \Rightarrow$$

Por outro lado:

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot DE = 3AD \Rightarrow DE = 2AD$$

$$d) V, A_{DEC} = \frac{1}{2} A \Rightarrow A_{DEC} = A_{ABC} \Rightarrow$$

$$\text{sen} DEC = \sqrt{0,96}$$

Dai:

$$\text{sen}^2 DEC = 1 - 0,04 = 0,96$$

$$\Rightarrow \cos^2 DEC = 0,04$$

$$c) V, \text{sen} DEC = 0,2 \Rightarrow \cos DEC = 0,2 \Rightarrow$$

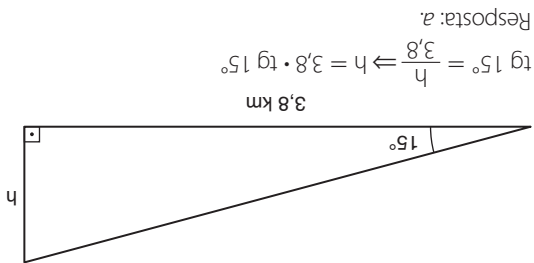
$$25m^2 - 4,5m^2 = 20,5m^2 \neq 3m \cdot 7m$$

Assim, a área do retângulo vale:

$$\frac{AC}{3m \cdot 3m} = 4,5m^2$$

A área do triângulo vale:

26.



Resposta: a.

$$\tan 15^\circ = \frac{h}{3,8} \Rightarrow h = 3,8 \cdot \tan 15^\circ$$

Resposta: c.

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow CD = 3,7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 3,20 \text{ km}$$

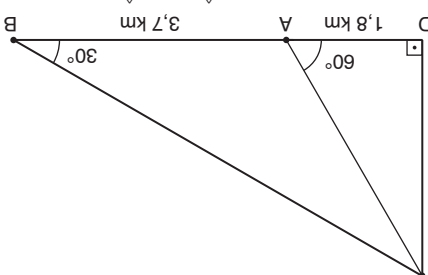
ou

$$\approx 3,11 \text{ km}$$

$$\Delta ACD: \tan 60^\circ = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow CD = 1,8 \cdot \sqrt{3} \approx$$

celas e daí $AC = AB = 3,7 \text{ km}$.

$$\Delta ABC: 60^\circ + \angle ACB \Rightarrow \angle ACB = 30^\circ \Rightarrow \Delta ABC \text{ é isós-}$$



25. c

Resposta: c.

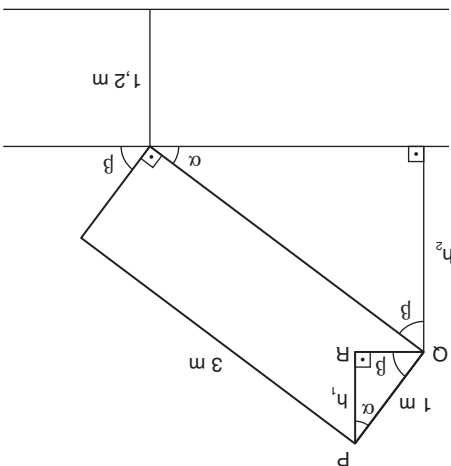
$$H = h_1 + h_2 + 1,2 = 3,8$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{h_1} \Rightarrow h_1 = 0,8$$

No triângulo PQR, temos:

$$\text{sen} \alpha = 0,6 = \frac{3}{h_2} \Rightarrow h_2 = 1,8$$

$$\text{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - (0,8)^2 = 0,36 \Rightarrow$$



24.

Resposta: b.

$$\text{sen } 2\alpha = \frac{BP}{PC} \Rightarrow \text{sen } 60^\circ = \frac{2000}{PC} \Rightarrow PC = 1000\sqrt{3} \text{ m}$$

No triângulo BCP, temos:

tanto esse triângulo é isósceles, então $BP = AB = 2000 \text{ m}$.
No triângulo ABP, temos $2\alpha = \alpha + \angle APB \Rightarrow \angle APB = \alpha$, por-
é o ponto da trajetória tal que $\angle APC = 90^\circ$.

A menor distância do barco até o ponto P é PC, onde C

conecte 

