

## Por que aprender função?

As funções exponenciais e logarítmicas estão presentes no estudo de fenômenos que envolvem taxas de crescimento e de decrescimento.

## Onde usar os conhecimentos sobre função?

Os conhecimentos sobre Função podem ser utilizados em várias áreas de conhecimento. Por exemplo, a escala Richter é uma escala logarítmica, usada na astronomia para medir o brilho das estrelas.

## Capítulo 1

### FUNÇÃO

Na Antiguidade, os matemáticos utilizavam tabelas de quadrados e de raízes quadradas e cúbicas tentando relacionar, por exemplo, a altura do som emitido por cordas submetidas a seu comprimento. Nessa época, o conceito de função não era claro.

No século XVII, Descartes e Pierre de Fermat visualizaram números, relacionando-os e inventando o plano cartesiano (sistema de eixos coordenados), quando se tornou possível transformar problemas geométricos estudando funções.

Portanto, a introdução de coordenadas permitiu a criação de novas curvas, iniciando o estudo de funções definidas por relações entre variáveis.

### Recordando Produto Cartesiano

Dados os conjuntos  $A = \{2, 3, 4\}$  e  $B = \{5, 6\}$ .

Construiremos um novo conjunto, formado por todos os pares ordenados, em que o primeiro elemento pertença ao A e o segundo elemento pertença ao B.

Esse conjunto chama-se Produto Cartesiano.

$A \times B$  (Lê-se: A cartesiano B)

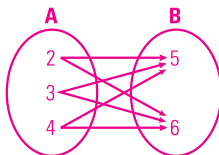
$A \times B = \{(2, 5), (2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\}$

#### Portanto:

Produto Cartesiano é o conjunto formado por todos os pares ordenados  $(x, y)$ , onde  $x \in A$  e  $y \in B$ , ou seja:

$A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ e } y \in B\}$

Representamos esse produto na forma de diagrama.



### Sistema Cartesiano

Podemos representar pares ordenados no plano cartesiano.

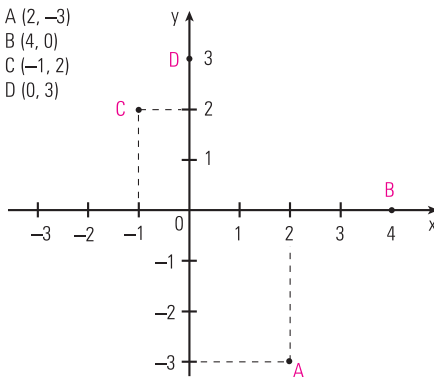
Veja alguns exemplos:

A (2, -3)

B (4, 0)

C (-1, 2)

D (0, 3)



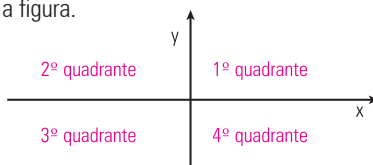
### Nomenclatura:

Eixo x = eixo das abscissas.

Eixo y = eixo das ordenadas.

Ponto (0, 0) = origem do sistema de coordenadas.

Os eixos x e y dividem o plano em quatro regiões denominadas quadrantes, como indica a figura.



## Saiba mais



### A INTERAÇÃO DA MATEMÁTICA E DA FÍSICA

Conceitos de Física e Matemática explicam os fenômenos corriqueiros de nosso dia-a-dia.

Por exemplo, quando nos olhamos no espelho, cada ponto do nosso corpo é considerado ponto objeto, e cada ponto que se vê no espelho é considerado ponto de imagem.

Isso é explicado pelo raciocínio. A imagem que sai do nosso corpo chega ao espelho, e a imagem que se vê corresponde à luz que sai refletida do espelho.

## Manual de Matemática

Exemplo:

O ponto C  $(-1, 2)$  dado na página anterior está no 2º quadrante.

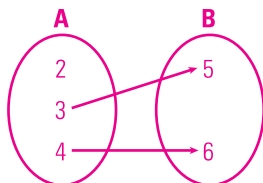
### Relação

Sejam os conjuntos  $A = \{2, 3, 4\}$  e  $B = \{5, 6\}$ , em que

$$A \times B = \{(2, 5), (2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\}$$

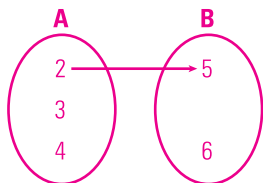
Consideremos alguns subconjuntos de  $A \times B$ :

a)



$$R_1 = \{(3, 5), (4, 6)\}$$

b)



$$R_2 = \{(2, 5)\}$$



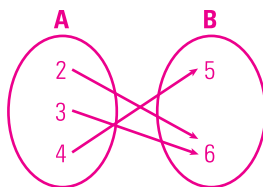
## Saiba mais

### COORDENADAS

Descartes visualizou os números relacionando-os com o plano cartesiano.

O plano cartesiano é fácil e mais claro visualmente. Ele é importante na resolução de problemas da vida prática, como para determinar área de terrenos, o crescimento anual da população de um país, a temperatura de um local a cada hora, e no próprio desenvolvimento da Matemática.

c)



$$R_3 = \{(2, 6), (3, 6), (4, 5)\}$$

Esses subconjuntos de  $A \times B$  são relações.

## Definindo:

Relação é qualquer subconjunto do produto cartesiano.

Uma relação  $R$  de  $A$  em  $B$  pode ser determinada por meio de uma lei de formação.

Com relação aos conjuntos  $A$  e  $B$  dados, podemos ter as seguintes relações:

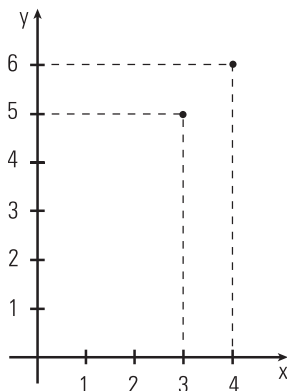
$$R_4 = \{(x, y) \in A \times B / x < y\} \text{ ou}$$

$$R_4 = \{(3, 5), (4, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 6), (4, 5)\}$$

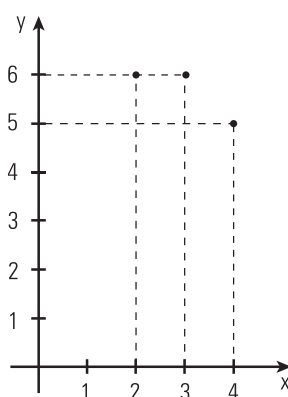
$$R_5 = \{(x, y) \in A \times B / x + 2\} \text{ ou } R_5 = \{(3, 5), (4, 6)\}$$

Ou também por meio de gráficos.

$$R_1 = \{(3, 5), (4, 6)\}$$



$$R_3 = \{(2, 6), (3, 6), (4, 5)\}$$

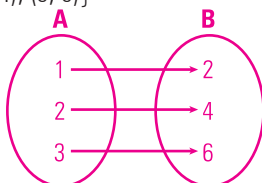


## Manual de Matemática

### Função

Seja o produto cartesiano:

$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6)\}$  e a relação  $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$



Observe que:

- todos os elementos de A têm imagem em B;
- cada elemento de A tem apenas uma imagem em B.

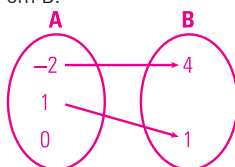
### Definição

Dados dois conjuntos A e B, não vazios, chama-se função de A em B ou aplicação de A em B toda relação que associa a cada elemento de A um único elemento em B.

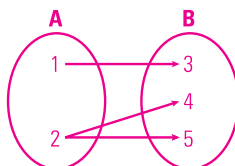
Notação  $f: A \rightarrow B$  ou  $y=f(x)$

Contra-exemplos:

Não são funções de A em B:



Nesse caso, há um elemento em A que não possui elementos correspondentes em B.

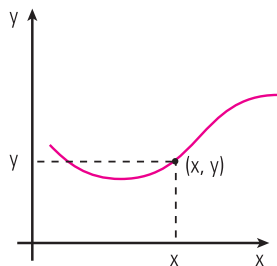


Há um elemento em A que possui mais de um elemento correspondente em B.

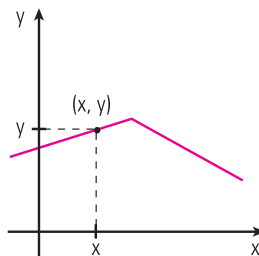
### Reconhecimento de Gráfico de Função

Observe cada gráfico e diga em quais deles  $y$  é uma função de  $x$ :

a)



b)





### Saiba mais

#### COMO PODEMOS APLICAR A FUNÇÃO NA QUÍMICA?

Perceba como a linguagem matemática pode ser empregada pela Química. Podemos relacionar o conjunto A, formado por água do mar, oxigênio, gasolina, álcool, água destilada, nitrogênio e prata com sua classificação B: substância pura simples, mistura ou substância pura composta, obtendo assim uma função em que para cada elemento há sempre um único elemento correspondente.

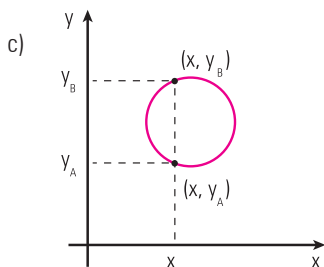
**A**

- água do mar
- oxigênio
- gasolina
- álcool
- água destilada
- nitrogênio
- prata

**B**

- mistura
- substância pura simples
- substância pura composta

Nos exemplos a e b, cada valor possível de  $x$  corresponde a um único  $y$ .



O exemplo c não é um gráfico de uma função, pois com um mesmo  $x$  não podemos encontrar dois pontos na curva.

Um modo prático para reconhecermos se um gráfico representa ou não uma função é traçarmos uma reta vertical sobre o gráfico (paralelo ao eixo  $y$ ).

Se essa reta intercepta o gráfico em mais de um ponto, ele não representa uma função.

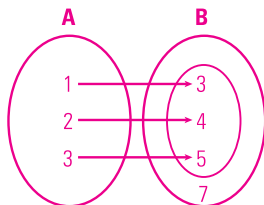
**Resumindo:**

Na representação gráfica de uma função  $y=f(x)$ , podemos visualizar aspectos importantes do comportamento da função, tais como:

- seu domínio e sua imagem;
- suas raízes;
- intervalos em que ele é crescente ou decrescente;
- pontos de máximo, de mínimo e de inflexão.

### **Domínio, Contradomínio e Imagem de uma Função**

Consideremos os conjuntos  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 7\}$  e a função  $f$  de  $A$  em  $B$ , definida por  $f(x) = x + 2$ , com  $x \in A$  e  $y \in B$ .





- O conjunto  $A = \{1, 2, 3\}$  é chamado domínio da função  $f$ . Será indicado por  $D$ .

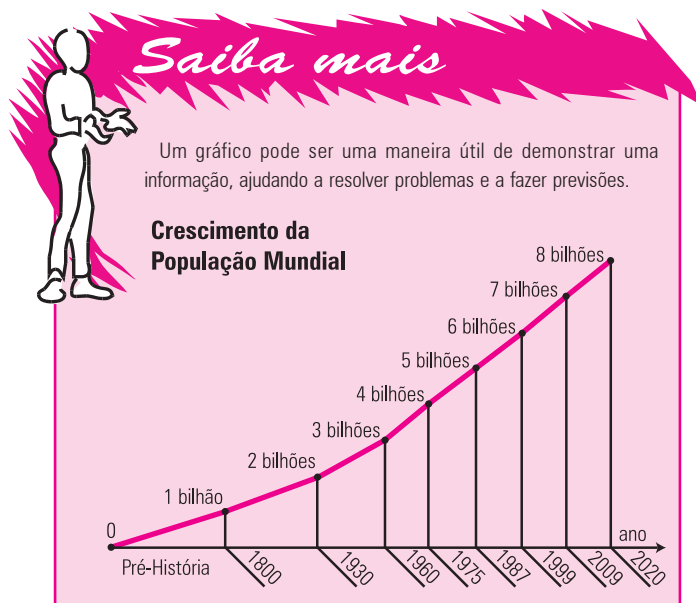
$$D = A = \{1, 2, 3\}$$

- O conjunto  $B = \{3, 4, 5, 7\}$  é chamado contradomínio da função  $f$  e será indicado por  $CD$ .

$$CD = B = \{3, 4, 5, 7\}$$

- O conjunto  $\{3, 4, 5\}$  é chamado de conjunto imagem da função  $f$ . Será indicado por  $Im$ .

$$Im = \{3, 4, 5\}$$



## Manual de Matemática

No exemplo dado, temos:

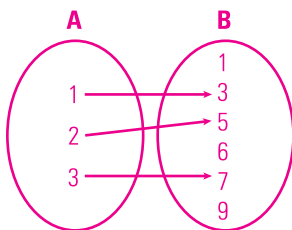
- 3 é imagem de 1,  $x=1$ ,  $y=3$  ou  $f(1)=3$
- 4 é imagem de 2,  $x=2$ ,  $y=4$  ou  $f(2)=4$
- 5 é imagem de 3,  $x=3$ ,  $y=5$  ou  $f(3)=5$

### Obs.:

$\text{Im} \subset \text{CD}$  (o conjunto imagem é um subconjunto do contradomínio).

Outros exemplos:

1) Sendo  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$ , determine o conjunto imagem da função  $f: A \rightarrow B$ , definida por  $f(x) = 2x + 1$



Solução:

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

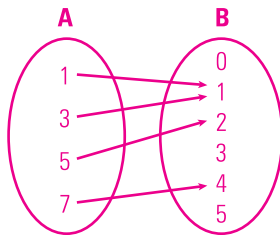
$$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$\text{Im}(f) = \{3, 5, 7\}$$

2) Verifique se os diagramas dados representam uma função de A em B. Em caso afirmativo, determine o domínio, o contradomínio e a imagem.

a)



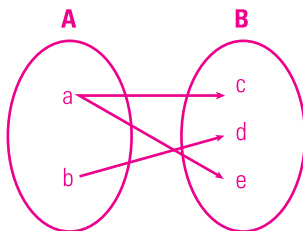
Representa uma função

$$D = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$\text{CD} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{Im} = \{1, 2, 3, 4\}$$

b)



Não representa uma função

3) Seja  $f$  uma função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 2x^2 - 1$ , calcule:

a)  $f(-1)$

Solução:  $f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 1$

$$f(-1) = 2 - 1$$

$$f(-1) = 1$$

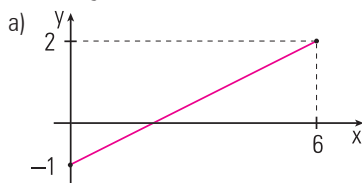
b)  $f\left(\frac{1}{2}\right)$

Solução:  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{2}$$

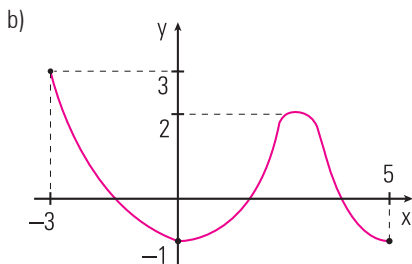
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

4) Nos gráficos a seguir, indique o domínio e o conjunto imagem das seguintes funções:



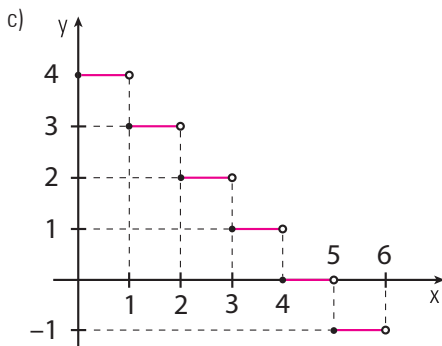
$$D = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 6\}$$

$$Im = \{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 2\}$$



$$D = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 5\}$$

$$Im = \{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 3\}$$



$$D = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x < 6\}$$

$$Im = \{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 4\}$$

Na representação gráfica, podemos calcular o domínio e a imagem de uma função da seguinte forma:

- o domínio da função é o conjunto de todos os pontos do eixo das abscissas (eixo  $x$ );
- a imagem da função é o conjunto de todos os pontos do eixo das ordenadas (eixo  $y$ ).

### Domínio de uma Função

Como já aprendemos, chamamos domínio de  $f(x)$  o conjunto formado pelos elementos  $x \in A$ .

Em alguns casos, é necessário excluirmos valores de  $x$  para que  $f(x)$  seja definida.

Exemplos:

Nas funções reais abaixo, determine o domínio:

a)  $f(x) = x^2 + x - 1$

$D(f) = \mathbb{R}$  pois, para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , existe

$$x^2 + x - 1 \in \mathbb{R}$$

b)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$

Observe que  $f(x)$  só será definida para  $x - 2 \neq 0$ .

Note que  $f(2) = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0}$ , ou seja,  $\nexists f(2)$ .

Devemos excluir do domínio os valores de  $x$  que anulem o denominador.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\}$$

c)  $f(x) = \sqrt{3x-5}$

Observe que  $f(x)$  só será definida para  $3x - 5 \geq 0$ . Resolvendo a inequação, temos:

$$3x - 5 \geq 0$$

$$3x \geq 5$$

$$x \geq \frac{5}{3}$$

Sempre que  $x$  aparece no radicando de um radical par de uma função, devemos excluir do domínio os valores de  $x$  que o tornam negativo.

$$\text{Então, } D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{5}{3}\right\}$$

d)  $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x-1}}$

$f(x)$  só será definida para  $x - 1 > 0$ .

$$x - 1 > 0$$

$$x > 1$$

$$\text{Então, } D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$$

## Manual de Matemática

e)  $f(x) = \sqrt[3]{5x+10}$

$D(f) = \mathbb{R}$ , pois quando  $x$  aparece no radicando de um radical ímpar, podemos colocar qualquer valor de  $x \in \mathbb{R}$ .

f)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}} - \sqrt{x+2}$

Solução:

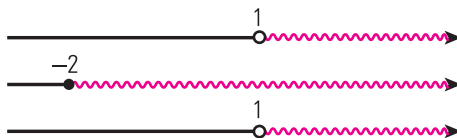
Devemos ter simultaneamente:

$$x - 1 > 0 \quad x + 2 \geq 0$$

$$x > 1 \quad x \geq -2$$

Colocando esses resultados na forma de intervalo, a solução será a intersecção dos intervalos na reta real.

Assim:



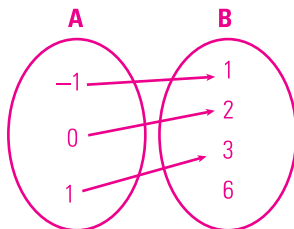
$$D = \{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$$

## Classificação das Funções

### Função Injetora

Uma função será injetora se a cada elemento distinto do conjunto A corresponder elementos distintos do conjunto B.

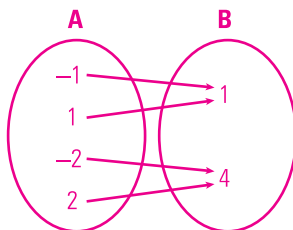
Exemplo:



### Função Sobrejetora

Uma função será sobrejetora se o conjunto imagem for igual ao conjunto  $B$ ,  $\text{Im}(f) = B$ .

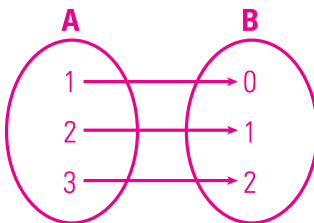
Exemplo:



### Função Bijetora

Uma função será bijetora se for ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.

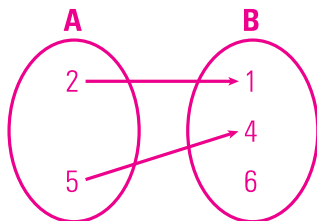
Exemplo:



### Função Inversa

São dados os conjuntos  $A = \{2, 5\}$  e  $B = \{1, 4, 6\}$ , sendo  $f: A \rightarrow B$  definida por  $f(x) = x - 1$ .

Representação na forma de diagrama:

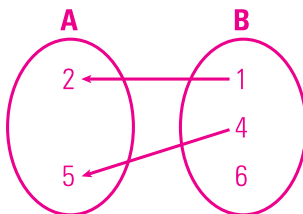


Obtemos os pares ordenados  $\{(2, 1), (5, 4)\}$ .

## Manual de Matemática

A função inversa de  $f$ , indicada por  $f^{-1}$ , é obtida invertendo a ordem dos elementos de cada par ordenado da função dada:

$$f^{-1} = \{(1, 2), (4, 5)\}$$



Na prática, na resolução de exercícios envolvendo função inversa, basta trocar  $x$  por  $y$  e isolar o novo  $y$ .

Exemplos:

a)  $y = x - 4$ . Trocando  $x$  por  $y$ , em  $y = x - 4$ , temos:

$$x = y - 4$$

$$y = x + 4$$

Isolando  $y$ , vem:

b)  $y = 3x + 5$  Trocando  $x$  por  $y$ , temos:

$$x = 3y + 5$$

$$3y = x - 5$$

Isolando  $y$ , vem:

$$y = \frac{x-5}{3}$$

c)  $y = \frac{x-1}{x+3}$ , com  $x \neq -3$

$$x = \frac{y-1}{y+3}$$

Trocando  $x$  por  $y$ , temos:

$$x(y+3) = y-1$$

$$xy + 3x = y - 1$$

$$xy - y = -3x - 1$$

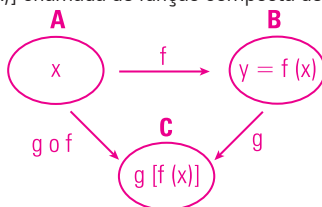
$$y(x-1) = -3x - 1$$

$$y = \frac{-3x-1}{x-1}$$



## Função Composta

Dadas duas funções,  $f$  e  $g$ , podemos obter uma nova função, representada por  $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$  chamada de função composta de  $g$  com  $f$ .



Exemplos:

1) Dadas as funções  $f$  e  $g$  definidas por:  $f(x) = x + 3$  e  $g(x) = 2x + 5$ , determine as funções compostas  $f \circ g(x)$ ,  $g \circ f(x)$  e  $f \circ f(x)$ .

Solução:

$$f \circ g(x) = f[g(x)]$$

$$f \circ f(x) = f[f(x)]$$

$$f[g(x)] = \underbrace{2x + 5}_{g(x)} + 3$$

$$f[f(x)] = x + 3 + 3$$

$$f[g(x)] = 2x + 8$$

$$f[f(x)] = x + 6$$

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

$$g[f(x)] = \underbrace{2(x + 3)}_{f(x)} + 5$$

$$g[f(x)] = 2x + 6 + 5$$

$$g[f(x)] = 2x + 11$$

2) Dadas as funções  $f(x) = 2 + 3x$  e  $g(x) = x + a$ , determine o valor de  $a$  de modo que  $f[g(x)] = g[f(x)]$ .

Solução:

$$f[g(x)] = 2 + 3(x + a)$$

$$g[f(x)] = 2 + 3x + a$$

$$f[g(x)] = 2 + 3x + 3a$$

Sendo:

$$f[g(x)] = g[f(x)]$$

$$2 + 3x + 3a = 2 + 3x + a$$

$$3a - a = 2 - 2$$

$$2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

## Capítulo 2

### FUNÇÃO DO 1º GRAU

São muitas as situações na nossa vida cotidiana – especialmente nas diversas profissões – em que a relação entre duas grandezas é expressa graficamente por uma reta.

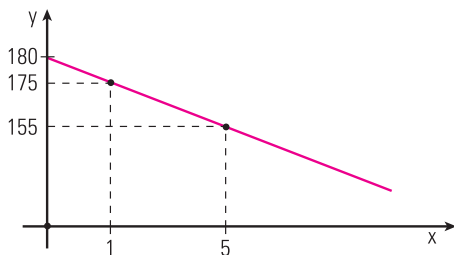
Um exemplo é um automóvel em movimento, a relação existente entre a distância e o tempo do percurso. Se construirmos um gráfico para essa situação, será uma reta.

Analisando outro exemplo:

Uma pessoa que precisava emagrecer foi ao médico e, sob orientação médica, fez um regime. Sabendo que o peso da pessoa era de 180 kg e ela emagreceu 5 quilos por semana, podemos estabelecer uma equação para o peso em função do tempo:

$$f(x) = 180 - 5x$$

Construindo o gráfico, obtemos:



Sabendo que o peso ideal da pessoa era de 65 kg, quantas semanas serão necessárias para que a pessoa adquira o peso ideal?

$$\begin{aligned} \text{Igualamos a } f(x) &= 180 - 5x \text{ a } 65: \\ 180 - 5x &= 65 \\ -5x &= 65 - 180 \\ 5x &= 115 \\ x &= 23 \end{aligned}$$

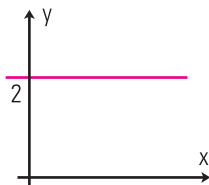
O regime durou 23 semanas.

### Função Constante

Chamamos de função constante toda função do tipo:  $f(x) = b$

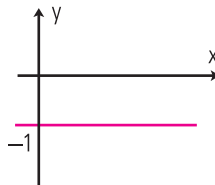
Exemplos:

a)



$$f(x) = 2$$

b)



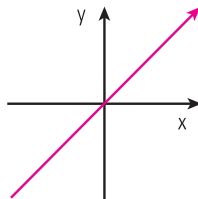
$$f(x) = -1$$

Observe que na função constante o domínio é  $D(f) = \mathbb{R}$  e  $\text{Im} = \{b\}$ .

### Função Identidade

Chamamos de função identidade toda função do tipo:  $f(x) = x$ .

Sendo a ordenada igual à abscissa, o ponto  $(x, x)$  passa pela origem dos eixos.

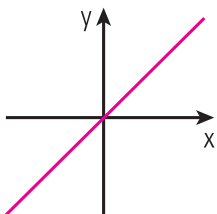


Na função identidade  $f(x) = x$ , temos  $D(f) = \mathbb{R}$  e  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ .

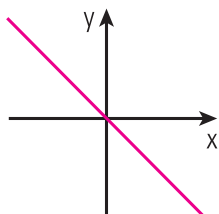
### Função Linear

Chamamos de função linear toda função do tipo:  $f(x) = ax$ , com  $a \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ .

A representação gráfica será uma reta que passa pela origem do sistema de eixos.



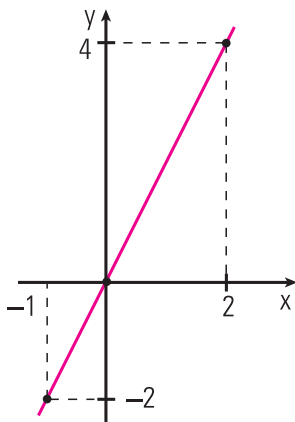
Note que, se  $a > 0$ , então  $f(x) = ax$  é crescente.



Se  $a < 0$ , então  $f(x) = ax$  é decrescente.

Exemplos:

a)  $f(x) = 2x$



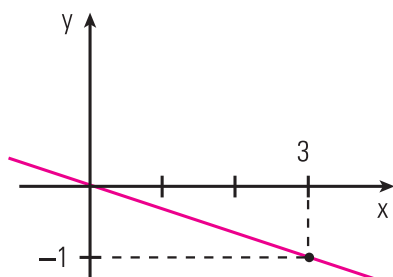
Atribuindo valores para  $x$ , temos:

$$f(0) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$b) f(x) = \frac{-1}{3} x$$



Atribuindo valores para  $x$ , temos:

$$f(0) = \frac{-1}{3} \cdot 0 = 0$$

$$f(3) = \frac{-1}{3} \cdot 3 = -1$$

### Função Afim ou do 1º Grau

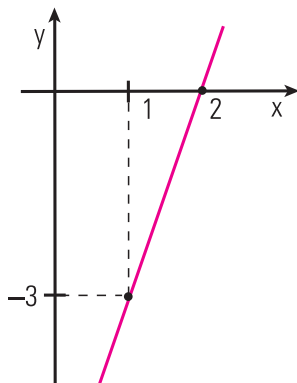
Função afim ou função do 1º grau é toda função do tipo:

$$f(x) = ax + b$$

Seu gráfico é sempre uma reta, e precisamos apenas de dois pontos distintos.

Exemplos:

$$a) f(x) = 3x - 6$$



Atribuindo valores para  $x$ , temos:

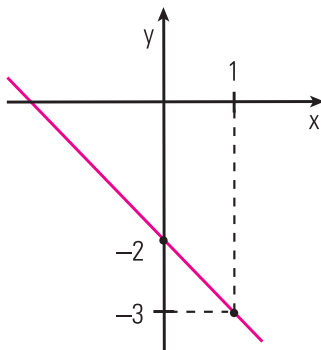
$$f(1) = 3 \cdot 1 - 6 = -3$$

$$f(2) = 3 \cdot 2 - 6 = 0$$

Note que  $a = 3$ , então

$f(x) = 3x - 6$  é crescente.

b)  $f(x) = -x - 2$



Atribuindo valores para  $x$ , temos:

$$f(0) = -0 - 2 = -2$$

$$f(1) = -1 - 2 = -3$$

Note que  $a = -1$ , então

$f(x) = -x - 2$  é decrescente.

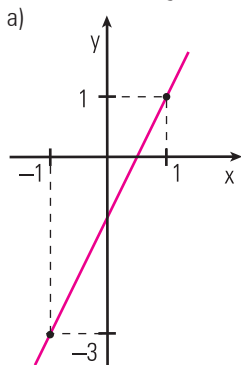
### Obs.:

Na função do 1º grau  $f(x) = ax + b$ , **a** recebe o nome de coeficiente angular (está relacionado com o ângulo que a reta forma com o eixo  $x$ ) e **b** é chamado coeficiente linear (é o ponto onde a reta corta o eixo  $y$ ).

## Determinação de uma Função por meio do Gráfico

Exemplos:

Determine as funções representadas nos gráficos abaixo:



Pelo gráfico temos uma função do 1º grau, pois é uma reta.

Logo, ela é do tipo  $f(x) = ax + b$ .

Temos que  $f(1) = 1$  e  $f(-1) = -3$

Substituindo na função  $f(x) = ax + b$ , temos:

$$f(1) = a \cdot 1 + b = 1 \text{ ou } a + b = 1$$

$$f(-1) = a \cdot (-1) + b = -3 \text{ ou } -a + b = -3$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = -3 \end{cases}$$


---


$$2b = -2$$

$$b = -1$$

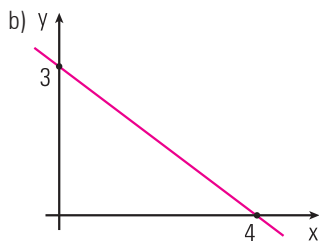
Substituindo  $b = -1$  na

1ª equação, temos:

$$a - 1 = 1$$

$$a = 2$$

Portanto, a função representada no gráfico é  $f(x) = 2x - 1$ .



Solução:

Tomando os pontos no gráfico, temos  $f(4) = 0$  e  $f(0) = 3$

$$f(4) = a \cdot 4 + b = 0 \quad \text{ou} \quad 4a + b = 0$$

$$f(0) = a \cdot 0 + b = 3 \quad \text{ou} \quad b = 3$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 4a + b = 0 \\ b = 3 \end{cases}$$

Substituindo  $b = 3$  na

1ª equação, temos:

$$4a + 3 = 0$$

$$4a = -3$$

$$a = \frac{-3}{4}$$

Portanto, a função representada no gráfico é  $f(x) = \frac{-3}{4}x + 3$ .

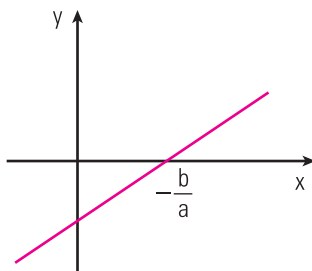
### Zero ou Raiz

É o ponto onde a reta corta o eixo  $x$ .

Nesse ponto  $y = 0$

Então,  $f(x) = ax + b = 0$

$$x = -\frac{b}{a} \qquad \left(-\frac{b}{a}, 0\right)$$



Exemplos:

1) Determine a raiz da função  $f(x) = 3x - 9$  e faça a representação gráfica.

Solução:

Igualando  $f(x)=0$ , temos:

$$3x - 9 = 0$$

$$3x = 9$$

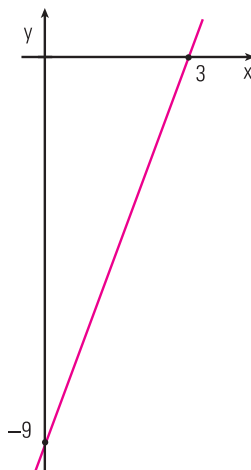
$$x = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

Obtemos o ponto  $(3, 0)$

$b = -9$ , então  $(0, -9)$ .

Com esses pontos  
podemos construir  
o gráfico.





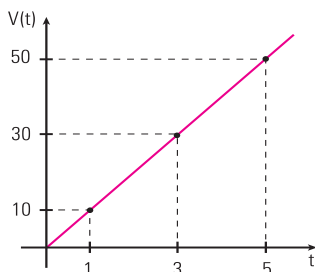
2) Uma caixa de forma cúbica e capacidade de 2.000 litros está totalmente cheia. Juliana deseja lavar o quintal e abriu a torneira que retirava 10 litros de água por minuto. Podemos relacionar o tempo decorrido na lavagem e o volume de água consumido.

| Tempo | Volume |
|-------|--------|
| 0     | 0      |
| 1     | 10     |
| 3     | 30     |
| 5     | 50     |

Então, com os dados da tabela podemos determinar a função

$$V(t) = 10t$$

Construindo o gráfico, temos:



### Saiba mais



#### ÁGUA, UM BEM PRECIOSO

Como percebemos no exemplo acima, o desperdício de água no Brasil ocorre em grande quantidade.

Lavar quintais e calçadas é hábito de muitos brasileiros, enquanto outras regiões sofrem as consequências da seca.

O racionamento de água já atinge todas as regiões em determinadas épocas do ano.

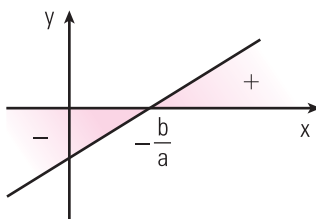
A água é um recurso findável, e não desperdiçar é preciso.

## Varição do Sinal

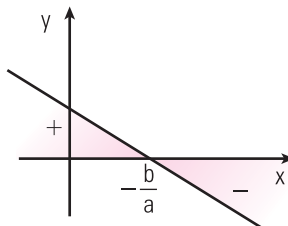
Se  $x = -\frac{b}{a}$  é raiz de  $f(x) = ax + b$ , podemos estudar a variação do sinal da função.

Assim:

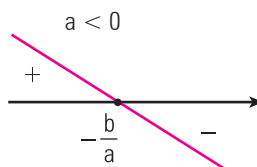
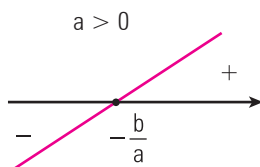
$$a > 0 \begin{cases} f(x) > 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a} \\ f(x) < 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a} \\ f(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$



$$a < 0 \begin{cases} f(x) > 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a} \\ f(x) < 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a} \\ f(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$



Resumindo:



Observe que para  $x > -\frac{b}{a}$  a função tem o mesmo sinal de  $a$  e para  $x < -\frac{b}{a}$ , a função tem sinal contrário de  $a$ :



Exemplos:

Estudar a variação dos sinais das seguintes funções:

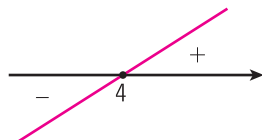
a)  $f(x) = x - 4$

Solução:

Calculando a raiz de  $f(x) = x - 4$ , temos:

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

Como  $a > 0$ , temos:



Assim:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \Rightarrow x > 4 \\ f(x) < 0 \Rightarrow x < 4 \\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

b)  $f(x) = 1 - 3x$

Solução:

Calculando a raiz de  $f(x) = 1 - 3x$ , temos:

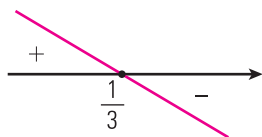
$$1 - 3x = 0$$

$$-3x = -1$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Como  $a < 0$ , temos:



Assim:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{3} \\ f(x) < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3} \\ f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

## Inequação do 1º Grau

Dada a função do 1º grau,  $f(x) = ax + b$ , com  $a \neq 0$ , chamamos inequação do 1º grau a qualquer desigualdade ( $>$ ,  $\geq$ ,  $<$ ,  $\leq$ ).

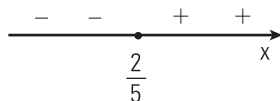
Exemplos:

a)  $5x - 2 \leq 0$

$$5x \leq 2$$

$$x \leq \frac{2}{5}$$

$$a > 0$$



Logo,  $5x - 2 \leq 0$  para  $\left\{ x \in \mathbb{R} / x \leq \frac{2}{5} \right\}$

$$b) -2x + 4 > 0$$

$$-2x + 4 > 0$$

$$-2x > -4$$

$a < 0$  (troca-se o sinal de desigualdade)

$$2x < 4$$

$$x < 2$$

$$\text{Logo, } S = \{x \in \mathbb{R} / x < 2\}$$

### Inequação-Produto

Chamamos inequação-produto a qualquer das inequações:

$$f(x) \cdot g(x) > 0 \quad f(x) \cdot g(x) < 0$$

$$f(x) \cdot g(x) \geq 0 \quad f(x) \cdot g(x) \leq 0$$

Na resolução de uma inequação-produto, resolvemos separadamente a variação do sinal de cada função, em seguida, a variação de sinal do produto.

Veja os exemplos:

a) Para quais valores de  $x$  temos  $(x + 1) \cdot (2 - x) \leq 0$ ?

Solução:

Chamando  $f(x) = x + 1$  e  $g(x) = 2 - x$ , temos:

$$x + 1 = 0$$

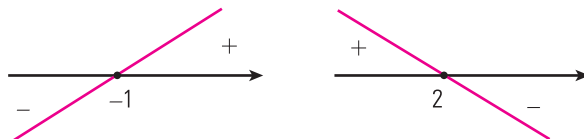
$$2 - x = 0$$

$$x = -1$$

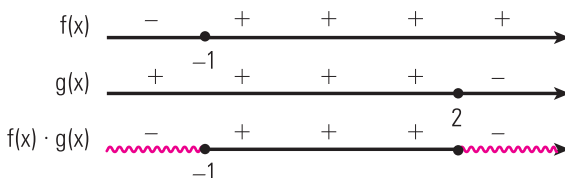
$$-x = -2$$

$$x = 2$$

Estudando os sinais das funções:



Estudando os sinais do produto das funções:



Os valores de  $x$  que satisfazem a inequação:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2\}$$

b) Determine o domínio da função:

$$y = \sqrt{(2x + 5) \cdot (-3x + 1)}$$

Solução:

Para determinarmos o domínio da função  $y = \sqrt{(2x + 5) \cdot (-3x + 1)}$ , é necessário que  $(2x + 5) \cdot (-3x + 1) \geq 0$ .

Achando as raízes das funções:

$$2x + 5 = 0$$

$$-3x + 1 = 0$$

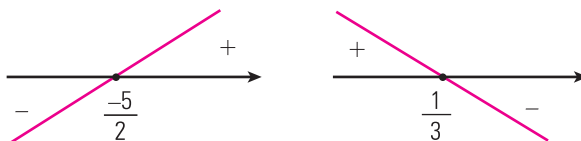
$$2x = -5$$

$$-3x = -1$$

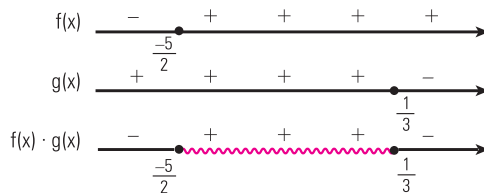
$$x = \frac{-5}{2}$$

$$3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Estudando os sinais das funções:



Estudando os sinais do produto das funções:



$$\text{Portanto, } D = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{-5}{2} \leq x \leq \frac{1}{3}\right\}$$

## Inequação Quociente

Na inequação quociente, a regra de sinais é a mesma que na do produto. Há somente uma restrição: o denominador deve ser diferente de zero.

## Manual de Matemática

Exemplos:

Resolver a inequação quociente:

$$a) \frac{x-3}{x+5} \geq 0$$

Achando as raízes das funções:

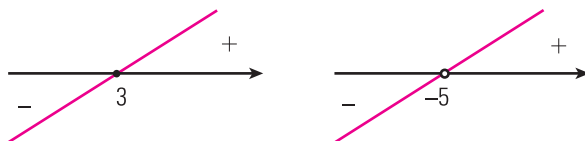
$$x - 3 = 0$$

$$x + 5 = 0$$

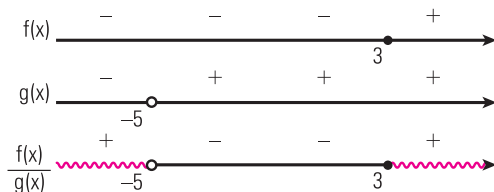
$$x = 3$$

$$x = -5$$

Estudando os sinais das funções:



Como  $-5$  anula o denominador, devemos excluí-lo.



$$S = \{x \in \mathbb{R} / x < -5 \text{ ou } x \geq 3\}$$

$$b) \frac{2x-1}{x+2} < 1$$

Neste exemplo, devemos fazer a seguinte transformação:

$$\frac{2x-1}{x+2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{2x-1-(x+2)}{(x+2)} < 0 \Rightarrow \frac{2x-1-x-2}{x+2} \Rightarrow \frac{x-3}{x+2} < 0$$

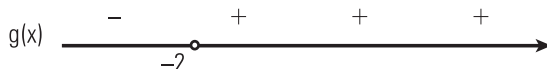
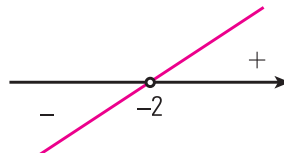
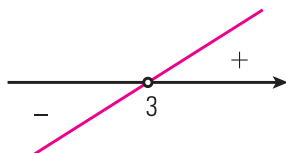
Resolvendo a inequação  $\frac{x-3}{x+2} < 0$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$



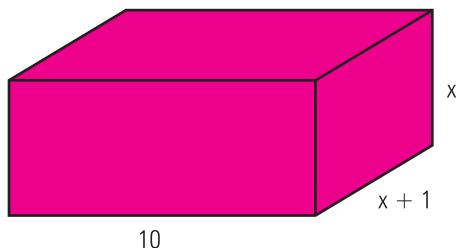
$$S = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x < 3\}$$

### Capítulo 3

## FUNÇÃO DO 2º GRAU OU QUADRÁTICA

Considere o seguinte problema:

Qual é a área (y) de uma caixa em forma de paralelepípedo retângulo cujas dimensões são: x, x + 1 e 10?



## Manual de Matemática

Podemos achar a área aplicando a fórmula

$$y = 2(x + 1) \cdot x + 2 \cdot 10 \cdot (x + 1) + 2 \cdot x \cdot 10$$

$$y = 2x^2 + 2x + 20x + 20 + 20x$$

$$y = 2x^2 + 42x + 20$$

Com esse resultado, obtemos uma função do 2º grau.

**Definindo:**

É toda função que pode ser escrita na forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

Exemplos:

a)  $f(x) = x^2 - 2x$

b)  $f(x) = 1 - 4x^2$

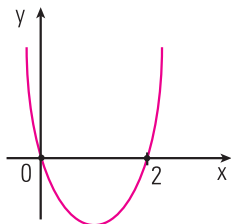
c)  $f(x) = x^2 - 2x + 1$

d)  $f(x) = -x^2 + 9$

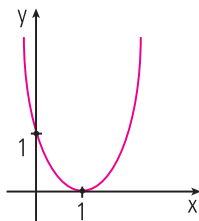
### Gráfico

O gráfico de uma função do 2º grau é uma parábola.

Exemplos:

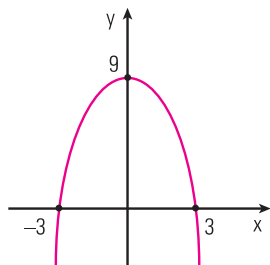


$$f(x) = x^2 - 2x$$



$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$





$$f(x) = -x^2 + 9$$

### Intersecção com Eixo y

A função do 2º grau intercepta y no ponto (0, c).

Exemplos:

a)  $f(x) = x^2 - 4x + 4$

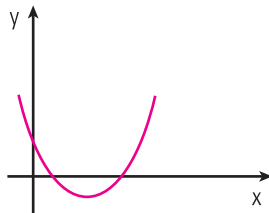
A função  $f(x) = x^2 - 4x + 4$  intercepta y no ponto (0, 4).

b)  $f(x) = 9 - x^2$

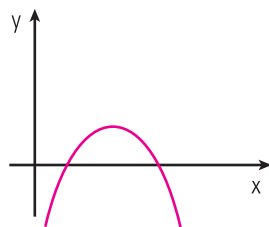
A função  $f(x) = 9 - x^2$  intercepta y no ponto (0, 9)

### Concavidade

- Se  $a > 0$ , a concavidade é voltada para cima:



- Se  $a < 0$ , a concavidade é voltada para baixo:



### Zeros ou Raízes

A função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  apresenta raízes quando

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Suas raízes são:  $x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  e  $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

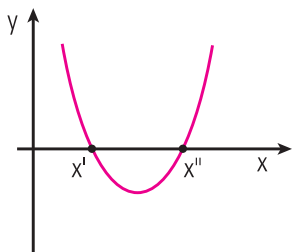
em que  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- Se  $\Delta > 0$ , a função apresenta duas raízes reais distintas.
- Se  $\Delta < 0$ , a função não apresenta raízes reais.
- Se  $\Delta = 0$ , a função apresenta duas raízes reais e iguais.

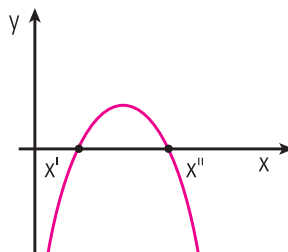
### Interpretação das Raízes no Gráfico

- Se  $\Delta > 0$ , o gráfico intercepta o eixo x em dois pontos.

$$a > 0$$

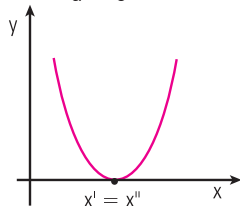


$$a < 0$$

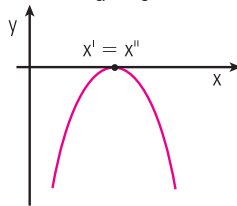


- Se  $\Delta = 0$ , o gráfico intercepta o eixo x somente em um ponto.

$$a > 0$$

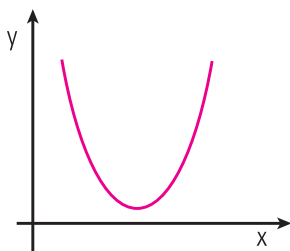


$$a < 0$$

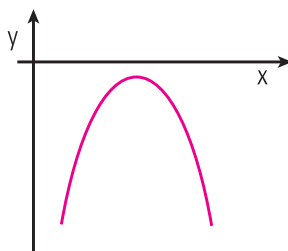


- Se  $\Delta < 0$ , o gráfico não intercepta o eixo x.

$a > 0$



$a < 0$



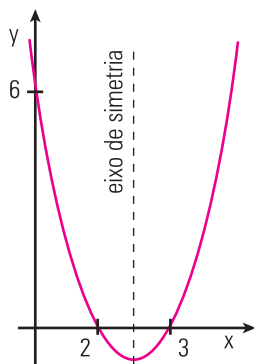
## Eixo de Simetria

$\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$  é o ponto de encontro do eixo de simetria com eixo x, no qual

$$\frac{-b}{2a} = \frac{x' + x''}{2}.$$

Exemplo:

Na função  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ , temos:



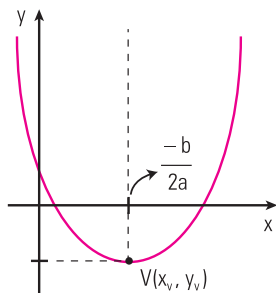
Eixo de simetria:

$$\frac{x' + x''}{2} = \frac{2 + 3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Portanto, o eixo de simetria é a reta vertical que divide a parábola em duas partes iguais.

### Vértice da Parábola

É representado pela intersecção do eixo de simetria com gráfico.



As coordenadas do vértice são:  $x_v = \frac{-b}{2a}$  e  $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$

### Valor Máximo ou Mínimo

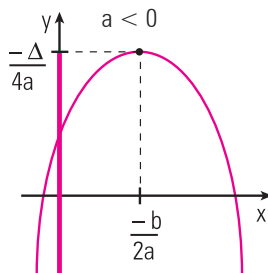
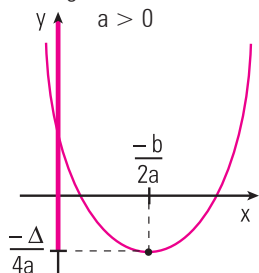
Os valores máximo ou mínimo são dados por  $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$  (ordenada do vértice).

Se  $a > 0$ ,  $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$  tem valor mínimo.

Se  $a < 0$ ,  $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$  tem valor máximo.

### Imagem

Dados os gráficos abaixo:



$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} / y \geq y_v\} \text{ ou } \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} / y \leq y_v\} \text{ ou}$$

$$\text{Im}(f) = \left[ \frac{-\Delta}{4a}, \infty \right[ \quad \text{Im}(f) = \left] -\infty, \frac{-\Delta}{4a} \right]$$

Exemplo:

Construa o gráfico da função  $f(x) = x^2 - x - 6$  determinando:

- as raízes;
- as coordenadas do vértice;
- a intersecção da parábola com o eixo  $y$ ;
- o conjunto imagem.

a) raízes

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad a = 1, \quad b = -1, \quad c = -6$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$$

$$\Delta = 1 + 24$$

$$\Delta = 25$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \quad \begin{cases} x' = \frac{1+5}{2} = 3 \\ x'' = \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

b) coordenadas do vértice

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2} \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-25}{4}$$

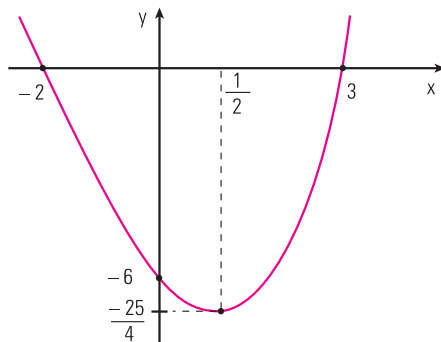
$$V\left(\frac{1}{2}, \frac{-25}{4}\right)$$

c) intersecção da parábola com o eixo  $y$

A função  $f(x) = x^2 - x - 6$  intercepta o eixo  $y$  no ponto  $(0, -6)$ .

d) conjunto imagem

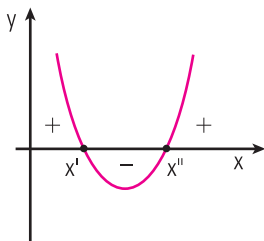
$$\text{Im}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} / y \geq \frac{-25}{4} \right\}$$



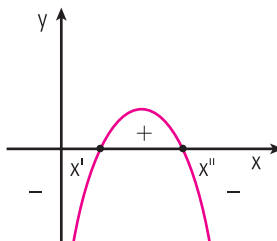
## Estudo do Sinal

Para  $\Delta > 0$

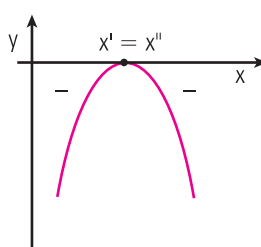
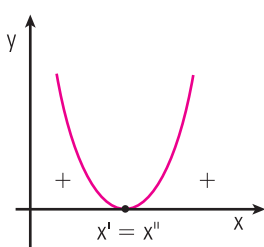
$a > 0$



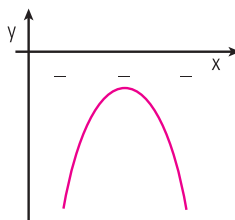
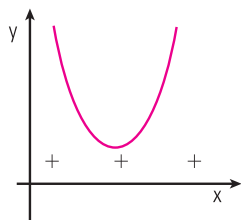
$a < 0$



Para  $\Delta = 0$



Para  $\Delta < 0$



Exemplos:

Estude o sinal das seguintes funções:

a)  $y = x^2 - 4$

Calculando as raízes, temos:

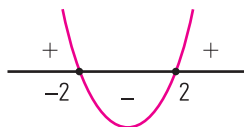
$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

## Representação das Raízes na Reta



Então:

$$f(x) > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ ou } x > 2$$

$$f(x) < 0 \Rightarrow -2 < x < 2$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2$$

b)  $y = x^2 - 4x + 4$

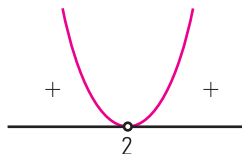
$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$$

$$\Delta = 16 - 16$$

$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x' = x'' = \frac{4}{2} = 2$$



Então:

$$f(x) > 0 \Rightarrow x \neq 2$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

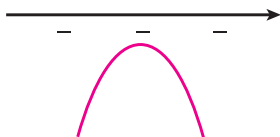
$$c) y = -x^2 + x - 5$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)$$

$$\Delta = 1 - 20$$

$$\Delta = -19$$

Como  $\Delta < 0$ , a função não apresenta raízes reais.



$$f(x) < 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

### Inequação do 2º Grau

Toda inequação que admite uma das formas  $f(x) > 0$ ,  $f(x) < 0$ ,  $f(x) \geq 0$  ou  $f(x) \leq 0$  é chamada inequação do 2º grau.

De maneira semelhante à função do 1º grau, definimos também as inequações produto, quociente, simultânea e sistemas de inequações.

Exemplo de inequação:

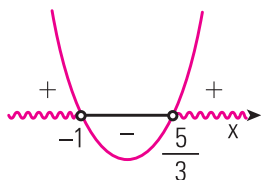
$$3x^2 - 2x - 5 > 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)$$

$$\Delta = 4 + 60$$

$$\Delta = 64$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 8}{6} \quad \begin{cases} x' = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \\ x'' = -1 \end{cases}$$



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x < -1 \text{ ou } x > \frac{5}{3} \right\}$$



Exemplos de inequação produto e inequação quociente:

$$a) \underbrace{(x^2 - 1)}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-x^2 + 4x - 3)}_{g(x)} \geq 0$$

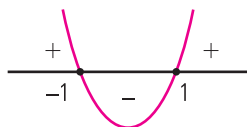
Achando as raízes das funções:

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x = \pm 1$$



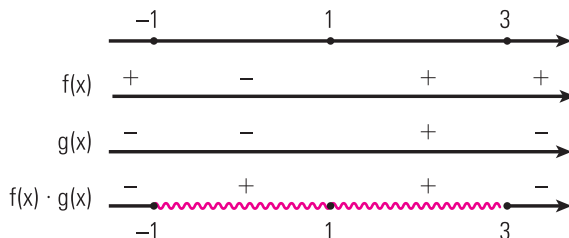
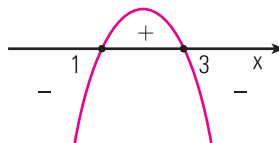
$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)$$

$$\Delta = 16 - 12$$

$$\Delta = 4$$

$$x = \frac{-4 \pm 2}{-2} \quad \begin{matrix} x' = 1 \\ x'' = 3 \end{matrix}$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 3\}$$

$$b) \frac{x+1}{x^2-4} \leq 0$$

$$x+1=0$$

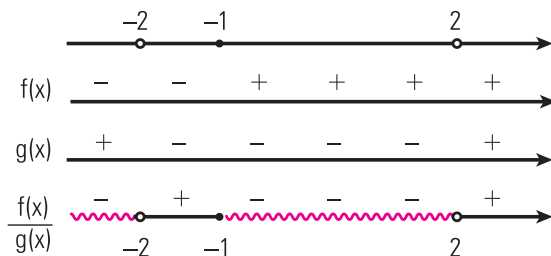
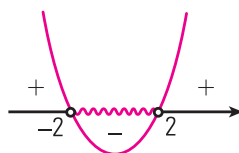
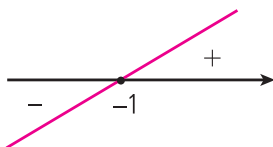
$$x=-1$$

$$x^2-4=0$$

$$x^2=4$$

$$x=\pm\sqrt{4}$$

$$x=\pm 2$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} / x < -2 \text{ ou } -1 \leq x < 2\}$$

$$c) \frac{(x^2-6x+5) \cdot (x^2-5x+4)}{x^2-3x} \leq 0$$

$$x^2-6x+5=0$$

$$\Delta=(-6)^2-4 \cdot 1 \cdot 5$$

$$\Delta=16$$

$$x=\frac{-(-6) \pm 4}{2}$$

$$x=\frac{6 \pm 4}{2}$$

$$x'=5 \quad x''=1$$

$$x^2-5x+4=0$$

$$\Delta=(-5)^2-4 \cdot 1 \cdot 4$$

$$\Delta=9$$

$$x=\frac{-(-5) \pm 3}{2}$$

$$x=\frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x'=4 \quad x''=1$$

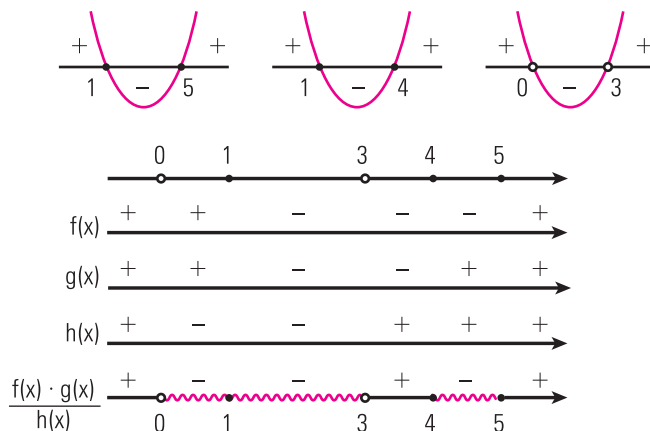
$$x^2-3x=0$$

$$x(x-3)=0$$

$$x=0 \text{ ou }$$

$$x-3=0$$

$$x=3$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 3 \text{ ou } 4 \leq x \leq 5\}$$

Exemplo de inequação simultânea:

$$-2x^2 + 4 \leq -3x + 2 \leq -x^2 - 4x + 4$$

Desmembrando a inequação simultânea, obtemos duas inequações:

$$-3x + 2 \leq -x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 + x - 2 \leq 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)$$

$$\Delta = 9$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x' = 1 \quad x'' = -2$$

$$-2x^2 + 4 \leq -3x + 2$$

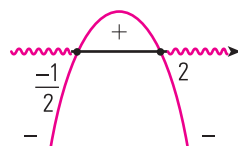
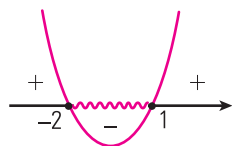
$$-2x^2 + 3x + 2 \leq 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2$$

$$\Delta = 25$$

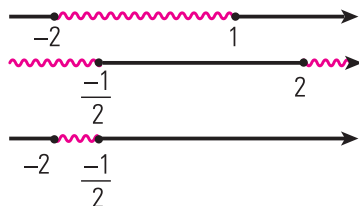
$$x = \frac{-3 \pm 5}{-4}$$

$$x' = 2 \quad x'' = \frac{-1}{2}$$



## Manual de Matemática

A solução será a intersecção das inequações:



Logo:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq \frac{-1}{2} \right\}$$

Exemplo de sistemas de inequações:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 9 \geq 0 \\ 2x - 4 > 0 \end{cases}$$

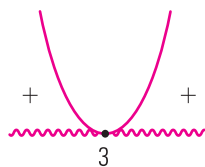
$$x^2 - 6x + 9 \geq 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$$

$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm 0}{2}$$

$$x' = x'' = 3$$

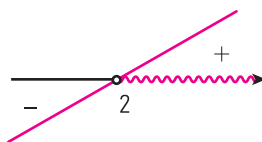


$$2x - 4 > 0$$

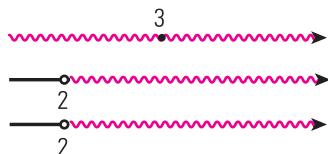
$$2x - 4 = 0$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$



Fazendo a intersecção das inequações:



$$S = \{ x \in \mathbb{R} / x > 2 \}$$

### Problemas de Aplicação de uma Função do 2º Grau

Geralmente, para resolvermos problemas práticos, precisamos saber o valor máximo ou mínimo de uma certa grandeza.

Exemplos:

- 1) Um terreno de forma retangular tem perímetro de 24 m.
  - a) Determine a área em função de um dos lados.
  - b) Verifique as dimensões para que o terreno tenha área máxima.

Solução:



a) Sendo  $x$  e  $y$  as dimensões do terreno, e o perímetro 24 m, temos:

$$2x + 2y = 24 \quad (: 2)$$

$$x + y = 12$$

Isolando  $y$  na equação

$$y = 12 - x$$

A área do retângulo é  $A = x \cdot y$ . Substituindo o valor de  $y$  na equação, temos:

$$A = (12 - x) \cdot x$$

$$A = 12x - x^2$$

Construindo o gráfico da função  $A(x) = -x^2 + 12x$ , temos de determinar os zeros e as coordenadas do vértice.

• raízes:

$$-x^2 + 12x = 0$$

$$x(-x + 12) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad -x + 12 = 0$$

$$-x = -12$$

$$x = 12$$

• coordenadas do vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-12}{-2} = 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0$$

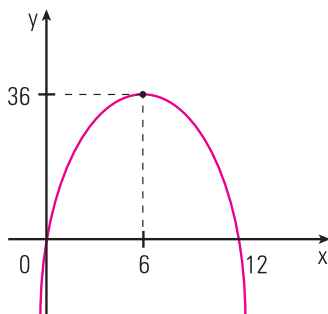
$$\Delta = 144$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-144}{-4} = 36$$

$y_v$  representa o valor máximo da função  $A(x)$ .

## Manual de Matemática

Portanto, o valor máximo da função para a área do terreno é  $y_v = 36 \text{ m}^2$ .



b) Observando o gráfico, verificamos que o terreno tem a área máxima quando  $x = 6$ .

$$\text{Em } y = 12 - 6$$

$$y = 6$$

Logo, as dimensões do terreno são  $x = y = 6 \text{ m}$ .

2) Um móvel se desloca sobre uma trajetória retilínea com movimento uniformemente variado, de acordo com a função  $e = t^2 - 5t + 6$ , em que  $e$  representa o espaço em metros (m) e  $t$  o tempo em segundos (s).

a) Determine a posição do móvel nos instantes  $t = 0 \text{ s}$ ,  $t = 4 \text{ s}$ .

b) Determine o instante em que o móvel se encontra a 12 m da origem.

Solução:

a) para  $t = 0 \text{ s}$

$$e = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6$$

$$e = 6 \text{ m}$$

para  $t = 4 \text{ s}$

$$e = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6$$

$$e = 2 \text{ m}$$

b) Substituindo  $e = 12$  na função  $e = t^2 - 5t + 6$ , temos:

$$t^2 - 5t + 6 = 12 \Rightarrow t^2 - 5t - 6 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$$

$$\Delta = 49$$

$$t = \frac{-(-5) \pm 7}{2} \Rightarrow t = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$t' = 6$$

$$t'' = -1 \text{ (não convém, pois } t > 0)$$

Logo,  $t = 6 \text{ s}$

### Funções Definidas por várias Sentenças

Uma função  $f(x)$  pode ser definida por duas ou mais sentenças.

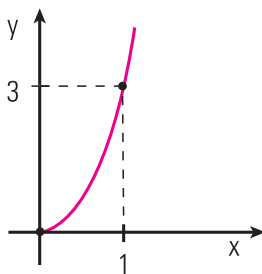
Exemplos:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ -x + 1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

A função é definida por duas sentenças.

Construindo o gráfico das funções separadamente:

$$f(x) = 3x^2, \text{ se } \geq 0$$





### Saiba mais

#### A MATEMÁTICA E A METEOROLOGIA

A meteorologia utiliza-se de conhecimentos matemáticos.

A quantidade de chuva é medida durante certo período de tempo, e a temperatura pode ser medida a cada instante.

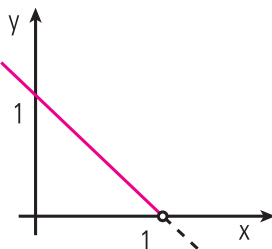
Então, para cada mês ( $x$ ), tem-se um índice pluviométrico ( $y$ ).

Esses gráficos são chamados de climogramas e são utilizados para explicar o clima de uma região e seu potencial agrícola.

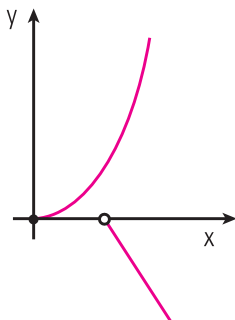
## Manual de Matemática

$$f(x) = -x + 1 \text{ se } x < 1$$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

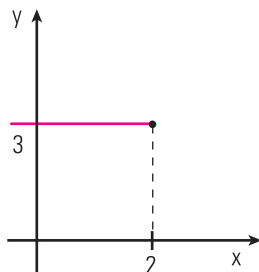


Colocando as duas funções num mesmo sistema de eixos, obtemos:

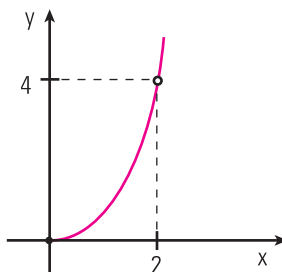


$$b) \ g(x) = \begin{cases} 3, & \text{se } x \leq 2 \\ x^2, & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ x + 2, & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

$$g(x) = 3, \text{ se } x \leq 2$$

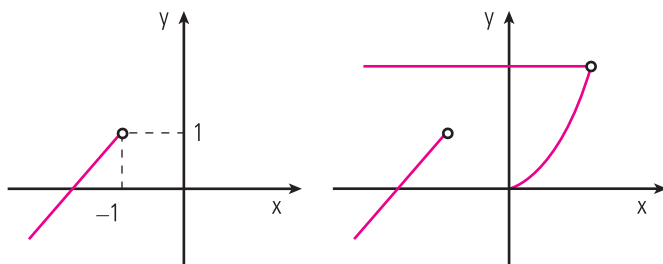


$$g(x) = x^2, \text{ se } 0 \leq x < 2$$





$$g(x) = x + 2, \text{ se } x < -1$$

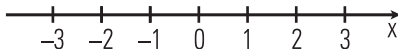


## Capítulo 4

### FUNÇÃO MODULAR

Todos os números reais podem ser representados numa reta real.

O ponto que representa o número 3 dista três unidades da origem no sentido positivo. Já o número  $-3$  dista da origem no sentido negativo.



A distância em relação à origem de  $-3$  e  $3$  é a mesma.

Podemos usar a mesma definição para os demais números.



## Saiba mais

### A IMPORTÂNCIA DA FUNÇÃO NO DIA-A-DIA

Uma das definições mais utilizadas em Matemática é a função. Ela está presente no nosso cotidiano, ajudando-nos a compreender o mundo que nos cerca.

Podemos aplicar a função em várias situações, como:

- a altura de uma criança em função de sua idade;
- o salário de um vendedor em função das vendas que ele faz;
- o desconto do imposto de renda em função da faixa salarial;
- o buraco na camada de ozônio em função do nível de poluição.

## Manual de Matemática

Assim, definimos o valor absoluto ou módulo de um número.

Exemplo:  $-5$  e  $5$  são iguais em módulo.

### Módulo de um Número Real

Módulo de um número real pode ser definido por:

$$\bullet |x| = \sqrt{x^2}$$

Exemplos:

$$a) |2| = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$b) |-2| = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\bullet |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplos:

$$a) |-4| = 4$$

$$b) |-2 - 3| = |-5| = 5$$

$$c) |-6| - |-10| = 6 - 10 = -4$$

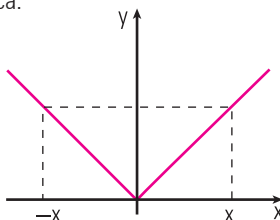
$$d) |-4 + 1| = |-3| = 3$$

### Função Modular

Dada  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  é uma função modular se, e somente se,

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Representação gráfica:



Em que:  $D(f) = \mathbb{R}$   
 $Im(f) = \mathbb{R}_+$

## Construção Gráfica

Construa os gráficos das funções modulares:

a)  $f(x) = |x - 2|$

Solução:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{para } x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ -(x - 2), & \text{para } x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2 \end{cases}$$

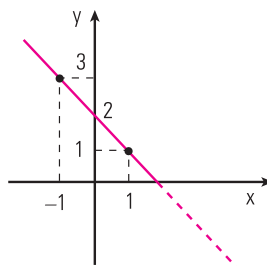
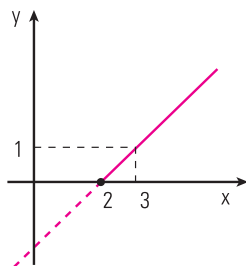
Representando graficamente cada uma das funções, temos:

$f(x) = x - 2$  se  $x \geq 2$

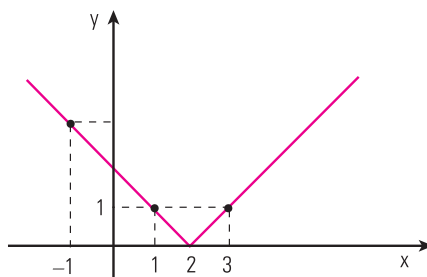
$f(x) = -x + 2$  se  $x < 2$

| x | y |
|---|---|
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |

| x  | y |
|----|---|
| 1  | 1 |
| -1 | 3 |



Logo, o gráfico  $f(x) = |x - 2|$  se apresentará da seguinte forma:



Em que:  $\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+ \end{cases}$

## Manual de Matemática

$$b) f(x) = |x| - 1$$

Solução:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{para } x \geq 0 \\ -x - 1, & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

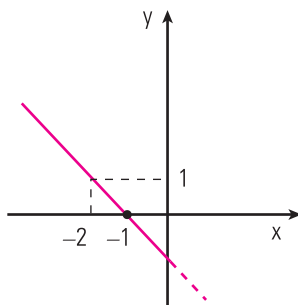
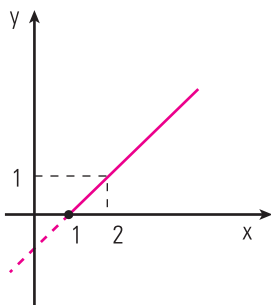
Representando graficamente cada uma das funções, temos:

$$f(x) = x - 1 \text{ se } x \geq 0$$

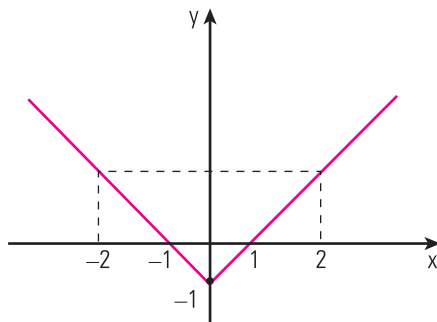
$$f(x) = -x - 1 \text{ se } x < 0$$

| x | y |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |

| x  | y |
|----|---|
| -1 | 0 |
| -2 | 1 |



Logo:



$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} / y \geq -1\}$$

c)  $f(x) = -|3x|$

Solução:

$$f(x) = \begin{cases} -3x, & \text{se } x \geq 0 \\ -(-3x), & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

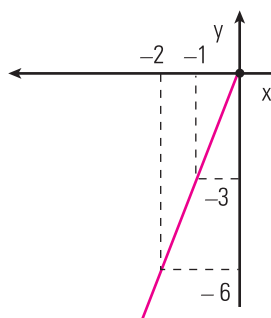
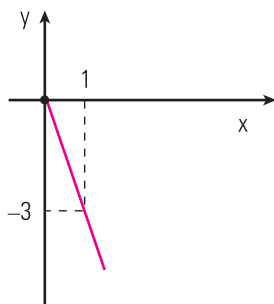
Representando graficamente cada uma das funções, temos:

$$f(x) = -3x \text{ se } x \geq 0$$

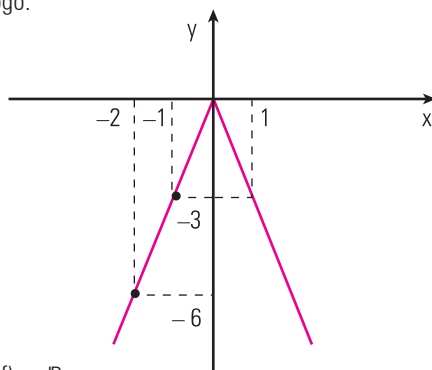
$$f(x) = -(-3x) \text{ se } x < 0$$

| x | y  |
|---|----|
| 0 | 0  |
| 1 | -3 |

| x  | y  |
|----|----|
| -1 | -3 |
| -2 | -6 |



Logo:



$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} / y \leq 0\}$$

## Manual de Matemática

$$d) f(x) = |x^2 - x - 2|$$

Solução:

Também podemos construir o gráfico de uma função modular elaborando uma tabela.

| x | $ x^2 - x - 2 $ | y |
|---|-----------------|---|
| 0 | $ 0^2 - 0 - 2 $ | 2 |
| 1 | $ 1^2 - 1 - 2 $ | 2 |
| 2 | $ 2^2 - 2 - 2 $ | 0 |
| 3 | $ 3^2 - 3 - 2 $ | 4 |

Como  $f(x) = x^2 - x - 2$  é uma função do 2º grau, construímos o gráfico determinando:

- as raízes:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)$$

$$\Delta = 9$$

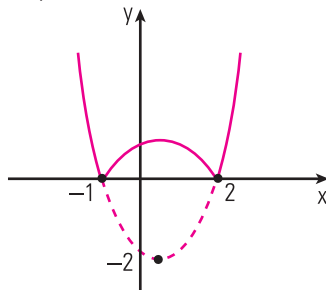
$$x = \frac{-(-1) \pm 3}{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \begin{array}{l} x' = 2 \\ x'' = -1 \end{array}$$

- as coordenadas do vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2} \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-9}{4}$$

$$V\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

Construindo o gráfico, temos:



$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$$

### Equações Modulares

Uma equação é modular quando a incógnita aparece no módulo.

Assim:

$$|x| = a, \text{ onde } a \in \mathbb{R}_+$$

$$\text{Logo: } |x| = \begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ x = -a \end{cases}$$

Exemplos:

Resolva as equações modulares:

a)  $|2x - 3| = 1$

Solução:

$$2x - 3 = 1 \quad \text{ou} \quad 2x - 3 = -1$$

$$2x = 4 \quad 2x = 2$$

$$x = 2 \quad x = 1$$

$$S = \{1, 2\}$$

### Obs.:

Na resolução dessa equação modular, invertemos o sinal do 1º membro ou do 2º membro.

b)  $\left| \frac{x-1}{2} \right| = 3$

Solução:

$$\frac{x-1}{2} = 3 \quad \text{ou} \quad \frac{x-1}{2} = -3$$

$$x-1 = 6 \quad x-1 = -6$$

$$x = 7 \quad x = -5$$

$$S = \{-5, 7\}$$

c)  $|4x - 1| = |x - 2|$

Solução:

$$4x - 1 = x - 2 \quad \text{ou} \quad 4x - 1 = -(x - 2)$$

$$4x - x = -2 + 1 \quad 4x - 1 = -x + 2$$

$$3x = -1 \quad 4x + x = 2 + 1$$

$$x = \frac{-1}{3} \quad 5x = 3$$

$$x = \frac{3}{5} \Rightarrow S = \left\{ \frac{-1}{3}, \frac{3}{5} \right\}$$

## Manual de Matemática

$$d) |x + 4| = 2x - 1$$

Solução:

Neste caso, devemos ter  $2x - 1 \geq 0$  ou  $x \geq \frac{1}{2}$  (condição necessária para que a equação modular exista).

Resolvendo a equação, temos:

$$\begin{array}{ll} x + 4 = 2x - 1 & \text{ou} & x + 4 = -(2x - 1) \\ x - 2x = -1 - 4 & & x + 4 = -2x + 1 \\ -x = -5 & & x + 2x = 1 - 4 \\ x = 5 & & 3x = -3 \\ & & x = -1 \end{array}$$

Como devemos ter  $x \geq \frac{1}{2}$ , a raiz  $x = -1$  não convém.

$$S = \{5\}$$

$$e) |x|^2 - 3|x| - 4 = 0$$

Solução:

Na resolução dessa equação utilizamos um artifício. Chamaremos  $|x| = y$

Assim:

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)$$

$$\Delta = 25$$

Substituindo  $y = 4$  em  $|x| = y$ , então  $x = 4$

ou  $x = -4$

$$y = \frac{-(-3) \pm 5}{2}$$

$$y = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$y' = 4$$

$$y'' = -1 \text{ (não convém)}$$

$$S = \{-4, 4\}$$

Calcule o domínio das funções:

$$a) f(x) = \frac{x}{|x| - 2}$$



Solução:

Calculando o domínio da função, temos:

$$|x| - 2 \neq 0$$

$$|x| \neq 2$$

$$x \neq 2 \text{ ou } x \neq -2$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2 \text{ ou } x \neq -2\} \text{ ou } D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

$$b) f(x) = \frac{-4}{|x-3|}$$

Solução:

$$|x-3| \neq 0$$

$$x-3 \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 3\}$$

## Inequações Modulares

Ocorre quando uma incógnita se apresenta em módulo numa desigualdade.

Para resolvermos inequações modulares, apresentaremos as seguintes observações:

Seja  $a > 0$ , temos:

|  |   |
|--|---|
|  | $ x  \geq a \Rightarrow x \geq a \text{ ou } x \leq -a$ |
|  | $ x  > a \Rightarrow x > a \text{ ou } x < -a$          |
|  | $ x  \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$               |
|  | $ x  < a \Rightarrow -a < x < a$                        |

Exemplos:

1) Resolva as inequações modulares:

a)  $|x-5| > 2$

Solução:

$$x-5 > 2 \quad \text{ou} \quad x-5 < -2$$

$$x > 7 \quad \text{ou} \quad x < 3$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x > 7 \text{ ou } x < 3\}$$

De acordo com a definição:

$$b) |2x^2 - 3x + 1| \leq 1$$

Solução:

$$-1 \leq 2x^2 - 3x + 1 \leq 1$$

As inequações devem ser satisfeitas ao mesmo tempo:

$$2x^2 - 3x + 1 \leq 1$$

$$2x^2 - 3x + 1 \geq -1$$

$$2x^2 - 3x \leq 0$$

$$2x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

$$2x^2 - 3x = 0$$

$$2x^2 - 3x + 2 = 0$$

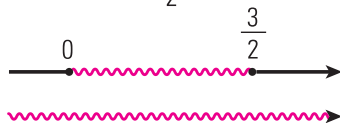
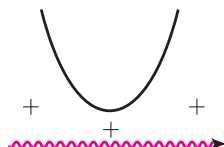
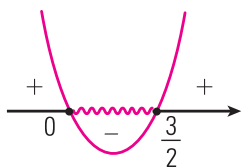
$$x(2x - 3) = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 3 = 0 \quad \Delta = -7$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \right\}$$

2) Determine o domínio da função  $f(x) = \sqrt{|3+x| - 5}$

Solução:

$$|3 + x| - 5 \geq 0$$

$$|3 + x| \geq 5$$

$$3 + x \geq 5 \text{ ou } 3 + x \leq -5$$

$$x \geq 2 \text{ ou } x \leq -8$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2 \text{ ou } x \leq -8\}$$

**Capítulo 5****FUNÇÃO EXPONENCIAL**

Uma empresa produziu 60.000 unidades de um certo produto em 1995. Projetando um aumento anual de 30% de produção, em que ano a produção anual da empresa será de 500.000 unidades?

De acordo com os dados:

$$p_0 = \text{produção da empresa em 1995}$$

$$p_1 = p_0 \cdot 1,3 = 60.000 \cdot 1,3$$

$$p_2 = p_1 \cdot 1,3 = 60.000 \cdot (1,3)^2$$

$$\vdots$$

$$p_x = 60.000 \cdot (1,3)^x$$

$$\text{Obtemos assim a equação } 60.000 \cdot (1,3)^x = 500.000$$

Essa equação apresenta a variável  $x$  no expoente e, para resolvê-la, estudaremos equações exponenciais.

Chamamos de função exponencial qualquer função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  definida por  $f(x) = a^x$ , em que  $a \in \mathbb{R}^*_+$  e  $a \neq 1$ .

Exemplos:

$$1) f(x) = 3^x$$

$$2) f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

$$3) f(x) = 2^{x+1}$$

**Gráfico de uma Função Exponencial**

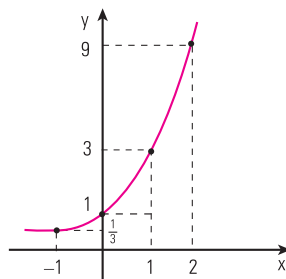
Estudaremos o gráfico da função exponencial em dois casos:

a) A base  $a > 1$

Exemplo:

$$f(x) = 3^x \text{ ou } y = 3^x$$

| $x$ | $y = 3^x$     |
|-----|---------------|
| -1  | $\frac{1}{3}$ |
| 0   | 1             |
| 1   | 3             |
| 2   | 9             |



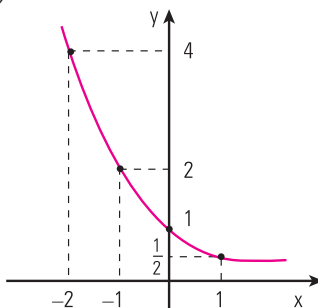
## Manual de Matemática

b) A base está entre 0 e 1:  $0 < a < 1$

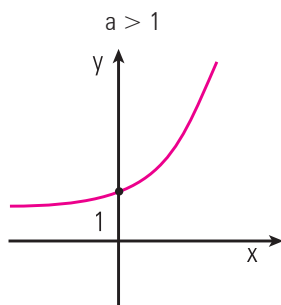
Exemplo:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ ou } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

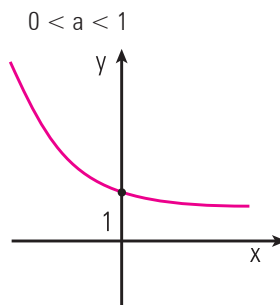
| x  | $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ |
|----|----------------------------------|
| -2 | 4                                |
| -1 | 2                                |
| 0  | 1                                |
| 1  | $\frac{1}{2}$                    |



Resumindo:



função crescente



função decrescente

Em que:  $\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^* \end{cases}$

### Obs.:

A base  $a$  da função exponencial é sempre um número positivo.

O gráfico da função exponencial do tipo  $f(x) = a^x$  passa pelo ponto  $(0, 1)$

Classifique cada uma das funções em crescente ou decrescente.

a)  $y = 5^x$  a base é 5, maior que 1, então, é crescente.

b)  $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$  a base é  $\frac{1}{4}$ , menor que 1, então, é decrescente.

c)  $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^x$  a base é  $\frac{\sqrt{3}}{5}$ , menor que 1, então, é decrescente.

### Equação Exponencial

São equações que apresentam incógnita no expoente.

Exemplos:

a)  $2^x = 32$

b)  $5^{x+1} = 25$

c)  $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

d)  $3^x + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 11$

### Resolução de Equações

- Que podem ser escritas como igualdade de mesma base.

1)  $3^x = 27$

$$3^x = 3^3$$

$$x = 3$$

Decompondo 27 em fatores primos:

$$S = \{3\}$$



### Saiba mais

#### O CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO E A FUNÇÃO EXPONENCIAL

Atualmente, quantos habitantes possui a Terra? Em quanto tempo a população será duplicada?

Essas questões podem ser respondidas pelas técnicas de previsão.

Podemos concluir como a população de um continente cresce por meio de uma função exponencial.

$$2) 2^x = \frac{1}{64}$$

$$2^x = \frac{1}{2^6}$$

$$2^x = 2^{-6}$$

$$x = -6$$

$$\text{Obs.: } \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$$

$$S = \{-6\}$$

$$3) 5^x = \sqrt[3]{25}$$

$$5^x = \sqrt[3]{5^2}$$

$$5^x = 5^{\frac{2}{3}}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Transformando o radical em  
potência de expoente fracionário:

$$S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

$$4) \left( \frac{3}{4} \right)^{x+1} = \frac{16}{9}$$

$$\left( \frac{3}{4} \right)^{x+1} = \left( \frac{4}{3} \right)^2$$

$$\left( \frac{3}{4} \right)^{x+1} = \left( \frac{3}{4} \right)^{-2}$$

$$\left( \frac{3}{4} \right)^{x+1} = \left( \frac{3}{4} \right)^{-2}$$

$$x + 1 = -2$$

$$x = -2 - 1$$

$$x = -3$$

$$\text{Invertendo: } \left( \frac{4}{3} \right)^2 = \left( \frac{3}{4} \right)^{-2}$$

$$S = \{-3\}$$

• Que exigem transformações e artifícios:

$$1) 8^{x+2} = 4^x$$

$$(2^3)^{x+2} = (2^2)^x$$

$$2^{3x+6} = 2^{2x}$$

$$3x + 6 = 2x$$

$$3x - 2x = -6$$

$$x = -6$$

$$S = \{-6\}$$

$$2) (2^x)^{x-1} = 1$$

$$2^{x^2-x} = 2^0$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x = 0$$

ou

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$S = \{0, 1\}$$

$$3) 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

Pela propriedade da potenciação, temos  $2^{2x} = (2^x)^2$ .

Fazendo  $2^x = y$  e substituindo na equação exponencial

$$y^2 - 3y + 2 = 0, \quad \text{com} \quad y' = 2 \quad \text{e} \quad y'' = 1$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$y = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Como  $2^x = y$ , temos

$$2^x = 2^1$$

$$2^x = 1$$

$$x = 1$$

$$2^x = 2^0$$

$$x = 0$$

$$S = \{0, 1\}$$

$$4) 2^{x+1} - 2^{x-1} = 6$$

Separaremos cada termo em potências de mesma base.

Lembrando:  $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

$$2^x \cdot 2^1 - 2^x \cdot 2^{-1} = 6$$

Chamamos de  $2^x = y$

$$2y - \frac{1}{2}y = 6$$

$$\frac{4y - y}{2} = \frac{12}{2}$$

$$3y = 12 \Rightarrow y = 4$$

Substituindo  $y$  em  $2^x = y$ , temos:

$$2^x = 4$$

$$2^x = 2^2$$

$$x = 2$$

$$S = \{2\}$$

### Outra maneira

Podemos também colocar  $2^x$  (fator comum) em evidência. Assim:

$$2^x \cdot 2^1 - 2^x \cdot 2^{-1} = 6$$

$$2^x \cdot (2^1 - 2^{-1}) = 6$$

$$2^x \left( 2 - \frac{1}{2} \right) = 6$$

$$2^x \left( \frac{4-1}{2} \right) = 6$$

$$2^x \left( \frac{3}{2} \right) = 6$$

$$2^x = 6 \cdot \frac{2}{3}$$

$$2^x = 4$$

$$2^x = 2^2$$

$$x = 2$$

$$S = \{2\}$$

$$5) 8^{x+2} \cdot 4^{1-x} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{3+2x} = \frac{1}{8}$$

Transformando em base 2 e aplicando a propriedade de multiplicação de mesma base, temos:

$$(2^3)^{x+2} \cdot (2^2)^{1-x} \cdot (2^{-1})^{3+2x} = 2^{-3}$$

$$2^{3x+6} \cdot 2^{2-2x} \cdot 2^{-3-2x} = 2^{-3}$$

$$2^{3x+6+2-2x-3-2x} = 2^{-3}$$

$$2^{-x+5} = 2^{-3}$$

$$-x + 5 = -3$$

$$-x = -3 - 5$$

$$x = 8$$

$$S = \{8\}$$

## Inequação Exponencial

Inequação exponencial é toda desigualdade que possui variável no expoente.

- Base  $a > 1$

Se  $a > 1$ , a função  $y = a^x$  é crescente.



Nesse caso, a desigualdade se conserva.

Exemplos:

$$1) 3^{x+1} > 9$$

$$3^{x+1} > 3^2$$

$$x + 1 > 2$$

$$x > 1$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$$

$$2) 2^{x-3} > \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$$2^{x-3} > 2^{-2x}$$

$$x + 2x > 3$$

$$3x > 3$$

$$x > 1$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$$

- base  $0 < a < 1$

Se  $0 < a < 1$ , a função  $y = a^x$  é decrescente.

Nesse caso, o sentido da desigualdade se inverte.

Exemplos:

$$1) \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} < \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} < \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$2x - 3 > 6$$

$$2x > 9$$

$$x > \frac{9}{2}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} / x > \frac{9}{2}\right\}$$

$$2) \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^1$$

$$x^2 - 3 \leq 1$$

$$x^2 - 4 \leq 0$$

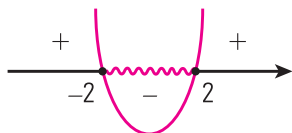
## Manual de Matemática

Resolvendo a inequação e representando na reta real, obtemos:

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 2\}$$

$$3) 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 \leq 0$$

$$y^2 - 6y + 8 \leq 0$$

Fazendo  $2^x = y$ , temos:

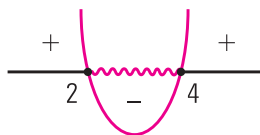
$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8$$

$$\Delta = 4$$

$$y = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$y' = 4$$

$$y'' = 2$$



Portanto,

$$2 \leq 2^x \leq 4$$

$$2^1 \leq 2^x \leq 2^2$$

$$1 \leq x \leq 2$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 2\}$$

## Sistema Envolvendo Função Exponencial

Exemplo:

$$\begin{cases} 8^x \cdot 4^y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4^x \cdot 2^{-y} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{3x} \cdot 2^{2y} = 2^{-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{2x} \cdot 2^{-y} = 2 \end{cases}$$

Igualando os expoentes:

$$\begin{cases} 3x + 2y = -2 & (1) \\ 2x - y = 1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = -2 & (1) \\ 4x - 2y = 2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$7x = 0$$

$$x = 0$$

Substituindo  $x = 0$  na equação (1):

$$3 \cdot 0 + 2y = -2$$

$$2y = -2$$

$$y = -1$$

$$S = \{(0, -1)\}$$

## Domínio de uma Função

Exemplo:

Determine o domínio das seguintes funções:

a)  $y = \sqrt{3^{x-3} - 1}$

$$\sqrt{3^{x-3} - 1}$$

$$3^{x-3} - 1 \geq 0$$

$$3^{x-3} \geq 1$$

$$3^{x-3} \geq 3^0$$

$$x - 3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

é possível em  $\mathbb{R}$  se

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$$

b)  $y = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 64}}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 64 > 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 64$$

$$(2^{-1})^x > 2^6$$

$$2^{-x} > 2^6$$

$$-x > 6$$

$$x < -6$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x < -6\}$$

## Capítulo 6

### LOGARITMO

Logaritmos podem simbolizar potências de outra forma. Como  $10^2 = 100$ , então  $\log 100 = 2$ .

Eles são mais curtos que as potências.

Imagine que as potências indicam a altura de um foguete que, depois de lançado, atinge 10 m em 1 segundo, 100 m em 2 segundos, e assim sucessivamente. O tempo é sempre o logaritmo da altitude.

Se o foguete está a 10.000 m acima do solo, a sua altura é  $10^4$ . Portanto, o logaritmo de 10.000 é 4.

O que é e onde utilizá-lo?

A palavra logaritmo originou-se das palavras gregas *logos* (razão) e *arithmos* (números).

No século XVII, havia dificuldades na elaboração de cálculos devido principalmente às operações de multiplicação, divisão e potenciação.

Bürji, em 1620, e John Napier, em 1614, publicaram as primeiras tabelas de logaritmos, cuja finalidade era a simplificação de cálculos numéricos complicados.

Embora as tabelas de logaritmos não sejam tão usadas atualmente como instrumento de cálculo, os logaritmos são de grande importância em diversas áreas, por exemplo, na medição de terremotos.

Para compreendermos melhor o que é logaritmo, consideramos uma base positiva e diferente de 1.

Exemplo:

$$3^4 = 81$$

Ao expoente dessa potência damos o nome de logaritmo.

Portanto, 4 é o logaritmo de 81 na base 3.

$$3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$$

### Logaritmo

Dados dois números reais e positivos  $a$  e  $b$ , sendo  $a \neq 1$ , chama-se logaritmo  $b$  na base  $a$  o expoente que se deve colocar à base  $a$ .

Indicamos:  $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

Em que:  $\begin{cases} b \text{ é o logaritmando} \\ a \text{ é a base} \\ x \text{ é o logaritmo} \end{cases}$

Condição de existência:

CE  $\begin{cases} b > 0 \\ 1 \neq a > 0 \end{cases}$

### Logaritmos Decimais

São aqueles na base 10. Indicaremos por  $\log b = x$ , sem necessidade de colocar a base 10.

### Sistema Neperiano ou Natural

É um conjunto dos logaritmos na base  $e$  ( $e$  é um número irracional que recebe o nome de número de Euler, que vale 2,71828...). Indicaremos  $\ln b = x$ .

### Conseqüências da Definição

A partir da definição, temos:

a)  $\log_a 1 = 0$

O logaritmo de 1 é sempre 0, pois  $a^0 = 1$ .



Podemos entender alguns conceitos da Física com a ajuda da Matemática.

A força física envolvida em certos sons é uma potência de base 10, uma conversa em voz alta é  $10^{6.5}$ . A intensidade de um som é o logaritmo decimal (na base 10) de sua intensidade física.

## Manual de Matemática

b)  $\log_a a = 1$

Quando a base é igual ao logaritmando, o logaritmo é sempre 1, pois  $a^1 = a$ .

c)  $\log_a a^n = n$

O logaritmo de uma potência da base é sempre o expoente dessa base, pois  $a^n = a^n$ .

d)  $a^{\log_a b} = b$

Um número a, elevado ao logaritmo de b na base a, é sempre igual a b.

e)  $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

Dois valores são iguais, então, seus logaritmos, na mesma base, também são iguais.

### Exercícios Resolvidos

Aplicando as consequências da definição, calcule os logaritmos:

a)  $\log_2 1 = 0$

b)  $\log 10 = 1$

c)  $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$

$$\log_2 \sqrt{32} = \log_2 \sqrt{2^5} = \log_2 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$$

$$5^{\log_5 125} = 5^{\log_5 5^3} = 5^3 = 125$$

d)  $3^{\log_5 6 \cdot \log_3 5} = 3^{\log_3 5 \cdot \log_5 6} = 5^{\log_5 6} = 6$

e)  $\log_3 b = \log_3 4$

Condição de existência:  $b > 0$ , então:

$$b = 4$$

$$\log_2 4x - 1 = \log_2 2x + 3$$

$$4x - 1 = 2x + 3$$

$$4x - 1 > 0 \Rightarrow 4x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{4}$$

$$4x - 2x = 4$$

$$2x = 2$$

$$2x + 3 > 0 \Rightarrow 2x > -3 \Rightarrow \frac{-3}{2}$$

$$x = 1$$

$$S = \{1\}$$

## Domínio de uma Função Logarítmica

Chamamos as condições de existência de um logaritmo de campo de existência ou domínio dos logaritmos.

Exemplos:

- a) Determine o campo de existência da função  $f(x) = \log_2 (x - 3)$ .

Indica-se condição de existência por CE.

Solução:

$$CE \{x - 3 > 0\}$$

Devemos resolver a condição de existência para o logaritmando

$$x - 3 > 0$$

$$x > 3$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$$

- b) Determine o domínio da função  $y = \log_{x-1} 5$ .

Solução:

$$x - 1 > 0 \quad \text{e} \quad x - 1 \neq 1$$

$$x > 1 \quad \quad \quad x \neq 2$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x > 1 \text{ e } x \neq 2\}$$

- c) Determine o domínio de  $f(x) = \log_{x+1} x^2 - 5x + 6$ .

Solução:

$$CE \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x + 1 > 0 \text{ e } x + 1 \neq 1 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$x + 1 > 0$$

$$x + 1 \neq 1$$

Raízes:

$$x > -1$$

$$x \neq 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$$

$$\Delta = 25 - 24$$

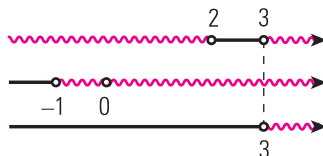
$$\Delta = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x' = 3$$

$$x'' = 2$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$$



### Propriedades Operatórias dos Logaritmos

- Logaritmo de um produto

$$\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$$

- Logaritmo de um quociente

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

- Logaritmo de uma potência

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

- Logaritmo de uma raiz

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$$

Exemplos:

Aplicando as propriedades dos logaritmos, calcule:

a) Sendo  $\log 2 = x$  e  $\log 3 = y$ , calcule  $\log 12$ .

Solução:

$$\begin{aligned}\log 12 &= \log (2^2 \cdot 3) \\ &= \log 2^2 + \log 3 \\ &= 2 \log 2 + \log 3 \\ &= 2x + y\end{aligned}$$

b) Sendo  $\log_y a = 3$ ,  $\log_y b = 2$  e  $\log_y c = 1$ , calcule  $\log_y \frac{\sqrt[4]{ac}}{b}$ .

Solução:

$$\begin{aligned}\log_y \frac{\sqrt[4]{ac}}{b} &= \log_y \sqrt[4]{ac} - \log_y b \\ &= \log_y (ac)^{\frac{1}{4}} - \log_y b \\ &= \frac{1}{4} \log_y (ac) - \log_y b \\ &= \frac{1}{4} (\log_y a + \log_y c) - \log_y b \\ &= \frac{1}{4} (3 + 1) - 2 \\ &= 1 - 2 = -1\end{aligned}$$



## Equações Logarítmicas

Podemos classificar as equações em **redutíveis**, que são solucionadas por meio da definição de logaritmo.

Para resolvermos uma equação, devemos obter:

- condição de existência.
- verificação com as soluções da equação nas condições de existência.

Exemplos:

$$a) \log_2 2x - 1 = 3$$

$$CE \{2x - 1 > 0\}$$

$$2x - 1 = 2^3$$

$$2x - 1 = 8$$

$$2x = 9$$

$$x = \frac{9}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{9}{2} \right\}$$

Verificação:

$$\text{para } x = \frac{9}{2}$$

$$2 \cdot \frac{9}{2} - 1 > 0$$

$$8 > 0 \text{ (V)}$$

$$b) \log_2^2 x - 4 \log_2 x + 4 = 0$$

$$CE \{x > 0\}$$

$$\log_2^2 x - 4 \log_2 x + 4 = 0$$

$$(\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x + 4 = 0$$

$$y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$$

$$\Delta = 0$$

$$y = \frac{4 \pm 0}{2}$$

$$y' = y'' = 2$$

$$S = \{2\}$$

Substituindo  $\log_2 x = y$ , temos:

$$\log_2 x = 2$$

$$x = 2^2$$

$$x = 4 \text{ (satisfaz a condição de existência)}$$

$$c) \log_2 \log_5 x = 1$$

$$CE \begin{cases} x > 0 \\ \log_5 x > 0 \end{cases}$$

$$\log_2 \log_5 x = 1$$

$$\log_5 x = 2^1$$

$$\log_5 x = 2$$

$$x = 5^2$$

$$x = 25$$

$x = 25$  (satisfaz as condições de existência)

$$S = \{25\}$$

- Resolução de equações utilizando as propriedades operacionais.

$$a) \log_5 3 + \log_5 (x + 8) = 2$$

$$CE \{ x + 8 > 0 \}$$

Aplicando a propriedade, temos:

$$\log_5 3 \cdot (x + 8) = 2$$

$$3 \cdot (x + 8) = 5^2$$

$$3x + 24 = 25$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Verificação:

$$\frac{1}{3} + 8 > 0$$

$$\frac{25}{3} > 0$$

$$S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

$$b) \log (x + 2) - \log (x - 3) = \log 6$$

$$CE \begin{cases} x + 2 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\log (x + 2) - \log (x - 3) = \log 6$$

$$\log \frac{x + 2}{x - 3} = \log 6$$

$$\frac{x + 2}{x - 3} = 6$$

$$x + 2 = 6x - 18$$

$$-5x = -20$$

$$x = 4$$

$$S = \{4\}$$

Verificação para  $x = 4$ :

$$x + 2 > 0 \quad x - 3 > 0$$

$$4 + 2 > 0 (V) \quad 4 - 3 > 0 (V)$$

### Mudança de Base

Às vezes, em algumas situações, devemos transformar o logaritmo em outra base. Para mudarmos a base de um logaritmo, utilizamos a seguinte fórmula:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Em que c será a nova base.

Condições:  $b > 0$

$0 < a \neq 1$

Conseqüências:

a)  $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$

b)  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

1) Escreva na base 2 o logaritmo  $\log_3 5$ .

Solução:

$$\log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3}$$

b) Se  $\log 2 = 0,3$  e  $\log 3 = 0,48$ , calcule o valor de  $\log_3 2$ .

Solução:

$$\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0,3}{0,48} = 0,625$$

c) Sabendo que  $\log 2 = x$  e  $\log 3 = y$ , calcule  $\log_{100} 36$ .

Solução:

$$\begin{aligned}\log_{100} 36 &= \frac{\log 36}{\log 100} = \frac{\log 2^2 \cdot 3^2}{\log 100} = \frac{\log 2^2 + \log 3^2}{\log 100} \Rightarrow \\ &= \frac{2 \log 2 + 2 \log 3}{\log 100} = \frac{2x + 2y}{2} = \frac{\cancel{2}(x+y)}{\cancel{2}} = x + y\end{aligned}$$

## Manual de Matemática

d) Determine o valor de  $y = \log_3 5 \cdot \log_{25} 81$ .

Solução:

$$y = \log_3 5 \cdot \log_{25} 81$$

$$y = \log_3 5 \cdot \log_{5^2} 3^4$$

$$y = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 3^4}{\log_3 5^2}$$

$$y = \cancel{\log_3 5} \cdot \frac{4 \log_3 3}{2 \cancel{\log_3 5}} \quad \text{Lembrando: } \log_3 3 = 1$$

$$y = \frac{4}{2} = 2$$

e) Simplifique a expressão:

$$y = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5$$

$$y = \log_3 2 \cdot \frac{\log_3 3}{\cancel{\log_3 4}} \cdot \frac{\cancel{\log_3 4}}{\log_3 5} \cdot \frac{\cancel{\log_3 5}}{\log_3 6}$$

$$y = \frac{\log_3 2}{\log_3 6}$$

$$y = \log_3 2 - \log_3 6$$

$$y = \log_3 2 - (\log_3 2 \cdot 3)$$

$$y = \log_3 2 - \log_3 2 - \log_3 3$$

$$y = -1$$

• Resolução de equações envolvendo mudança de base.

Exemplos:

Resolva as equações:

a)  $\log_3 x = \log_x 3$

Solução:

$$\log_3 x = \frac{\log_3 3}{\log_3 x}$$

$$(\log_3 x)^2 = \log_3 3$$

$$y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$CE \{ x > 0 \}$$

Chamando  $\log_3 x = y$  e substituindo  $y = 1$  e  $y = -1$ , temos:

$$\log_3 x = 1$$

$$\log_3 x = -1$$

$$x = 3$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Verificação:

$$x = 3 \text{ e } x = \frac{1}{3} \text{ (satisfazem a condição de existência)}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{3}, 3 \right\}$$

$$b) \log \sqrt{x} + \log_{100} x = 2$$

Solução:

$$\log \sqrt{x} + \frac{\log x}{\log 100} = 2$$

$$CE \{ x > 0 \}$$

$$\log x^{\frac{1}{2}} + \frac{\log x}{2} = 2$$

$$\frac{1}{2} \log x + \frac{\log x}{2} = 2$$

$$\log x + \log x = 4$$

$$2 \log x = 4$$

$$\log x = 2$$

$$x = 10^2$$

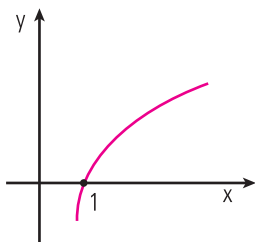
$$x = 100$$

$$S = \{100\}$$

### **Inequações Logarítmicas**

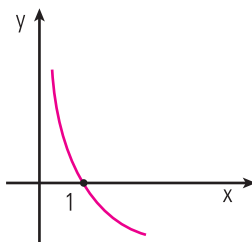
Podemos comparar logaritmos de mesma base por meio dos seguintes gráficos:

$$a > 1$$



Se  $a > 1$ , o sentido da desigualdade se conserva.

$$0 < a < 1$$



Se  $0 < a < 1$ , o sentido da desigualdade é invertido.

Para resolver inequações logarítmicas, devemos resolver as condições de existência, fazendo uma comparação das bases ou dos logaritmandos.

Exemplos de inequações:

a)  $\log_2(3x - 1) < \log_2 x$

$$\text{CE} \begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Inicialmente, resolvemos as condições de existência:

$$3x - 1 > 0 \quad \text{e} \quad x > 0$$

$$3x > 1$$

$$x > \frac{1}{3}$$

Como a base  $a > 1$ , o sentido da desigualdade se conserva.

$$\log_2(3x - 1) < \log_2 x$$

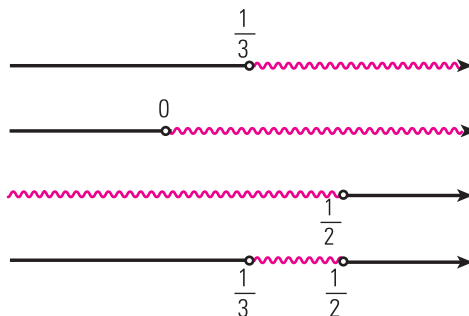
$$3x - 1 < x$$

$$3x - x < 1$$

$$2x < 1$$

$$x < \frac{1}{2}$$

Colocando na reta real:



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} \right\}$$

$$b) \log_{\frac{1}{3}}(x-4) \geq \log_{\frac{1}{3}} 5$$

$$\text{CE } \{x-4 > 0\}$$

$$x-4 > 0$$

$$x > 4$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-4) \geq \log_{\frac{1}{3}} 5$$

Como a base  $0 < a < 1$ , o sentido da desigualdade se inverte.

$$x-4 \leq 5$$

$$x \leq 9$$

Colocando na reta real:



$$S = \{x \in \mathbb{R} / 4 < x \leq 9\}$$

## Manual de Matemática

$$c) \log_3(10x - 2) > 2$$

$$CE \{10x - 2 > 0$$

$$10x - 2 > 0$$

$$10x > 2$$

$$x > \frac{2}{10}$$

$$x > \frac{1}{5}$$

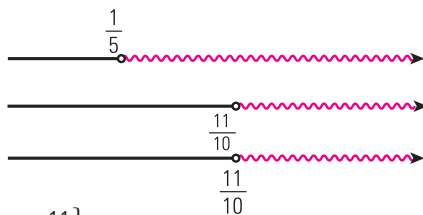
Aplicando a definição de logaritmos, temos:

$$10x - 2 > 3^2$$

$$10x - 2 > 9$$

$$10x > 11$$

$$x > \frac{11}{10}$$



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x > \frac{11}{10} \right\}$$

$$d) \log_2(x - 5) + \log_2(x - 4) < 1$$

$$CE \begin{cases} x - 5 > 0 & x > 5 \\ x - 4 > 0 & x > 4 \end{cases}$$

Aplicando as propriedades, temos:

$$\log_2(x - 5) \cdot (x - 4) < 1$$

$$(x - 5) \cdot (x - 4) < 2$$

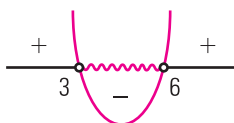
$$x^2 - 4x - 5x + 20 - 2 < 0$$

$$x^2 - 9x + 18 < 0$$

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18$$

$$\Delta = 81 - 72$$

$$\Delta = 9$$

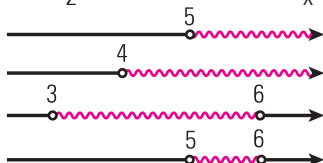




$$x = \frac{9 \pm 3}{2}$$

$$x' = 6$$

$$x'' = 3$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} / 5 < x < 6\}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } (\log x)^2 - 4 \log x + 4 &\leq 0 \\ y^2 - 4y + 4 &\leq 0 \end{aligned}$$

Fazendo  $\log x = y$ , temos:

Resolvendo a inequação:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$$

$$\Delta = 0$$

$$y = \frac{4 \pm 0}{2}$$

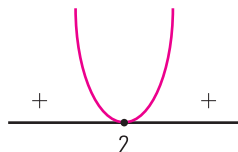
$$y' = 2$$

$$y'' = 2$$


Substituindo  $y = 2$  em

$\log x = 2$ , temos:

$$x = 10^2 \Rightarrow x = 100$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = 100\}$$



## Saiba mais

O logaritmo decimal é utilizado na definição da intensidade auditiva ou nível sonoro, cuja unidade é o decibel (dB).

Se as pessoas forem expostas a nível acima de 80 dB, poderão sofrer danos e lesões nos ouvidos.

## Gráfico da Função Logarítmica

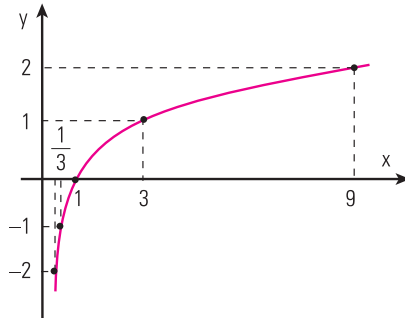
Exemplos:

Construa o gráfico das funções:

a)  $f(x) = \log_3 x$

Construindo a tabela, temos:

| x             | y  |
|---------------|----|
| $\frac{1}{9}$ | -2 |
| $\frac{1}{3}$ | -1 |
| 1             | 0  |
| 3             | 1  |
| 9             | 2  |



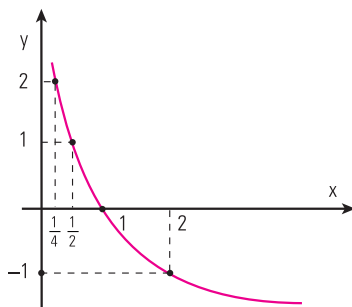
Em que:  $D = \mathbb{R}^*$

$\text{Im} = \mathbb{R}^+$

De acordo com o exemplo, concluímos que  $\log_3 x$  é crescente, pois a base  $a > 1$ .

b)  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

| x             | y  |
|---------------|----|
| 2             | -1 |
| 1             | 0  |
| $\frac{1}{2}$ | 1  |
| $\frac{1}{4}$ | 2  |



A função  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$  é decrescente, pois  $0 < \frac{1}{2} < 1$ .

### Logaritmos Decimais

Já vimos que logaritmos decimais são aqueles que apresentam base 10.

Indicação:  $\log b$ .

Os logaritmos das potências inteiras de 10 são números inteiros.

Exemplo:

$$\log 10 = 1$$

$$\log 100 = 2$$

$$\log \frac{1}{10} = -1$$

$$\log \frac{1}{100} = -2$$

Se calcularmos o logaritmo de um número  $x$  (real positivo), ele estará entre duas potências inteiras e consecutivas de 10.

Exemplo:

$$\log 63$$

O número 63 está compreendido entre  $10^1$  e  $10^2$  ou  $10^1 < 63 < 10^2$

Então:

$$\log 10^1 < \log 63 < \log 10^2$$

$$1 < \log 63 < 2$$

$$\log 63 = 1 + 0, m$$

Quando escrevemos o logaritmo de um número, separamos a parte inteira da parte não inteira.

$$\log 63 = \underbrace{1}_{\text{característica}} + \underbrace{,7993}_{\text{mantissa}}$$

Característica é a parte inteira, e a parte não inteira denominamos mantissa.

#### Resumindo

O logaritmo decimal de um número é formado pela soma de um número inteiro (característica) com um número decimal não negativo  $< 1$  (mantissa).

$$\text{Log } x = c + 0, m$$

Em que  $c$  é a característica e  $0, m$  a mantissa.

## Manual de Matemática

Exemplos:

a)  $\log 1000 = 3$

Característica: 3

Mantissa: 0

Como o número é uma potência de 10, seu logaritmo decimal é um número inteiro.

Sua característica é esse mesmo número inteiro e a mantissa é zero.

b)  $\log 0,01 = -2$

Característica:  $-2$

Mantissa: 0

c)  $\log 343$

característica: 2

mantissa: 0,535294

### Característica de $\log b$

A característica (c) de um logaritmo decimal é determinada da seguinte maneira:

1)  $\log b$ , para  $b > 1$

A característica é igual ao número de logaritmos da parte inteira, subtraído 1.

Exemplo:

$\log 53$

A parte inteira 53 tem 2 algarismos.

Então,  $c = 2 - 1 = 1$

$\log 7,1$

A parte inteira (7) tem 1 algarismo.

Então,  $c = 1 - 1 = 0$

$\log 123,28$

A parte inteira (123) tem 3 algarismos.

Então,  $c = 3 - 1 = 2$

2)  $\log b$ , para  $0 < b < 1$

A característica é negativa e igual ao número de zeros que antecedem o primeiro algarismo não nulo de  $b$ .

Exemplos:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \log \underbrace{0,438}_{1 \text{ zero}} \\ c = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c) } \log \underbrace{0,406}_{1 \text{ zero}} \\ c = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b) } \log \underbrace{0,034}_{2 \text{ zeros}} \\ c = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{d) } \log \underbrace{0,0005}_{4 \text{ zeros}} \\ c = -4 \end{array}$$

### Mantissa

As mantissas são encontradas em tabelas chamadas tábuas de logaritmos, em que  $n$  indica os números inteiros e as colunas  $\log$ , os valores das mantissas (0,  $m$ ).

Exemplo:

$$\log 125$$

Característica: 2

Mantissa: 0,0969

Então:

$$\begin{aligned} \log 125 &= c + 0, m \\ &= 2 + 0,0969 = 2,0969 \end{aligned}$$

### Forma Mista ou Forma Preparada

Quando o logaritmo é um número negativo, podemos escrevê-lo na forma mista ou preparada.

Exemplos:

1) Coloque os logaritmos na forma mista ou preparada.

$$\begin{aligned} \text{a) } \log 0,3 &= -1 + 0,477 \\ &= \overline{1},477 \end{aligned}$$

## Manual de Matemática

Se escrevêssemos  $\log 0,3$  na forma negativa, seria  $-1 + 0,477 = -0,523$

$$\begin{aligned} \text{b) } \log 0,0285 &= -2 + 0,454 \\ &= \overline{2},454 \end{aligned}$$

Quando colocamos o logaritmo na forma mista ou preparada, já estão claras a característica e sua mantissa, o que não ocorre na forma negativa.

2) Determine a característica e a mantissa de:

a)  $\log x = 0,5843$

Característica: 0

Mantissa: 0,5843

b)  $\log x = -3,6180$  forma negativa  $-3 - 0,6180$

Para transformar a forma negativa ou preparada, devemos proceder da seguinte maneira:

- subtraímos 1 da parte inteira:  $-3 - 1 = -4$
- Adicionamos 1 à parte decimal:  
 $-0,6180 + 1 = 0,382$

E o logaritmo ficará na forma mista:

$$-4 + 0,382 = \overline{4},382$$

### Tábua de Logaritmo

Na tábua de logaritmo, os números são colocados à esquerda e as mantissas que correspondem a esses números à direita.

Exemplos:

a)  $\log 512$

Consultando a tábua, temos:

| número | mantissa |
|--------|----------|
| 512    | 709270   |

Característica: 2

$$\log 512 = 2, \underbrace{709270}_{\text{mantissa}}$$

b)  $\log 51,2$

| número | mantissa |
|--------|----------|
| 512    | 709270   |

Característica: 1

Mantissa é a mesma: 709270

$$\log 51,2 = 1,709270$$

### Resolução de Equações com Auxílio de Logaritmos

Exemplo:

$$a) 2^x = 3$$

Como as bases são diferentes, colocamos o logaritmo no 1º e 2º membros.

$$\log 2^x = \log 3$$

$$x \log 2 = \log 3$$

$$x = \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$x = \frac{0,477121}{0,301030}$$

$$x = 1,58$$

### Co-logaritmo

É o oposto do logaritmo de um número na mesma base.

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b = \text{colog}_a b$$

Exemplos:

1) Calcule o valor de  $\text{colog}_3 81$

Solução:

$$\text{colog}_3 81 = -\log_3 81 = -4$$

$$\log_3 81 = x$$

$$3^x = 81$$

$$3^x = 3^4$$

$$x = 4$$

Resp.: -4

## Manual de Matemática

2) Resolva a equação:

$$\log_2 x = \log_2 5 + \operatorname{colog}_2 6$$

$$\log_2 x = \log_2 5 - \log_2 6$$

$$\log_2 x = \log_2 \frac{5}{6}$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$S = \left\{ \frac{5}{6} \right\}$$

$$\text{CE } \{ x > 0 \}$$

Verificação:

$$x = \frac{5}{6} > 0$$

### Uso da Calculadora

As calculadoras científicas apresentam a tecla log para o cálculo do logaritmo decimal (logaritmos na base 10).

Essa tecla permite-nos achar o logaritmo de um número positivo ou descobrir o número cujo logaritmo seja conhecido.

Devemos proceder da seguinte forma:

Exemplo:

Ache, usando a calculadora:

a)  $\log 415,77$

Digite o número 415.77 log, obtendo no visor o logaritmo decimal do número.

Leia no visor 2,618853.


b) Resolva a equação  $10^x = 63$

O expoente  $x$  é o número ao qual devemos elevar a 10 para obtermos 63.

$$10^x = 63$$

$$x = \log 63$$

$$x = 1,799341$$



### Saiba mais

Veja como os conhecimentos matemáticos podem ser empregados na Química:

Podemos apresentar o potencial hidrogeniônico (pH) como sendo o co-logaritmo da concentração hidrogeniônica.

$$\text{pH} = \operatorname{colog} [\text{H}^+] \quad \text{ou} \quad \text{pH} = -\log [\text{H}^+]$$



## COMPARANDO AS TABELAS DE LOGARITMOS E AS CALCULADORAS CIENTÍFICAS

Atualmente, com as calculadoras eletrônicas, as tabelas de logaritmos perderam sua função. Apertando a tecla log da calculadora científica obtemos o logaritmo a que o número corresponde.

Mas são poucas as pessoas que possuem essas calculadoras. Em geral, usamos a calculadora simples, sendo necessário para o cálculo do logaritmo decimal consultar a tabela.

**Tabela de Mantissa**

|    | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1  | 0000 | 0414 | 0792 | 1139 | 1461 | 1761 | 2041 | 2304 | 2553 | 2788 |
| 2  | 3010 | 3222 | 3424 | 3617 | 3802 | 3979 | 4150 | 4314 | 4472 | 4624 |
| 3  | 4771 | 4914 | 5051 | 5185 | 5315 | 5441 | 5563 | 5682 | 5798 | 5911 |
| 4  | 6021 | 6128 | 6232 | 6335 | 6435 | 6532 | 6628 | 6721 | 6812 | 6902 |
| 5  | 6990 | 7076 | 7160 | 7243 | 7324 | 7404 | 7482 | 7559 | 7634 | 7709 |
| 6  | 7782 | 7853 | 7924 | 7993 | 8062 | 8129 | 8195 | 8261 | 8325 | 8388 |
| 7  | 8451 | 8513 | 8573 | 8633 | 8692 | 8751 | 8808 | 8865 | 8921 | 8976 |
| 8  | 9031 | 9085 | 9138 | 9191 | 9243 | 9294 | 9345 | 9395 | 9445 | 9494 |
| 9  | 9542 | 9590 | 9638 | 9685 | 9731 | 9777 | 9823 | 9868 | 9912 | 9956 |
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 |
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 |

## Manual de Matemática

|    | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 |
| 40 | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 |
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 |
| 55 | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 |
| 60 | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 |
| 65 | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 |

|    | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 70 | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 |
| 71 | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 |
| 72 | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 |
| 73 | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 |
| 74 | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 |
| 75 | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 |
| 76 | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 |
| 77 | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 |
| 78 | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 |
| 79 | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 |
| 80 | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 |
| 81 | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 |
| 82 | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 |
| 83 | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 |
| 84 | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 |
| 85 | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 |
| 86 | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 |
| 87 | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 |
| 88 | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 |
| 89 | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 |
| 90 | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 |
| 91 | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 |
| 92 | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 |
| 93 | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 |
| 94 | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 |
| 95 | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 |
| 96 | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 |
| 97 | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 |
| 98 | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 |
| 99 | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 |

Observe como encontramos os logaritmos dos números de 1 a 999 consultando a tabela:

a) Para números de 1 a 99, a mantissa está na primeira coluna e a característica será 0 se o número estiver entre 1 e 9, e será 1 se o número estiver entre 10 e 100.

5 6990

6 7782

7 8451  $\rightarrow \log 7 = 0,8451$

8 9031

9 9542

## Manual de Matemática

40 6021

41 6128

42 6232

43 6335  $\rightarrow \log 43 = 1,6335$

44 6435

b) Para números entre 100 e 1.000, procure a mantissa da seguinte forma: localize os dois primeiros algarismos na coluna da esquerda e o último algarismo na linha que está acima da tabela. Na intersecção está a mantissa; assim, a característica será 2. Veja como localizamos o logaritmo de 267:

|    | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 |

$$\log 267 = 2,4265$$

Com a tabela também podemos descobrir um número quando o seu logaritmo é conhecido. Suponhamos, por exemplo, que em certo problema encontremos o logaritmo de um certo número igual a 1,4669. Que número será esse?

A mantissa 4669 está na parte da tabela que acabamos de mostrar.

À esquerda dessa mantissa, vemos na primeira coluna o número 29 e acima dela o número 3. Formamos então o número 293. Como a característica do logaritmo é 1, esse número está entre 10 e 99. Logo, o número procurado é 29,3.

$$\log 29,3 = 1,4669$$

### EXERCÍCIOS PROPOSTOS

#### Função

1) Dados  $A = \{-2, 1, 2\}$ ,  $B = \{0, 1\}$  e  $C = \{2, 3\}$ , determine:

a)  $A \times B$

c)  $B^2$

b)  $B \times C$

d)  $C^2$

#### Obs.:

Podemos escrever o produto cartesiano

$$B^2 = B \times B \text{ e } C^2 = C \times C$$

2) Um conjunto A tem 4 elementos e o outro conjunto B tem 3 elementos. Quantos elementos tem:

a)  $A \times B$

c)  $A \times A$

b)  $B^2$

d)  $B \times A$

#### Obs.:

Para obtermos o número de elementos do produto cartesiano, devemos usar a fórmula

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B).$$

Resolvendo o exercício a, temos:

$$n(A \times B) = 4 \cdot 3$$

$$n(A \times B) = 12$$

3) Determine x e y para que se tenha:

a)  $(x, 2) = (-1, y + 1)$

b)  $(x + y, 3) = (1, x - y)$

c)  $(2x + y, x - y) = (0, 9)$

Dois pares ordenados são iguais se os primeiros elementos são iguais e os segundos elementos também são iguais.

4) Considerando os conjuntos  $A = \{x \in \mathbb{Z} / -1 \leq x \leq 1\}$  e  $B = \{2, 3\}$ , determine  $A \times B$  na forma gráfica.

5) Dados os conjuntos  $A = \{0, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  e a relação  $R = \{(x, y) \in A \times B / y = -x + 2\}$ , determine:

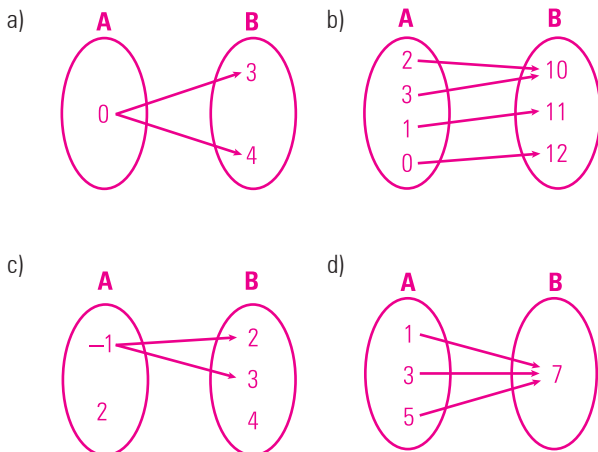
a) os pares ordenados da relação R

b) o gráfico cartesiano

c) o domínio e a imagem

## Manual de Matemática

6) Quais dos diagramas a seguir representam uma função de A em B?



7) Dada a função  $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$ , determine:

- seu domínio
- $f(-2)$
- $x$  de modo que a imagem seja  $-1$

8) Determine o domínio das seguintes funções:

a)  $f(x) = \frac{2}{2x-10}$

e)  $y = \sqrt{-2x+8}$

b)  $f(x) = x^2 - x + 4$

f)  $f(x) = \sqrt[3]{5x-2}$

c)  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+4x+4}$

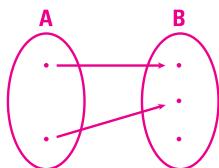
g)  $y = \frac{\sqrt{4x-9}}{2x-4}$

d)  $f(x) = \frac{x}{(x-1) \cdot (x+2)}$

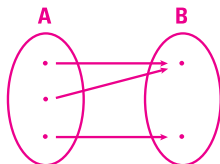
h)  $y = \frac{4x}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{-x+4}$

9) Classifique as funções abaixo, em injetora, sobrejetora ou bijetora.

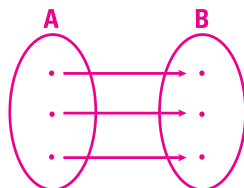
a)



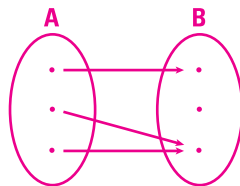
c)



b)



d)



10) Determine a função inversa de cada função:

a)  $y = 2x + 8$       b)  $y = \sqrt{x}$       c)  $y = \frac{2-x}{x}$       d)  $y = \sqrt[3]{x+1}$

11) Sejam  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 8, 13\}$  e  $f: A \rightarrow B$  definida por  $f(x) = 5x - 2$ . Determine:

- os pares ordenados de  $f$
- a função inversa de  $f$
- os pares ordenados da função inversa de  $f$

12) Sendo  $f(x) = \sqrt{x}$  e  $g(x) = x^2$ , determine  $f[g(x)]$  e  $g[f(x)]$ .

13) Sendo  $f(x) = x - 2$  e  $g(x) = 3x + 1$ , determine

a)  $f[f(0)]$       b)  $g[f(-1)]$       c)  $f[f(-2)] + g[g(3)]$

14) Dadas as funções reais  $f(x) = 3x + k$  e  $g(x) = 2x - 5$ , calcule  $K$  de modo que  $f[g(x)] = g[f(x)]$ .

15) Sendo  $f(x) = 2x - 3$  e  $f[g(x)] = 8x - 2$ , determine  $g(x)$ .

16) Dadas as funções  $f(x) = 4x$  e  $g(x) = x - 3$ , calcule:

a)  $f(f(g(x)))$       b)  $\frac{f(g(0))}{g(f(-1))}$

## Manual de Matemática

### Função do 1º grau

17) Considerando a função  $f(x) = 4x - 3$ , determine:

- a) o coeficiente angular e linear
- b) se a função é crescente ou decrescente

c)  $f(-2)$  e  $f\left(\frac{1}{2}\right)$

18) Determine  $f(x) = ax + b$ , sendo  $f(3) = 5$  e  $f(-1) = -7$

19) Construa os seguintes gráficos:

a)  $f(x) = -4x + 2$                       b)  $f(x) = 3x$                       c)  $f(x) = -4$

20) Estude os sinais das seguintes funções do 1º grau:

a)  $f(x) = x + 3$                       b)  $f(x) = \frac{x-2}{3}$

21) Resolva as inequações do 1º grau:

a)  $2x - 3 \geq 4x + 1$                       b)  $\frac{3(x-1)}{2} - \frac{x-2}{3} > 4$

22) Resolva os sistemas de inequações do 1º grau:

a)  $\begin{cases} 2x - 1 \geq 5 \\ -x - 3 > 0 \end{cases}$                       b)  $\begin{cases} 2x - 1 \geq 5 - x \\ 5x - 4 > 6 \end{cases}$

23) Resolva as inequações produto e quociente:

a)  $(2x - 1) \cdot (-5x + 10) \leq 0$                       c)  $(2x + 1) \cdot (-x + 2) \geq 0$

b)  $(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) > 0$                       d)  $\frac{2x+1}{x-2} > 1$

24) Dada a função  $f(x) = x^2 - x + 6$ , calcule:

a)  $f(1)$                       b)  $f(0)$                       c)  $f(-2)$

25) Um corpo lançado do solo verticalmente para cima tem posição em função do tempo dada pela função  $g(t) = 10t - 2t^2$ , onde a altura  $h$  é dada em metros e o tempo  $t$  é dado em segundos. Determine:

- a) a altura em que o corpo se encontra em relação ao solo no instante  $t = 2s$ .
- b) os instantes em que o corpo está a uma altura de 20 m do solo.



26) Determine  $c$  na equação  $x^2 - 2cx + 1 = 0$ , de modo que entre as raízes exista a relação:  $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{2}{5}$ .

27) Calcule  $m$  de modo que a função  $y = x^2 - 2x + m$  admita  $-1$  como raiz.

28) Estude as funções quadráticas abaixo determinando:

- |   |                             |
|---|-----------------------------|
| a) as raízes  | d) o vértice                |
| b) intersecção com o eixo $y$                             | e) o valor máximo ou mínimo |
| c) o ponto de encontro do eixo de simetria com o eixo $x$ | f) o gráfico                |
|   | g) a imagem                 |

1)  $y = -x^2 - 2x + 3$

d)  $y = x^2 + 4x$

29) Determine o valor  $k$  de modo que a função  $f(x) = 3x^2 - x + k$  tenha 3 como valor máximo.

30) Estude o sinal das seguintes funções do 2º grau:

a)  $y = -x^2 + 4x - 4$

c)  $y = x^2 - 7x + 10$

b)  $y = -x^2 - x - 1$

d)  $y = x^2 - 3x + 2$

31) Resolva as inequações:

a)  $9x^2 - 6x + 1 > 0$

c)  $x^2 + x - 12 < 0$

b)  $-x^2 + 9x - 8 \geq 0$

d)  $-4 < x^2 + 2x \leq 3x$

32) Resolva as inequações produto e quociente:

a)  $(x^2 - x - 2) \cdot (-x^2 + 2x + 3) \leq 0$

b)  $(x^2 - 5x + 6) \cdot (-x^2 - 5x - 4) > 0$

c)  $(2x^2 - 9x - 5) \cdot (x^2 - 2x + 2) \leq 0$

d)  $\frac{x(3-x)}{x^2-1} \leq 0$

e)  $\frac{-x^2+x+2}{x^2-4} \leq 0$

33) Construa os gráficos das funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  definidas por:

a)  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} -x & \text{para } x \leq -2 \\ 4 & \text{para } -2 < x \leq 1 \\ x^2 & \text{para } x > 1 \end{cases}$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ -2x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

34) Um projétil é lançado verticalmente para cima, e sua trajetória é uma curva de equação  $s = 20t^2 + 100t$ , em que  $s$  é o espaço percorrido, em metros, em  $t$  segundos. Determine a altura máxima atingida por esse projétil, em metros.

### Módulo e Função Modular

35) De acordo com a definição de módulo, calcule:

a)  $|-2|$

d)  $4 + |-7| - |-8 - 1|$

b)  $|-3 - 5|$

e)  $|-|-10||$

c)  $|-1| - |-3|$

f)  $||-1| - |-15||$

36) Dada a função  $f(x) = |10x - 2|$ , calcule:

a)  $f(-2)$

b)  $f(1) + f(-2)$

37) Esboce os gráficos das seguintes funções:

a)  $f(x) = |1 - x|$

d)  $f(x) = |x^2 - 5x - 6|$

b)  $f(x) = -|4x - 2|$

e)  $f(x) = |6x - 2| - 1$

c)  $f(x) = |x^2 - 4|$

38) Resolva as equações modulares:

a)  $|2x - 3| = 5$

d)  $\left|\frac{x-4}{2}\right| = 1$

b)  $|2x - 1| = |1 - x|$

e)  $|x^2| - 5x = 0$

c)  $|2 + x| = 3$

f)  $|2x - 1| = |4x + 3|$

39) Resolva as inequações modulares:

a)  $|x| \leq 3$

b)  $|2x - 3| \geq 3$

c)  $|3x - 4| \leq 1$

40) Determine o domínio das seguintes funções:

a)  $f(x) = \sqrt{|2x - 1| - 3}$

b)  $f(x) = \frac{1}{|x - 1| - 2}$

## Funções Exponenciais

41) Construa o gráfico das seguintes funções exponenciais determinando o domínio e a imagem.

$$\text{a) } y = 2^{x-1} \qquad \text{b) } y = \left(\frac{1}{4}\right)^x \qquad \text{c) } y = 5^x$$

42) Resolva as equações exponenciais:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 5^x = \frac{1}{25} & \text{g) } 4^{x+2} + 4^{x-1} - 4^{x+1} + 4^x = 212 \\ \text{b) } 27^x = \sqrt{3} & \text{h) } 5^{x-1} + 5^{x-2} = 30 \\ \text{c) } \sqrt[3]{2} = 8^x & \text{i) } 3^{x^2-7x+12} = 1 \\ \text{d) } (0,01)^{2x-1} = 1 & \text{j) } 25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0 \\ \text{e) } 7^x = \sqrt[3]{49} & \text{l) } 100^x (0,01)^{x-1} \cdot (\sqrt{10})^x = 0,001 \\ \text{f) } \frac{1}{5^x} = \sqrt[3]{5} & \text{m) } 27^{x+1} \cdot 9^{x-1} = 3^{\frac{-1}{2}} \end{array}$$

43) Resolva as seguintes inequações exponenciais em  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 5^x < 125 & \text{e) } \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4} \leq 8^{x+2} \\ \text{b) } 3^{2x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} & \text{f) } 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 > 0 \\ \text{c) } \left(\frac{1}{25}\right)^{2x-1} < 1 & \text{g) } 2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 \leq 0 \\ \text{d) } (3^{x-1})^{2x-4} \geq 81 & \text{h) } (0,3)^{13x-5} \leq (0,3)^{7x+2} \end{array}$$

44) Determine o domínio das funções:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \sqrt{(0,5)^{x^2-5x} - (0,5)^{-6}} & \text{c) } y = \sqrt{\frac{1}{81} - 3^{-x}} \\ \text{b) } y = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}} - 4 & \end{array}$$

## Manual de Matemática

45) Resolva os sistemas:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{cases} 4^{x-1} \cdot 2^{y+2} = 32 \\ 8^x - 16 \cdot 4^y = 0 \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} 5^{xy+1} = \frac{1}{5} \\ 3^{x^2+y^2} = 243 \end{cases} \end{array}$$

### Logaritmo

46) Aplicando a definição, calcule os logaritmos:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \log_2 32 & \text{d)} \log_2 \sqrt{8} & \text{g)} \log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3} \\ \text{b)} \log 0,01 & \text{e)} \log_4 \sqrt{2} & \text{h)} \log_2 0,25 \\ \text{c)} \log_3 \frac{1}{9} & \text{f)} \log_{\frac{1}{25}} \sqrt[3]{5} & \text{i)} \log_2 \sqrt[8]{64} \end{array}$$

47) Calcule o valor de x:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \log_3 x = 4 & \text{c)} \log_2 \frac{27}{8} = 3 \\ \text{b)} \log_2 \frac{1}{16} = x & \text{d)} \log_{\frac{2}{5}} x = -1 \end{array}$$

48) Calcule o valor da soma S:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \log 0,001 + \log_8 8 - \log_3 1 \\ \text{b)} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64} + \log_{\sqrt{3}} 81 + \log_2 \sqrt{8} \end{array}$$

49) Determine a condição de existência dos logaritmos:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} y = \log_2 (x-3) & \text{c)} y = \log_x (x^2 - 5x + 6) \\ \text{b)} f(x) = \log_{x-2} 6 & \text{d)} y = \log_{x-1} x^2 - 64 \end{array}$$

50) Usando as propriedades decorrentes da definição, determine o valor de x.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \log_2 1 & \text{c)} \log_4 1 & \text{e)} \log_2 64 \\ \text{b)} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} & \text{d)} \log_5 x = \log_5 2 & \text{f)} \log_3 3^{-3} \end{array}$$

g)  $4^{\log_4 \frac{1}{2}}$

i)  $3^{\log_2 4, \log_3 2}$

l)  $\log^{-\log_3 8 \cdot \log_5 3}$

h)  $\log(x-3) = \log 2$

j)  $2^{2 \log_2 7}$

51) Resolva as seguintes equações:

a)  $\log_2(x+3) = 4$

d)  $\log_4[\log_3(\log_2 x)] = 0$

b)  $\log_{25}(\log_3 x) = \frac{1}{2}$

e)  $\log_7(x+2) + \log_7(x-3) = \log_7 6$

c)  $\log_5(x-1)^2 = 0$

52) Construa os seguintes gráficos:

a)  $y = \log_3 x$

b)  $y = \log_4(x-1)$

53) Sendo  $\log a = 2$ ,  $\log b = 3$  e  $\log c = -6$ , calcule:  $\log \sqrt[5]{\frac{a^2 b^2}{c^3}}$ .

54) Calcule A, sabendo que:  $A = \operatorname{colog}_3 27 - \operatorname{colog}_2 \sqrt{8}$ .

55) (FATEC) Considere o sistema  $\begin{cases} 3^{x+y} = 729 \\ \log x + \log y = \log 8 \end{cases}$  com x e y estritamente positivos. Se (a, b) é solução do sistema, então o máximo divisor comum de a e b é:

a) 2

c) 4

e) 9

b) 3

d) 8

56) Simplifique as expressões:

a)  $\log_2 8 \cdot \log_4 3 \cdot \log_{25} 2 \cdot \log_3 5$

b)  $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$

c)  $\log_3 5 \cdot \log_{25} 81$

57) Resolva as inequações logarítmicas:

a)  $\log(x^2 - 2x + 1) < 2$

b)  $\log_2(2a+1) - \log_2 3 > \log_2 x$

## Manual de Matemática

58) Sendo  $\log 2 = x$  e  $\log 3 = y$ , calcule  $\log 12$ .

59) Encontre a característica do logaritmo decimal dos números abaixo:

a) 43

c) 843,1

e) 5,3

b) 0,004

d) 0,013

f) 0,001

60) Determine o valor de  $x$  nos logaritmos:

a)  $\log x = 3,0719$

b)  $\log x = 2,5340$

c)  $\log x = 2,1553$

### Respostas

1) a)  $A \times B = \{(-2, 0), (-2, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$

b)  $B \times C = \{(0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3)\}$

c)  $B^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

d)  $C^2 = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

2) a) 12

b) 9

c) 16

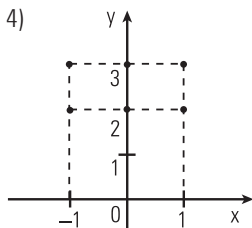
d) 12

3) a)  $x = -1$  e  $y = 1$

b)  $x = 2$  e  $y = -1$

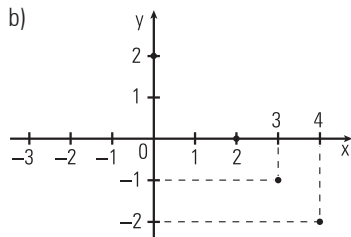
c)  $x = 3$  e  $y = -6$

4)



5) a)  $R = \{(0, 2), (2, 0), (3, -1), (4, -2)\}$

b)



c)  $D = \{0, 2, 3, 4\}$   
 $\text{Im} = \{-2, -1, 0, 2\}$

6) b, d

7) a)  $x \neq \frac{1}{2}$

b)  $-\frac{1}{5}$

c)  $-\frac{2}{3}$

8) a)  $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 5\}$

e)  $D = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 4\}$

b)  $D = \mathbb{R}$

f)  $D = \mathbb{R}$

c)  $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -2\}$

g)  $D = \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{9}{4}\right\}$

d)  $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1 \text{ ou } x \neq -2\}$

h)  $D = \{x \in \mathbb{R} / 3 < x \leq 4\}$

9) a) injetora

b) bijetora

c) sobrejetora

d) injetora

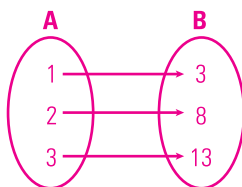
10) a)  $y = \frac{x-8}{2}$

b)  $y = x^2$

c)  $y = \frac{2}{x+1}$

d)  $y = x^3 - 1$

11) a)



$f = \{(1, 3), (2, 8), (3, 13)\}$

b)  $y = \frac{x+2}{5}$

c)  $f^{-1} = \{(3, 1), (8, 2), (13, 3)\}$

12)  $f[g(x)] = x$

$g[f(x)] = x$

13) a)  $-4$

b)  $-8$

c)  $25$

14)  $K = -10$

15)  $g(x) = \frac{8x+1}{2}$

16) a)  $16x - 48$

b)  $\frac{12}{7}$

17) a) coeficiente angular 4  
coeficiente linear  $-3$

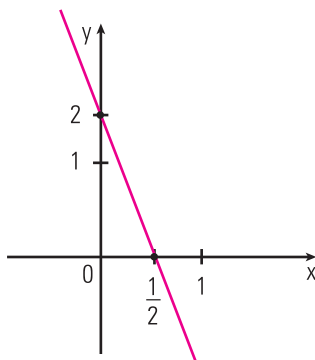
c)  $f(-2) = -11$   $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

b) função crescente

18)  $f(x) = 3x - 4$

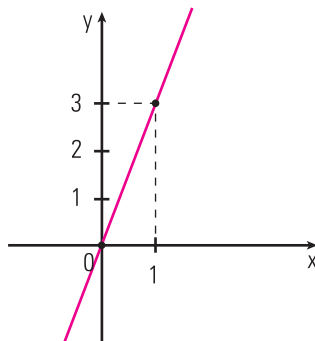
19) a)  $f(x) = -4x + 2$

| x             | y |
|---------------|---|
| $\frac{1}{2}$ | 0 |
| 0             | 2 |



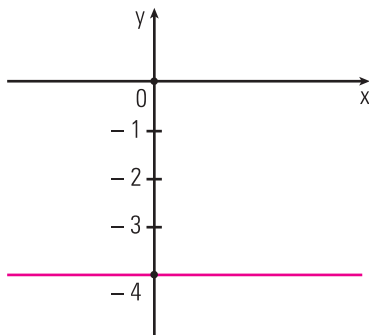
b)  $f(x) = 3x$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 3 |





c)  $f(x) = -4$



20) a)  $\begin{cases} f(x) > 0 \Rightarrow x > -3 \\ f(x) < 0 \Rightarrow x < -3 \\ f(x) = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} f(x) > 0 \Rightarrow x > 2 \\ f(x) < 0 \Rightarrow x < 2 \\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

21) a)  $S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -2\}$       b)  $S = \left\{x \in \mathbb{R} / x > \frac{29}{7}\right\}$

22) a)  $S = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$       b)  $S = \{x \in \mathbb{R} / x > 2\}$

23) a)  $S = \left\{x \in \mathbb{R} / x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 2\right\}$

b)  $S = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

c)  $S = \left\{x \in \mathbb{R} / -\frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$

d)  $S = \{x \in \mathbb{R} / x < -3 \text{ ou } x > 2\}$

24) a) 6

b) 6

c) 12

25) a) 12 m

b) 1s e 4s

26)  $\frac{1}{5}$

27)  $m = -3$

28) 1) Raízes:

$$x' = -3 \text{ e } x'' = 1$$

Intersecção com eixo  $y$  (0, 3)

Eixo de simetria  $x = -1$   $V(-1, 4)$

Valor máximo:  $y = 4$

$$\text{Im}(f) = ]-\infty, 4]$$

2) Raízes:

$$x' = 0 \text{ e } x'' = -4$$

Intersecção com eixo  $y$  (0, 0)

Eixo de simetria  $x = -2$   $V(-2, -4)$

Valor máximo:  $y = -4$

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} / y \geq -4\}$$

29)  $k = \frac{37}{12}$

30) a)  $f(x) < 0 \Rightarrow x < 2 \text{ ou } x > 2$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

b)  $f(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

c) 
$$\begin{cases} f(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 5 \\ f(x) > 0 \Rightarrow x < 2 \text{ ou } x > 5 \\ f(x) < 0 \Rightarrow 2 < x < 5 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} f(x) > 0 \Rightarrow x < 1 \text{ ou } x > 2 \\ f(x) < 0 \Rightarrow 1 < x < 2 \\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2 \end{cases}$$

31) a)  $\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{1}{3}\}$

b)  $\{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 8\}$

c)  $\{x \in \mathbb{R} / -4 \leq x \leq 3\}$

d)  $\{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 1\}$

32) a)  $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$

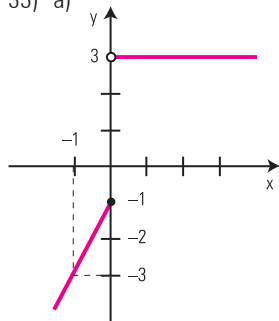
b)  $\{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 4\}$

c)  $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{-1}{2} \leq x \leq 5\right\}$

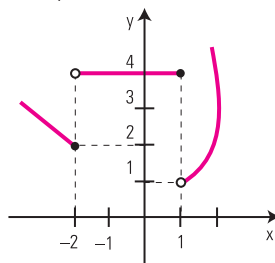
d)  $\{x \in \mathbb{R} / x \leq -1 \text{ ou } 0 \leq x < 1 \text{ ou } x \geq 3\}$

e)  $\{x \in \mathbb{R} / x < -2 \text{ ou } x \geq -1 \text{ e } x \neq 2\}$

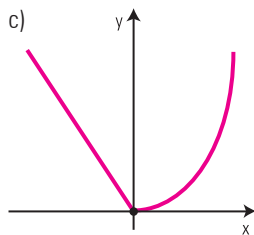
33) a)



b)



c)



34) 126 m

35) a) 2

b) 8

c) -2

d) 2

e) 10

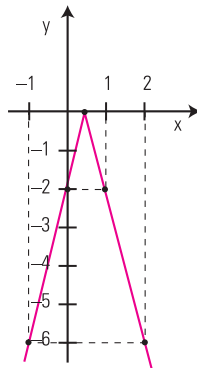
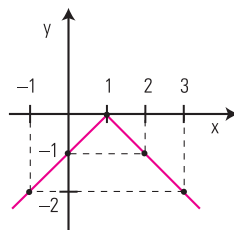
f) 14

36) a) 22

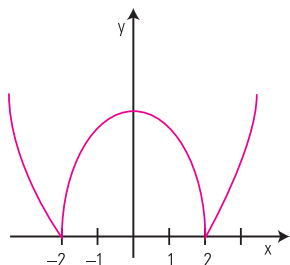
b) 30

37) a)  $f(x) = |1 - x|$

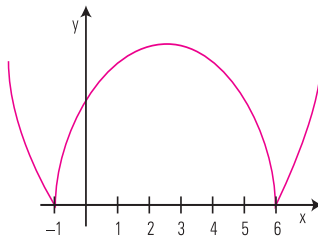
b)  $f(x) = -|4x - 2|$



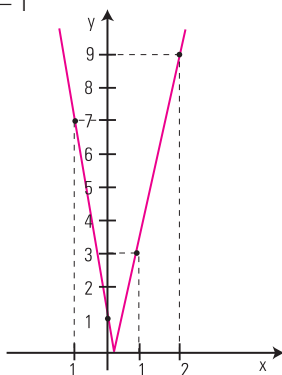
c)  $f(x) = |x^2 - 4|$



d)  $f(x) = |x^2 - 5x - 6|$



e)  $f(x) = |6x - 2| - 1$



38) a)  $S = \{-1, 4\}$

d)  $S = \{2, 6\}$

b)  $S = \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$

e)  $S = \{0, 5\}$

c)  $S = \{-5, 1\}$

f)  $S = \left\{\frac{-1}{3}, -2\right\}$

39) a)  $S = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 3\}$

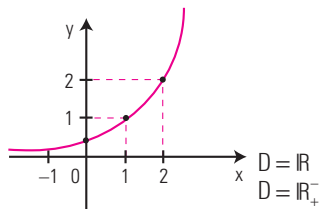
b)  $S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3\}$

c)  $S = \left\{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq \frac{5}{3}\right\}$

40) a)  $D = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2\}$

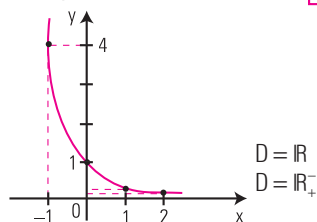
b)  $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1, x \neq 3\}$

41) a)



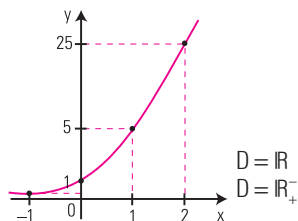
| x  | y             |
|----|---------------|
| -1 | $\frac{1}{2}$ |
| 0  | 1             |
| 1  | 2             |
| 2  | 4             |

b)



| x  | y              |
|----|----------------|
| -1 | 4              |
| 0  | 1              |
| 1  | $\frac{1}{4}$  |
| 2  | $\frac{1}{16}$ |

c)



| x  | y             |
|----|---------------|
| -1 | $\frac{1}{5}$ |
| 0  | 1             |
| 1  | 5             |
| 2  | 25            |

42) a)  $\{-2\}$

e)  $\left\{\frac{2}{3}\right\}$

i)  $\{3, 4\}$

b)  $\left\{\frac{1}{6}\right\}$

f)  $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

j)  $\{0, 1\}$

c)  $\left\{\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

g)  $\{2\}$

l)  $\{-10\}$

d)  $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

h)  $\{3\}$

m)  $\left\{-\frac{3}{10}\right\}$

- 43) a)  $x < 3$  e)  $x \leq -2$  ou  $x \geq -1$   
b)  $x < \frac{-2}{3}$  f)  $x < 0$  ou  $x > 2$   
c)  $x > \frac{1}{2}$  g)  $2 \leq x \leq 3$   
d)  $x \leq 0$  ou  $x \geq 3$  h)  $x \geq \frac{7}{6}$
- 44) a)  $\{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 3\}$  b)  $\left\{x \in \mathbb{R} / x \leq \frac{-2}{3}\right\}$   
c)  $\{x \in \mathbb{R} / x > 4\}$
- 45) a)  $\{(2, 1)\}$   
b)  $\{(-2, 1), (2, -1), (-1, 2), (1, -2)\}$
- 46) a) 5 d)  $\frac{3}{2}$  f)  $-\frac{1}{6}$  h) -2  
b) -2 e)  $\frac{1}{4}$  g)  $-\frac{3}{4}$  i)  $\frac{3}{4}$   
c) -2
- 47) a) 81 b) -4 c)  $\frac{3}{2}$  d)  $\frac{5}{2}$
- 48) a) -2 b)  $\frac{31}{2}$
- 49) a)  $D = \{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$   
b)  $D = \{x \in \mathbb{R} / x > 2 \text{ e } x \neq 3\}$   
c)  $D = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 2 \text{ e } x > 3 \text{ ou } x \neq 1\}$   
d)  $D = \{x \in \mathbb{R} / x > 8\}$
- 50) a) 0 d) 2 g)  $\frac{1}{2}$  j) 49  
b) 1 e) 6 h) 5 l)  $-\frac{1}{8}$   
c) 0 f) -3 i) 4

51) a) 13

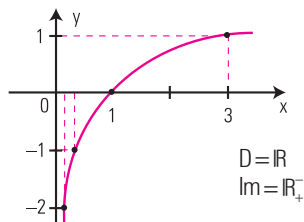
b) 243

c)  $\{0, 2\}$

d)  $\{3\}$

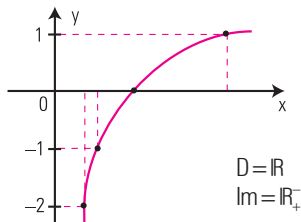
e)  $\{4\}$

52) a)



| x             | y  |
|---------------|----|
| $\frac{1}{9}$ | -2 |
| $\frac{1}{3}$ | -1 |
| 1             | 0  |
| 3             | 1  |

b)



| x               | $\log_4(x-1)$         | y  |
|-----------------|-----------------------|----|
| $\frac{17}{16}$ | $\log_4 \frac{1}{16}$ | -2 |
| $\frac{5}{4}$   | $\log_4 \frac{1}{4}$  | -1 |
| 2               | $\log_4 1$            | 0  |
| 5               | $\log_4 4$            | 1  |

53)  $\frac{28}{5}$

54)  $\frac{-3}{2}$

55) a

56) a)  $\frac{3}{2}$

b) 1

c) 2

57) a)  $\{x \in \mathbb{R} / -9 < x < 1 \text{ e } x \neq 1\}$

b)  $\{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 1\}$

58)  $2x + y$

59) a) 1

b) -3

c) 2

d) -2

e) 0

f) -3

60) a) 0,00118

b) 342

c) 0,0143